MAURIZIO PRATELLI

Intégration stochastique et géométrie des espaces de Banach

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 129-137

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__129_0>

INTEGRATION STOCHASTIQUE ET GEOMETRIE DES ESPACES DE BANACH

Maurizio Pratelli
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa.
56100 PISA Italie

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Si $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ sont deux espaces de Hilbert séparables, on sait construire l'intégrale stochastique $\int X_s dM_s$, où M est une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{H}$ et X un processus prévisible (borné) à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{K})$ (voir [2]) ; mais si l'on veut remplacer $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ par deux espaces de Banach, on rencontre des difficultés. Les deux exemples qui suivent (dont le premier est dû à Yor, voir [4]) mettent en évidence ces difficultés: ils seront repris et interprétés dans le paragraphe suivant.

Exemple 1.1 Soit $(B_t)_{0\le t\le 1}$ un mouvement brownien réel: on sait que, pour tout p avec $1\le p<2$, il existe une suite t_n décroissant vers 0 telle que $\sum_n |B_{t_n} - B_{t_{n+1}}|^p = +\infty$ p.s. Considérons le processus prévisible borné, à valeurs dans l'espace ℓ^p, $H(\omega,s) = \sum_n I_{]t_{n+1},t_n]}(s).e_n$ (où e_n est l'élément de la base canonyque de ℓ^p) : l'integrale $\int H_s dX_s$, s'il existe, ne peut raisonnablement être que $\sum_n (B_{t_n} - B_{t_{n+1}}).e_n$, mais cette définition n'a pas de sens car $\sum_n |B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega)|^p = +\infty$ p.s.

Par contre, si $p\ge 2$ et $H(\omega,s)=\sum_n H_n(\omega,s).e_n$ est prévisible borné à valeurs dans ℓ^p, en définissant $\int H_s dB_s = \sum_n \left(\int H_{n,s} dB_s\right) e_n$ on vérifie (à l'aide des inégalités de Burkholder) que l'on a

$$\mathbb{E}\left[\left\|\int_{]0,t]} H_s dB_s\right\|^p_{\ell^p}\right] = \sum_n \mathbb{E}\left[\left|\int_{]0,t]} H_{n,s} dB_s\right|^p\right]$$

$$\le c_p \sum_n \mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,t]} H^2_{n,s}\, ds\right)^{p/2}\right] \le c_p \sum_n \mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,t]} |H_{n,s}|^p ds\right) t^{p/2-1}\right]$$

$$= c_p\, t^{p/2-1}\, \mathbb{E}\left[\int_{]0,t]} \| H_s \|^p_{\ell^p} ds\right]$$

Cette inégalité permet d'étendre l'intégration à des processus prévisibles de type plus général

Exemple 1.2 Si M est une martingale de carré intégrable à valeurs dans un espace de Hilbert, on a $\mathbb{E}[\ \|M_t-M_s\|^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\ \|M_t\|^2-\|M_s\|^2\ |\mathcal{F}_s]= \mathbb{E}[\ \langle M\rangle_t- \langle M\rangle_s|\mathcal{F}_s]$ (où $\langle M\rangle_t$ est le processus croissant prévisible associé à la sousmartingale positive $\|M_t\|^2$). Considérons encore une suite t_n décroissant vers 0 et la martingale (à valeurs dans ℓ^p, avec p>2) $\quad M_t= \sum_n\left(B_{t_n\wedge t} - B_{t_{n+1}\wedge t}\right).[n(t_n-t_{n+1})]^{-1/2}.e_n$

On vérifie facilement que

$\sup_t \mathbb{E}[\ \|M_t\|^2_{\ell^p}\ ] = \mathbb{E}[\ \|M_1\|^2_{\ell^p}] \le \mathbb{E}[\ \|M_1\|^p_{\ell^p}\ ]^{2/p}$

$= \left[\sum_n \mathbb{E}[\ |B_{t_n}-B_{t_{n+1}}|^p].n^{-p/2}.(t_n-t_{n+1})^{-p/2}\right]^{2/p}$

$= \left[\sum_n c_p.n^{-p/2}\right]^{2/p} < +\infty$. Par contre

$\sum_n \mathbb{E}[\ \|M_{t_n}-M_{t_{n+1}}\|^2_{\ell^p}] = \sum_n \mathbb{E}[\ |B_{t_n}-B_{t_{n+1}}|^2\ n^{-1}(t_n-t_{n+1})^{-1}] =$

$= \sum_n n^{-1} = +\infty$: pour la martingale de carré intégrable M, il n'existe donc pas un processus croissant prévisible A tel que l'on ait $\mathbb{E}[\ \|M_t-M_s\|^2|\mathcal{F}_s] \le \mathbb{E}[\ A_t-A_s|\mathcal{F}_s]$.

