JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 186-189
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__186_0>

SUR LES FONCTIONS POLAIRES POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

Jean-François Le Gall(*)

1. Soit $W = (W_t \ ; \ t \geq 0)$ un mouvement brownien plan. Une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ est dite polaire pour W si

$$P[\exists\, t > 0 : W_t = f(t)] = 0.$$

On vérifie aisément que cette propriété ne dépend pas du point de départ de W. Graversen [1] a étudié les fonctions polaires pour le mouvement brownien plan et montré en particulier que pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$ il existe des fonctions höldériennes d'exposant α qui ne sont pas polaires. Graversen conjecture que toutes les fonctions höldériennes d'exposant $\frac{1}{2}$ sont polaires, et donne une réponse partielle en montrant que si $f = (f_1, f_2)$, où f_1 est höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et f_2 höldérienne d'exposant γ pour un $\gamma > \frac{3}{4}$, alors f est polaire. L'objet principal de cette note est de démontrer la conjecture de Graversen en établissant le résultat un peu plus précis suivant.

THEOREME 1 : *Supposons que pour tout* $K > 0$ *il existe une constante* $\delta > 0$ *telle que, pour tous* s,t *avec* $0 \leq s < t \leq K$ *et* $t-s < \delta$,

$$|f(t)-f(s)| \leq (2(t-s) \log \log (\frac{1}{t-s}))^{1/2}.$$

Alors f *est polaire pour* W.

PREUVE : Il suffit de montrer, pour $0 < a < b$,

$$P[\exists\, t \in [a,b] : W_t = f(t)] = 0.$$

Nous établirons cette dernière égalité dans le cas particulier $a = 1$, $b = 2$. Pour tout $t \geq 1$ la densité de la loi de $W_t - f(t)$ est majorée par $(2\pi)^{-1}$. On en

---

(*) UNIVERSITE P. & M. CURIE - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - F. 75252 PARIS CEDEX 05

déduit immédiatement, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E[\int_1^3 I(|W_s - f(s)| < \varepsilon)\, ds] \leq 2.(2\pi)^{-1}\pi\varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

Posons $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 1 \; ; \; |W_t - f(t)| < \varepsilon\}$ et remarquons que :

$$E[\int_1^3 I(|W_s - f(s)| < \varepsilon)\, ds] \geq P[T_\varepsilon \leq 2].E[\int_{T_\varepsilon}^{T_\varepsilon+1} I(|W_s - f(s)| < \varepsilon)\, dx \; / \; T_\varepsilon \leq 2].$$

Appliquons la propriété de Markov au temps T_ε. Soient $t \in [1;2]$ et $w_o \in \mathbb{R}^2$ tel que $|w_o - f(t)| \leq \varepsilon$:

$$E[\int_{T_\varepsilon}^{T_\varepsilon+1} I(|W_s - f(s)| < \varepsilon)\, ds / T_\varepsilon = t,\; W_{T_\varepsilon} = w_o]$$

$$= \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^2} (2\pi s)^{-1} \exp(-|w|^2/2s) I(|w_o + w - f(t+s)| < \varepsilon)\, dw$$

$$\geq (2\pi)^{-1} \int_\varepsilon^1 \frac{ds}{s} (\pi\varepsilon^2) \exp(-(2\varepsilon + |f(t+s) - f(t)|)^2/2s)$$

$$\geq \frac{1}{2} \exp(-2\varepsilon - 4M)\, \varepsilon^2 \int_\varepsilon^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)}$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé l'hypothèse du théorème et noté M une constante majorant $|f|$ sur $[0;3]$. En mettant bout à bout les inégalités ainsi obtenues on trouve, pour une certaine constante $C > 0$ et pour tout $\varepsilon \in [0;\delta]$

$$\varepsilon^2 \geq P[T_\varepsilon \geq 2].C\varepsilon^2 \int_\varepsilon^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)}$$

d'où :
$$P[T_\varepsilon \leq 2] \leq (C \int_\varepsilon^\delta \frac{ds}{s \log(1/s)})^{-1} .$$

En faisant tendre ε vers 0 on trouve le résultat voulu. □

<u>REMARQUES</u>. (i) La méthode de preuve ci-dessus donne aussi des renseignements sur la probabilité que $|W_t - f(t)|$ prenne des petites valeurs. Dans le cas particulier où f est höldérienne d'exposant $1/2$ on obtient aisément, pour une certaine constante $C > 0$,

$$P[\inf\{|W_t-f(t)| \; ; \; 1 \leq t \leq 2\} < \varepsilon] \leq C \, (\log \tfrac{1}{\varepsilon})^{-1}$$

Remarquons que même dans le cas où f est constante on ne peut pas améliorer cette inégalité : voir Spitzer [4] (lemma 1), ou Le Gall [2] pour des arguments proches de la démonstration ci-dessus.

