SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une surmartingale limite de martingales continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 138-140
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__138_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

UNE SURMARTINGALE LIMITE DE MARTINGALES CONTINUES

par P.A. Meyer

Cette note répond à une question qu'a posée Emery à propos de martingales dans les variétés. Que les âmes inquiètes se rassurent! Nous ne nous occuperons pas ici de géométrie, et les processus seront comme d'habitude à valeurs réelles. Le problème est le suivant : Si une suite de martingales locales continues converge (hors d'un ensemble évanescent) vers une semimartingale continue, cette limite est-elle toujours une martingale locale?

La réponse est négative, voici comment on peut fabriquer un contre-exemple.

Le problème consiste à construire des martingales locales (Y_t^n) convergeant simplement vers un processus (Y_t) qui est une semimartingale, mais n'est plus une martingale locale. L'idée la plus naturelle consiste à prendre des processus Y_t^n, Y_t de la forme $f^n(B_t)$, $f(B_t)$, où (B_t) est un mouvement brownien à d dimensions, et les f^n sont des fonctions surharmoniques, plus précisément des potentiels (newtoniens ou logarithmiques, suivant la valeur de d) $f^n = U\mu_n$, et de même $f = U\mu$. Dire que les Y_t^n sont des martingales locales revient alors à dire que chaque μ_n est portée par un ensemble polaire, et bien entendu cette propriété ne doit plus être vraie pour μ. A nouveau, l'idée qui s'impose consiste à prendre pour (μ_n) une suite de mesures à support fini, convergeant étroitement vers μ. On peut supposer toutes ces mesures portées par un même compact de $\mathbb{R}^d$. Alors un peu de théorie du potentiel élémentaire montre que

1) On a $U\mu \leq \liminf_n U\mu_n$ en tout point x (en dimension $d \geq 3$, le noyau newtonien est positif et continu; en dimension 2, il faut se placer sur une boule contenant les supports des μ_n et le point x, et ajouter une constante au noyau logarithmique pour le rendre positif).

2) Pour toute mesure $\nu \geq 0$, à support compact et admettant un potentiel continu $U\nu$, on a $\langle \nu, U\mu_n\rangle = \langle U\nu, \mu_n\rangle \to \langle U\nu, \mu\rangle = \langle \nu, U\mu\rangle$ (convergence étroite des μ_n vers μ). Mais soit f borélienne comprise entre 0 et 1 : $f\nu$ a aussi un potentiel continu (la somme de deux fonctions s.c.i. positives $U(f\nu)$ et $U\big((1-f)\nu\big)$ étant continue, chacune d'elles doit l'être; pour $d = 2$ prendre la même précaution

que ci-dessus). Il en résulte que $U\mu_n$ converge vers $U\mu$ dans la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ associée à ν. Mais ceci entraîne la convergence *forte* dans $L^1(\nu)$, si l'on tient compte de 1) (voir par exemple Probabilités et Potentiel II.26).

3) On peut montrer que toute mesure $\lambda \geq 0$ qui ne charge pas les ensembles polaires est équivalente à une mesure ν ayant un potentiel continu (dans le cas où $d = 2$, se limiter aux mesures à support compact). On en déduit que les $U\mu_n$ convergent vers $U\mu$ *en mesure* sous λ. Du point de vue des processus, cela entraîne que les v.a. Y_T^n convergent vers Y_T en mesure *pour toute v.a. positive* T (la loi de B_T ne chargeant pas les ensembles polaires).

Pour obtenir la convergence des $U\mu_n$ vers $U\mu$ partout, ou du moins hors d'un ensemble polaire, nécessaire pour que les Y^n convergent simplement vers Y hors d'un ensemble évanescent, il faut se tourner vers l'étude d'une situation concrète. La plus simple est celle où d vaut 2, μ est la loi uniforme sur le cercle unité, et $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_k \varepsilon_{\omega_k}$ la loi uniforme sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, qui est l'approximation discrète de μ la plus évidente. On a alors

$$f_n(z) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log|z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}| = -\frac{1}{n}\log|z^n - 1| \;,$$

et tout se passe bien en dehors du cercle lui-même : pour $|z| \neq 1$, $f_n(z)$ tend vers le potentiel $f(z) = -\log(1 \vee |z|)$ de μ (c'est un fait général : hors d'un compact portant μ et les μ_n, tout est harmonique localement borné inférieurement, et la convergence est excellente). Mais que se passe t'il sur le cercle lui-même? Posant $z = e^{i\theta}$, on est ramené à se demander si $\sqrt[n]{\sin^2 n\theta/2}$ converge vers 1 quasi-partout sur le cercle (ou si cette propriété a lieu, du moins, le long d'une suite n_k convenable). Le moins fatigant est de laisser cette question à nos collègues spécialistes des ensembles exceptionnels et des séries lacunaires, et de chercher d'autres manières d'approcher la loi uniforme sur le cercle que par des subdivisions régulières fixes : on pourrait par exemple faire tourner un peu les subdivisions régulières, ou encore jeter des points au hasard, etc... La solution qui nécessite le moins de calculs est probablement celle qui consiste à choisir des mesures μ_n non portées par le cercle : si l'on pose

$$f_n(z) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log|z - r_n e^{i\frac{2k\pi}{n}}| = -\frac{1}{n}\log|z^n - r_n^n| \;,$$

où $(r_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $r_n \to 1$ et $r_n^n \to 0$ (par exemple $r_n = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$), il est tout-à-fait élémentaire de vérifier que la convergence de $f_n(z)$ vers $f(z) = -\log(1 \vee |z|)$ a maintenant lieu partout.

Les martingales locales $f_n(B_t)$ construites ci-dessus ne sont pas de vraies martingales. En effet, si X_t est un mouvement brownien plan issu de $a \neq 0$, la martingale locale $\log|X_t|$ ne pourrait être une vraie martingale qu'à la condition nécessaire (et aussi suffisante, comme il résulte de la propriété de Markov) que l'on ait $E[\log|X_t|] = \log|a|$; mais cette espérance, qui vaut

$$\iint \frac{1}{2\pi t}\, e^{-\frac{(x-|a|)^2+y^2}{2t}} \log\sqrt{x^2+y^2}\; dx\, dy\ ,$$

ne tend manifestement pas vers $-\infty$ quand a tend vers l'origine.

Par arrêt, il n'est cependant pas difficile de transformer les Y^n en vraies martingales. On peut pour cela invoquer l'existence d'une suite de temps d'arrêt qui les réduisent toutes simultanément, mais il est presque aussi simple d'effectuer une construction explicite : Si B désigne maintenant un mouvement brownien complexe issu de l'origine et arrêté au premier instant où son module vaut 2, il existe, pour chaque n, un $\varepsilon_n > 0$ tel que la probabilité $P[\exists t\, \exists k\ |B_t - r_n e^{i\frac{2k\pi}{n}}| < \varepsilon_n]$ qu'a B de passer très près de l'un des pôles de f_n soit plus petite que 2^{-n-1}. Le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t\ :\ \exists n\, \exists k\ |B_t - r_n e^{i\frac{2k\pi}{n}}| < \varepsilon_n\}$$

vérifie $P[T < \infty] \leq \sum_n 2^{-n-1} = \frac{1}{2}$, de sorte que les martingales continues et *bornées* $f_n(B^T)$ ont pour limite la surmartingale négative $f(B^T)$ qui, nulle en zéro mais non identiquement nulle, ne saurait être une martingale locale.