Supposons fixé un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ satisfaisant aux hypothèses habituelles de [1] et [2]. Nous indiquerons par $\mathbb{F},\mathbb{G}$..des espaces de Banach séparables: si $x \in \mathbb{F}$, nous indiquerons sa norme par $|x|_{\mathbb{F}}$ (et aussi $|x|$ s'il n'y a pas danger de confusion). Nous supposerons que tous les espaces de Banach considerés possèdent la *propriété de Radon-Nikodym* (tout dual séparable d'un espace de Banach a cette propriété): si M est une martingale de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{F}$, il existe (p.s. et dans L^2) $M_\infty=\lim_{t\to\infty}M_t$ (voir [3] pag.112). On peut donc confondre une martingale de carré intégrable avec sa v.a. terminale et identifier l'espace des martingales de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{F}$ avec $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{F})$.

Rappelons que toute martingale a une version à trajectoires c.à.d.l.à.g. (on peut en effet appliquer les inégalités de Doob à la sous-martingale $|M_t|_{\mathbb{F}}$) et dans la suite nous ne considérerons que des versions à trajectoires régulières.

Un espace de Banach $\mathbb{F}$ est dit *p-convèxe* ($2 \le p < +\infty$) s'il existe une constante $L>0$ telle que l'on ait, pour tout $x,y \in \mathbb{F}$

$$|x+y|_{\mathbb{F}}^p + |x-y|_{\mathbb{F}}^p \ge 2\ |x|_{\mathbb{F}}^p + L\ |y|_{\mathbb{F}}^p .$$

$\mathbb{F}$ est dit *p-lisse* ($1<p\le 2$) s'il existe C telle que

$$|x+y|_{\mathbb{F}}^p + |x-y|_{\mathbb{F}}^p \le 2\ |x|_{\mathbb{F}}^p + C\ |y|_{\mathbb{F}}^p .$$

Les espaces de Hilbert sont évidemment 2-convexes et 2-lisses; les espaces p-convexes ou p-lisses sont réflexifs (ils ont donc la propriété de Radon-Nikodym). Rappelons encore que les espaces L^p (pour $1<p<+\infty$) sont $\max(2,p)$-convexes et $\min(2,p)$-lisses.

Par abus de language nous dirons qu'un espace $\mathbb{F}$ est p-convexe (p-lisse) s'il existe sur $\mathbb{F}$ une norme équivalente qui soit p-convexe (p-lisse).

2. INTEGRATION PAR RAPPORT AUX MARTINGALES DE CARRE INTEGRABLE.

Toutes les martingales considérées seront supposées nulles en 0.

Définition 2.1 Soit $M \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{F})$: on dit que M est *contrôlée* par A (et on écrit $M \ll A$) si A est un processus croissant prévisible intégrable tel que l'on ait, pour tout $s<t$, $\mathbb{E}\left[\ |M_t-M_s|_{\mathbb{F}}^2\ |\mathcal{F}_s\right] \le \mathbb{E}\left[\ A_t-A_s\ |\mathcal{F}_s\right]$.

Nous désignerons par $\mathcal{M}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P};\mathbb{F})$ (ou plus simplement par $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$) l'espace des martingales contrôlées à valeurs dans $\mathbb{F}$; posons $S(M) = \inf \mathbb{E}\left[A_\infty\right]^{1/2}$, où la borne inférieure est prise sur tous les processus A qui contrôlent M. Etant donnés $a\ge 0$, $b\ge 0$ et $\varepsilon>0$, on a $(a+b)^2 \le (1+\varepsilon)^2 a^2 + (1+1/\varepsilon)^2 b^2$, et donc , si $M \ll A$ et $N \ll B$:

$\mathbb{E}\left[\ |(M_t+N_t)-(M_s+N_s)|_{\mathbb{F}}^2\ |\mathcal{F}_s\right] \le (1+\varepsilon)^2\ \mathbb{E}\left[\ A_t-A_s\ |\mathcal{F}_s\right] +$ $+ (1+1/\varepsilon)^2\ \mathbb{E}\left[\ B_t-B_s\ |\mathcal{F}_s\right]$; par conséquent $S(M+N) \le (1+\varepsilon)S(M)$ $+ (1+1/\varepsilon)S(N)$. Les ensembles $\mathcal{U}_n=\{\ M\ |\ S(M)<1/n\ \}$ forment donc un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$: muni de cette topologie, $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ est métrisable et complet (on remarquera que, si M^n est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$, alors M_t^n est de Cauchy dans $L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P};\mathbb{F})$ pour tout t).