(ii) Soient $B = (X,Y,Z)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Des arguments semblables à ceux de la preuve du théorème 1 permettent d'estimer la probabilité que $|(X_t,Y_t) - g(Z_t)|$ prenne des petites valeurs, ou, en d'autres mots, la probabilité que le mouvement brownien B s'approche de la courbe $(x,y) = g(z)$ (voir [3]).

(iii) Yor [5] a montré que les fonctions à variation finie sur les compacts sont polaires : l'idée de la preuve est d'utiliser le calcul stochastique pour étudier la semi-martingale $\log |W_t-f(t)|$.

2. Supposons maintenant que W est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 3$. On peut encore définir une notion de fonction polaire pour W et on a l'analogue suivant du théorème 1.

<u>THEOREME 2</u>. <u>Supposons que</u> $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ <u>vérifie, pour tout</u> $K > 0$,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq K \\ t-s<\delta}} \frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^{1/d}} = 0.$$

<u>Alors</u> f <u>est polaire pour</u> W.

<u>PREUVE</u> : On écrit d'abord, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E[\int_1^3 I(|W_s-f(s)| \leq 3\varepsilon) \, ds] \leq C_d \, \varepsilon^d.$$

Comme précédemment, on définit

$$T_\varepsilon = \inf\{t \geq 1 \; ; \; |W_t-f(t)| < \varepsilon\} ,$$

et on remarque que, pour $t \in [1;2]$ et pour $w_o \in \mathbb{R}^d$ tel que $|w_o-f(t)| \leq \varepsilon$,

$$E\left[\int_{T_\varepsilon}^{T_\varepsilon+1} I(|W_s-f(s)| \leqq 3\varepsilon)\, ds / T_\varepsilon = t,\ W_{T_\varepsilon} = w_o\right]$$

$$= \int_0^1 ds\ P_o[|w_o+W_s-f(t+s)| \leqq 3\varepsilon]$$

$$\geqq \int_0^{n\varepsilon^d} ds\ P_o[|W_s| \leqq \varepsilon]\ ,$$

où pour écrire la dernière inégalité on choisit $n \geqq 1$ puis ε suffisamment petit (en fonction de n) de façon que les inégalités $0 \leqq s < t \leqq 3$ et $t-s < n\ \varepsilon^d$ entraînent $|f(t)-f(s)| < \varepsilon$. On trouve finalement que, toujours pour ε assez petit, on a :

$$C_d\ \varepsilon^d \geqq \frac{1}{2}\ n\ \varepsilon^d\ P[T_\varepsilon \leqq 2]$$

d'où $P[T_\varepsilon \leqq 2] \leqq 2\ C_d/n$. Comme n est arbitraire on obtient que $\lim_{\varepsilon\to 0} P[T_\varepsilon \leqq 2] = 0$, d'où aisément le résultat du théorème. □

REMARQUE. Par analogie avec les résultats de Graversen pour le mouvement brownien plan il serait intéressant de montrer que pour tout $\alpha < 1/d$ il existe des fonctions höldériennes d'exposant α qui ne sont pas polaires.

REFERENCES

[1] GRAVERSEN, S.E : "Polar" - Functions for Brownian Motion. Z. Wahrsch. verw - Gebiete 61, 261-270 (1982).

[2] LE GALL, J.F : Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Ann. Probab. 14, 1219-1244 (1986).

[3] LE GALL, J.F et YOR, M : Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. Preprint (1987).

[4] SPITZER, F : Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 187-197 (1958).

[5] YOR, M : Les fonctions continues à variation bornée sont polaires pour le mouvement brownien plan. Manuscrit non publié.