Proposition 2.2 *Supposons que $\mathbb{F}$ soit 2-convexe. L'espace $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ est alors isométrique à $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{F})$, de sorte que toute martingale de carré intégrable est dominée.*

Démonstration Si $\mathbb{F}$ est 2-convexe, il existe (voir [6] pag.253) une constante C telle que, pour $s<t$
$\mathbb{E}\left[|M_t-M_s|_{\mathbb{F}}^2 \;|\mathcal{F}_s\right] \le C.\mathbb{E}\left[|M_t|_{\mathbb{F}}^2 - |M_s|_{\mathbb{F}}^2 \;|\mathcal{F}_s\right]$: par conséquent M est contrôlée par $C.\langle M\rangle$, où $\langle M\rangle_t$ est le processus croissant prévisible associé à $|M_t|_{\mathbb{F}}^2$. On a donc
$C^{-1/2}\, S(M) \le \mathbb{E}\left[|M_\infty|_{\mathbb{F}}^2\right]^{1/2} \le S(M)$.

■

Théorème 2.3 *Supposons que $\mathbb{F}$ possède la propriété suivante: quelle que soit la filtration, toute martingale M de $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{F})$ est un élément de $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$. L'espace $\mathbb{F}$ est alors 2-convexe.*

Démonstration Fixons une filtration, soit $u=(t_1,..,t_n)$ une partie finie croissante de $\mathbb{R}^+$ et soit
$T_u(M) = (M_{t_1}, M_{t_2}-M_{t_1},..,M_{t_n}-M_{t_{n-1}},0,0,..)$. Les opérateurs T_u sont définis sur $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{F})$ à valeurs dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\ell^2(\mathbb{F}))$: remarquons que $\|T_u(M)\|^2 = \mathbb{E}\left[|M_{t_1}|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=2}^n |M_{t_i}-M_{t_{i-1}}|_{\mathbb{F}}^2 \right]$. On a par hypothèse $\sup_u\|T_u(M)\| < +\infty$ pour tout M: le théorème de Banach-Steinhaus assure alors que $\sup_u\|T_u\| < +\infty$, c'est-à-dire qu'il existe K telle que l'on ait, pour tout u,
$\mathbb{E}\left[|M_{t_1}|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=2}^n |M_{t_i}-M_{t_{i-1}}|_{\mathbb{F}}^2\right] \le K.\mathbb{E}\left[|M_\infty|_{\mathbb{F}}^2 \right]$. On peut alors appliquer le théorème 3.1 de [7] qui prouve que $\mathbb{F}$ est 2-convexe.

■

Les énoncés 2.2 et 2.3 permettent d'interpréter l'exemple 1.2.

Soit maintenant M une martingale à valeurs dans $\mathbb{F}$ contrôlée par A, $\mathbb{G}$ un autre espace de Banach et soit H prévisible élémentaire, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$, de la forme
$H(s,\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} I_{]t_i,t_{i+1}]}(s)H_i(\omega)$, avec H_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable borné. On peut définir $(H.M)_t = \int_{]0,t]} H_s dM_s =$
$= \sum_{i=1}^{n-1} H_i\circ\left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}\right)$: il est évident que H.M est une martingale à valeurs dans $\mathbb{G}$. (Dans ce paragraphe, nous désignerons par $\|\cdot\|$ la norme dans $\mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$).

Proposition 2.4 *Supposons que* $\mathbb{G}$ *soit 2-lisse. Il existe alors une constante* C *ne dépendant que de* $\mathbb{G}$ *telle que* $\mathbb{E}\left[\, |(H.M)_\infty|^2_{\mathbb{G}}\right] \leq C.\mathbb{E}\left[\int_{]0,+\infty]} \|H_s\|^2\, dA_s\right]$. *Plus généralement,* (H.M) *est contrôlée par* $C.\int_{]0,t]} \|H_s\|^2\, dA_s$.

Démonstration Il existe (voir [7] pag.336) une constante C telle que $\mathbb{E}\left[\, |\Sigma_i H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})|^2_{\mathbb{G}}\,\right] \leq C.\Sigma_i \mathbb{E}\left[|H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})|^2_{\mathbb{G}}\right]$.

Ce dernier terme est majoré par $C.\Sigma_i \mathbb{E}\left[\, \|H_i\|^2 \cdot |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2_F\,\right] \leq$

$\leq C.\Sigma_i \mathbb{E}\left[\, \|H_i\|^2 (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})\right] = C.\mathbb{E}\left[\int_{]0,+\infty]} \|H_s\|^2\, dA_s\right]$; ceci prouve la première assertion. La deuxième en découle immédiatement

■

La proposition précédente permet de prolonger l'integrale stochastique aux processus fortement prévisibles tels que $\mathbb{E}\left[\int_{]0,+\infty]} \|H_s\|^2\, dA_s\right] < +\infty$.

Théorème 2.5 *Supposons que, pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe* $\delta>0$ *tel que, si* H *est prévisible élémentaire à valeurs dans* $\mathbb{G}$ *et* $\mathbb{E}\left[\int_{]0,+\infty]} |H_s|^2\, ds\,\right] < \delta$, *alors* $\mathbb{P}\left(\, |\int_{]0,+\infty]} H_s dB_s| > \varepsilon\,\right) < \varepsilon$ *où* B *est le mouvement Brownien réel. L'espace* $\mathbb{G}$ *est alors 2-lisse.*

Démonstration Un théorème de Pisier perfectionné par Rosinski (voir [9] pag.165) affirme que, pour prouver que $\mathbb{G}$ est 2-lisse, il suffit de montrer que toute martingale de Walsh-Paley à valeurs dans $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{E}\left[\, \Sigma_n |M_n - M_{n-1}|^2_{\mathbb{G}}\,\right] < +\infty$ converge en probabilité (les martingales de Walsh-Paley sont les martingales de la forme $M_n = \Sigma_{k=1}^n\ g_k(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\varepsilon_k$, où $\varepsilon_1,\varepsilon_2,..$est une suite de variables de Bernoulli indépendantes et g_k est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans $\mathbb{G}$).

Considérons la suite de temps d'arrêt intégrables $T_0=0$, $T_n = \inf\left\{ s>T_{n-1} :\ |B_s - B_{T_{n-1}}| = 1 \right\}$ et posons $\alpha = \mathbb{E}\left[\, T_n - T_{n-1}\right]$. Les variables $\varepsilon_n = (B_{T_n} - B_{T_{n-1}})$ forment une suite de variables de Bernoulli indépendantes, et les martingales de Walsh-Paley peuvent être représentées sous la forme $M_n = \int_{]0,T_n]} H_s dB_s$, où

$H(s,\omega) = \sum_n I_{]T_{n-1},T_n]}(s,\omega)\ H_{n-1}(\omega)$ et
$H_n = g_n(B_{T_1}, B_{T_2}-B_{T_1},..,B_{T_n}-B_{T_{n-1}})$. Remarquons que
$\mathbb{E}[\ \sum_n\ |M_n-M_{n-1}|_a^2] = \mathbb{E}[\ \sum_n\ |H_n|_a^2\ ] = \alpha^{-1}\mathbb{E}[\ \sum_n\ |H_n|_a^2(T_{n+1}-T_n)\ ]$
$= \alpha^{-1}\mathbb{E}[\ \int_{]0,+\infty]} |H_s|_a^2\ ds\ ]$, et l'hypothèse du théorème assure la convergence en probabilité de la suite M_n. ■

Les énoncés 2.4 et 2.5 permettent d'interpréter l'exemple 1.1.

La construction de l'integrale stochastique peut ensuite être étendue par les méthodes usuelles (voir [1] et [2]): on peut ainsi intégrer un processus H prévisible localement borné à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$ par rapport à un processus de la forme $X_s=X_0+M_s+V_s$, où les trajectoires de V sont à variation bornée et M appartient localement à l'espace $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$.

3. UNE INEGALITE DU TYPE METIVIER-PELLAUMAIL ET SES CONSEQUENCES.

Soit $M \in \mathcal{M}^2(\mathbb{F})$contrôlée par A , et soient $s=t_1<..<t_n=t$: on a $\mathbb{E}[\ \sum_i |M_{t_{i+1}}-M_{t_i}|^2|\mathscr{F}_s] \le \mathbb{E}[\ A_t-A_s\ |\mathscr{F}_s]$. Il en résulte que le processus croissant $\sum_{s\le t}|\Delta M_s|^2$ est intégrable: soit T_1,T_2.. une suite de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints qui porte les discontinuités prévisibles de M et soit $B_t=\sum_n|\Delta M_{T_n}|^2.I_{\{t\ge T_n\}}$.. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant:

Théorème 3.1 *Si l'espace* $\mathbb{F}$ *est 2-lisse, il existe une constante* C *(qui ne depend que de* $\mathbb{F}$*) telle que l'on ait* $\mathbb{E}[\ \sup_{0\le s<T}|M_s|^2] \le C.\mathbb{E}[\ A_{T-}+B_{T-}]$ *pour tout temps d'arrêt* T.

Cette inégalité permet d'appliquer à l'intégrale définie dans le paragraphe précédent les méthodes developpées dans [2] pour les semimartingales hilbertiennes. Supposons en effet que H soit prévisible élémentaire à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$ et que $\mathbb{G}$ (mais pas forcément $\mathbb{F}$) soit 2-lisse. La martingale $(H.M)_t$ est contrôlée par $\int_{]0,t]}\|H_s\|^2\ dA_s$. De plus on a $|\Delta_t(H.M)|$ = $= |H_t\circ\Delta M_t| \le \|H_t\|.|\Delta M_t|$; et par conséquent

$$\mathbb{E}[\sup_{0<t<T} |\int_{]0,t]} H_s dM_s|_G^2] \le C.\mathbb{E}[\int_{]0,T[} \|H_s\|^2 d(A_s+B_s)]$$

Plus généralement, pour un processus X de la forme $X_t=X_0+M_t+V_t$ on prouve, exactement comme dans le cas Hilbertien, l'existence d'un processus croissant adapté C tel que $\mathbb{E}[\sup_{0<t<T} |\int_{]0,t]} H_s dX_s|_G^2] \le \mathbb{E}[C_{T-}.\int_{]0,T[} \|H_s\|^2 dC_s]$.

Cela permet d'éténdre au cas des processus à valeurs dans des espaces de Banach la théorie des equations différentielles stochastiques developpée dans [2] ch.8.

La démonstration du théorème 3.1 est précédée par quelques lemmes. Dans tout ce paragraphe on suppose que l'espace $\mathbb{F}$ est 2-lisse. On designe en outre par C une constante qui peut changer de ligne en ligne mais qui ne dépend que de $\mathbb{F}$; enfin on dira que la martingale M est contrôlée par le processus croissant prévisible A s'il existe une constante C telle que $M_t \ll C.A_t$.

Lemme 3.2 *Soit S un temps d'arrêt,* $A \in \mathcal{F}_S$, $\mathcal{G}$ *la tribu engendrée par* $\mathcal{F}_{S-}$ *et A et soit Z une variable* $\mathcal{G}$*-mesurable à valeurs dans* $\mathbb{F}$ *telle que* $\mathbb{E}[Z \,|\mathcal{F}_{S-}] =0$: *on a alors (si* $B=A^c$)

$$\mathbb{E}[|Z|^2 I_B] \le \mathbb{E}[I_A.\mathbb{E}[|Z|^2|\mathcal{F}_{S-}]]$$

Démonstration Le résultat est connu dans le cas où Z est réelle (voir [2] pag.131). On peut écrire $Z=XI_A+YI_B$ avec X,Y $\mathcal{F}_{S-}$-mesurables; soit Y' à valeurs dans $\mathbb{F}'$, $\mathcal{F}_{S-}$-mesurable et telle que $|Y'|_{\mathbb{F}'}\le 1$: la variable réelle $\langle Y',Z\rangle$ vérifie les hypothèses, de sorte que l'on a $\mathbb{E}[\langle Y',Y\rangle^2 I_B] = \mathbb{E}[\langle Y',Z\rangle^2 I_B] \le \mathbb{E}[I_A \mathbb{E}[\langle Y',Z\rangle^2 |\mathcal{F}_{S-}]] \le \mathbb{E}[I_A \mathbb{E}[|Z|^2|\mathcal{F}_{S-}]]$. Pour tout $\varepsilon>0$, on peut facilement construire Y' à valeurs dans $\mathbb{F}'$, $\mathcal{F}_{S-}$-mesurable telle que $|Y'|\le 1$ et $\langle Y',Y\rangle^2 \ge |Y|^2-\varepsilon$: on obtient ainsi le résultat désiré.

■

Soit maintenant $T_1,T_2..$ une suite de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints et soit, pour tout n, H_n un élément de $L^2(\Omega,\mathcal{F}_{T_n},\mathbb{P};\mathbb{F})$ tel que $\mathbb{E}[H_n|\mathcal{F}_{T_n -}] = 0$. Désignons par M_t^n la martingale $H_n I_{\{t\ge T_n\}}$, par C_t^n le processus croissant $|H_n|^2 I_{\{t\ge T_n\}}$ et par $\tilde{C}_t^n$ sa projection duale prévisible (c'est-à-dire $\tilde{C}^n_t = \mathbb{E}[\,|H_n|^2|\mathscr{F}_{T_n-}]\cdot I_{\{t\geq T_n\}}$). Supposons enfin que $\sum_n \mathbb{E}[\,|H_n|^2] <+\infty$.

Lemme 3.3 *La série* $\sum_n M^n_t$ *converge dans* $\mathscr{M}^2(\mathbb{F})$ *et est contrôlée par* $\tilde{C}_t = \sum_n \tilde{C}^n_t$.

Démonstration. Si on considère un nombre fini de temps d'arrêt, on peut supposer $T_1\leq T_2..\leq T_n$.

Soit $A \in \mathscr{F}_s$: puisque l'ensemble $A\cap\{s<T_i\leq t\}$ appartient à $\mathscr{F}_{T_i-}$, les variables $H_i\cdot I_{A\cap\{s<T_i\leq t\}}$ sont les accroissements d'une martingale à temps discret. On peut alors appliquer l'inégalité 2.4 pag.336 de [7] et on obtient

$$\mathbb{E}[\,I_A|H_1 I_{\{s<T_1\leq t\}}+\,..+H_n I_{\{s<T_n\leq t\}}|^2] \leq$$

$$\leq C.\mathbb{E}[\,I_A\big(|H_1|^2 I_{\{s<T_1\leq t\}}+\,..+|H_n|^2 I_{\{s<T_n\leq t\}}\big)] \quad ;$$

c'est-à-dire $\mathbb{E}[\,|\sum_{k=1}^n M^k_t - \sum_{k=1}^n M^k_s|^2|\mathscr{F}_s] \leq$

$$\leq C.\mathbb{E}[\,\sum_{k=1}^n \big(C^k_t - C^k_s\big)|\mathscr{F}_s] = C.\mathbb{E}[\,\sum_{k=1}^n \big(\tilde{C}^k_t - \tilde{C}^k_s\big)\;|\mathscr{F}_s]\,.$$

On passe ensuite facilement à la limite. ∎

Lemme 3.4 *Soit* $M \in \mathscr{M}^2(\mathbb{F})$ *contrôlée par* A, *et supposons que* M *soit dépourvue de discontinuités prévisibles. La martingale* M *est alors contrôlée par* A^c_t *, où* A^c *est la partie continue du processus croissant* A.

Démonstration Rappelons la répresentation $A_t = A^c_t + \sum_n\big(\Delta A_{S_n}\big)\cdot I_{\{t\geq S_n\}}$, où S_n est une suite de temps d'arrêt prévisibles qui porte les discontinuités de A. Soit $S_{m,n}$ une suite qui annonce S_n, et considérons le processus prévisible, à valeurs dans $\mathbb{R} \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{F})$, $I_{]S_{m,n},S_n]}$: on a $\big(I_{]S_{m,n},S_n]}\cdot M\big)_t = M_{t\wedge S_n} - M_{t\wedge S_{m,n}}$, et, puisque $\Delta M_{S_n}=0$, à la limite $I_{[S_n]}\cdot M=0$. Donc $M_t = (H.M)_t$ où $H(t,\omega)=1-\sum_n I_{[S_n]}(t,\omega)$.

Il en résulte (voir 2.4) que M est contrôlée par le processus croissant $\int_{]0,t]} H^2_s\, dA_s = A^c_t$ ∎

Démonstration du théorème 3.1 Reprenons les notations introduites au début du paragraphe, et soit M^n_t la martingale $\Delta M_{T_n}\cdot I_{\{t\geq T_n\}}$: le lemme 3.2 assure que la série $\sum_n M^n_t$ converge dans $\mathscr{M}^2(\mathbb{F})$ et que $M^p_t = \sum_n M^n_t$ est contrôlée par $\tilde{B}_t$ (projection duale prévisible de B). On voit facilement que $\tilde{B}_t-\tilde{B}_s\leq A_t-A_s$ et donc $\hat{M}_t = M_t - M^p_t$ est dépourvue de discontinuités prévisibles et est contrôlée par A_t, donc aussi par A^c_t.

En appliquant l'inégalitée de Doob on a donc

(3.5) $\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le T}|\hat{M}_s|^2] \le 4.\mathbb{E}[|\hat{M}_T|^2] =$

$= 4\ \mathbb{E}[\ |\int_{]0,+\infty]} I_{[0,T]}(s)\ d\hat{M}_s|^2] \le C.E[\ A^c_T\ ] \le C.\mathbb{E}[\ A_{T-}\ ].$

Soient maintenant $A_n=\{T_n<T\}$, $\mathcal{G}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_{T_n-}$ et A_n et $H_n=\Delta M_{T_n} I_{\{T_n<T\}} + \mathbb{E}[\ \Delta M_{T_n}|\mathcal{G}_n].I_{\{T_n\ge T\}}$. On vérifie (comme dans [2] pag.131) que l'on a $\mathbb{E}[\ H_n|\mathcal{F}_{T_n-}\ ]=0$ et $\mathbb{E}[|H_n|^2|\mathcal{F}_{T_n-}\ ] \le \mathbb{E}[|\Delta M_{T_n}|^2|\mathcal{F}_{T_n-}\ ]$; en outre on trouve par le lemme 3.2 que $\mathbb{E}[|H_n|^2] \le \mathbb{E}[\ I_{\{T_n<T\}}(|\Delta M_{T_n}|^2+\mathbb{E}[|\Delta M_{T_n}|^2|\mathcal{F}_{T_n-}])]$.

Soit $N_t=\sum_n H_n I_{\{t\ge T_n\}}$: cette série converge (voir lemme 3.3) et coïncide avec M^p_t sur $[0,T[$. Si $\tilde{C}_t$ est defini comme dans 3.3, on a:

(3.6) $\mathbb{E}[\ \sup_{0\le t<T}|M^p_t|^2] = \mathbb{E}[\ \sup_{0\le t<T}|N_t|^2] \le$

$\le \mathbb{E}[\ \sup_{0\le t\le+\infty}|N_t|^2] \le 4.\mathbb{E}[\ |N_\infty|^2] \le 4.\mathbb{E}[\ \tilde{C}_\infty\ ] =$

$= 4.\mathbb{E}[\ \sum_n|H_n|^2] \le 4.\mathbb{E}[\ \sum_n I_{\{T_n<T\}}\ (|\Delta M_{T_n}|^2+\mathbb{E}[|\Delta M_{T_n}|^2|\mathcal{F}_{T_n-}])] =$

$= 4.\mathbb{E}[\ B_{T-} + \tilde{B}_{T-}\ ] \le 4.\mathbb{E}[\ B_{T-} + A_{T-}\ ].$

La conclusion résulte alors aussitôt de (3.5) et (3.6) ■

Bibliographie

[1] Dellacherie C. Meyer P.A. *Probabilités et Potentiel Vol.II* Hermann.Paris 1975

[2] Métivier M. *Semimartingales* W. de Gruyter Berlin NewYork 1982

[3] Neveu J. *Martingales à temps discret* Masson Paris 1972

[4] Yor M. *Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un Banach* C.R. Acad. Sc. Paris Ser.A 277 (1973) pp.467-469

[5] Diestel J. *Geometry of Banach Spaces* Lecture Notes in Mathematics 485 (1975) Springer Verlag

[6] Woyczynski W. *Geometry and Martingales in Banach Spaces* Winter School on Probability Lecture Notes in Mathematics 472 (1975) Springer Verlag

[7] Pisier G. *Martingales with values in uniformly convex spaces* Israel J. of Math. Vol.2 (1975) pp.326-350

[8] Dettweiler E. *Stochastic integral equations and diffusions on Banach Spaces* Prob. Theory on Vector Spaces III Lecture Notes in Mathematics 1080 (1983) Springer-Verlag

[9] Rosinski J. *Central limit theorems for dependent random vectors in Banach Spaces.* Lecture Notes In Mathematics 939 (1982) pp.157-181