PAUL-ANDRÉ MEYER

Éléments de probabilités quantiques (exposés IX et X)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 101-128

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__101_0>

Eléments de Probabilités quantiques. IX

CALCULS ANTISYMÉTRIQUES ET <<SUPERSYMÉTRIQUES>> EN PROBABILITÉS

Cet exposé présente les résultats principaux d'un article de Le Jan [6], et à travers celui-ci les idées de Dynkin dont Le Jan s'est inspiré en partie (Dynkin n'utilise que des espaces de Fock symétriques). En passant, nous regroupons divers résultats intéressants sur le cas antisymétrique, la supertrace, etc. Par rapport aux exposés précédents, on voit apparaître divers éléments nouveaux : l'utilisation du mouvement brownien complexe au lieu du mouvement brownien réel, et surtout le mélange de symétrique et d'antisymétrique, qui constitue (en un sens vague) le travail supersymétrique. Pour faciliter la lecture, nous commençons par des rappels.

I. CALCULS SYMÉTRIQUES

1. Nous allons travailler sur un mouvement brownien réel (X_t), ou un couple de deux mouvements browniens réels indépendants (X_t,Y_t), que nous considérerons aussi comme un mouvement brownien complexe en posant $Z_t=(X_t+iY_t)/\sqrt{2}$, $\overline{Z}_t=(X_t-iY_t)/\sqrt{2}$. Ces processus étant réalisés canoniquement sur l'espace de Wiener (noté Ω dans les deux cas), un élément de $L^2(\Omega)$ admet un développement en intégrales stochastiques multiples

$$(1)\quad f = \Sigma_{m,n} \int_{\substack{s_1<\dots<s_m\\ t_1<\dots<t_n}} \hat{f}_{mn}(s_1,\dots,s_m,t_1,\dots,t_n)dX_{s_1}\dots dX_{s_m}dY_{t_1}\dots dY_{t_n}$$

(cf. remarque en dernière page)

(le cas d'un seul m.br., déjà vu dans les exposés précédents, ne sera pas explicité). Plutôt que cette notation lourde, identifions le m-uple croissant $\{s_1<\dots<s_m\}$ à une partie à m éléments A de $\mathbb{R}_+$, l'ensemble de toutes ces parties étant noté $\mathcal{P}_m$, et la réunion des $\mathcal{P}_m$ étant notée $\mathcal{P}$. Nous obtenons alors la notation concise

$$(1')\quad f = \Sigma_{m,n} \int_{\mathcal{P}_m\times\mathcal{P}_n} \hat{f}_{mn}(A,B)dX_A dY_B = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}} \hat{f}(A,B)dX_A dY_B$$

avec

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}} |\hat{f}(A,B)|^2 dAdB$$

(si $A=\{s_1<\dots<s_m\}$, dA est une abréviation pour $ds_1\dots ds_m$). La fonction $\hat{f}\in L^2(\mathcal{P}\times\mathcal{P})$ est parfois appelée le <u>noyau</u> de f (et on oubliera parfois son ^). On a une représentation analogue dans laquelle l'élément différentiel $dX_A dY_B$ est remplacé par $d\overline{Z}_A dZ_B$, avec bien entendu un noyau différent. Nous utiliserons plutôt le couple $(\overline{Z},Z)$ dans cet exposé, mais il est nécessaire de garder à l'esprit les deux notations.

Revenons à (1). La forme traditionnelle de l'intégrale multiple d'Ito-Wiener fait intervenir, non pas $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$, mais $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$, avec une fonction $f_{mn}(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n)$ symétrique en chacun des deux groupes de variables. Pour que la représentation reste la même, on écrit alors

$$(2) \quad f = \Sigma_{m,n} \frac{1}{m!n!} \int_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n} \hat{f}_{mn}(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n) dX_{s_1}..dX_{s_m} dY_{t_1}..dY_{t_n}$$

le coefficient $1/m!n!$ assurant que la fonction symétrique $\hat{f}_{mn}$ est simplement le prolongement par symétrie de la fonction $\hat{f}_{mn}$ de (1). L'intégrale (2) ne comporte aucune contribution des diagonales $\{s_i=s_j\}$ ou $\{t_i=t_j\}$, et ceci est naturel, car la fonction $\hat{f}_{mn}$ est seulement assujettie à appartenir à L^2, et n'a donc pas de ≪ trace ≫ sur les diagonales, celles-ci étant de mesure nulle. Mais nous expliquons ailleurs dans ce volume (article de Hu-Meyer) que pour des noyaux suffisamment réguliers, on peut calculer les traces sur les diagonales, et les contributions de celles-ci à une intégrale du type de Stratonovitch, suivant les règles $dX_s dX_s=ds$, $dY_t dY_t=dt$ (les diagonales $s_i=t_j$ ne contribuent pas : $dX_s dY_s=0$) . Comme d'habitude pour une intégrale de Stratonovitch, les exigences de régularité sont plus fortes que pour une intégrale d'Ito, et les calculs algébriques sont plus simples. On en verra des exemples un peu plus bas.

Lorsqu'on utilise une représentation complexe, les règles de calcul des contributions diagonales sont modifiées : ici tout provient des diagonales $s_i=t_j$, les règles étant $d\overline{Z}_s d\overline{Z}_s = dZ_s dZ_s = 0$, $d\overline{Z}_s dZ_s = ds$.

2. Nous aurons affaire à deux multiplications des v.a. définies sous la forme (1') : le produit de Wick ou produit symétrique (noté o) et le produit de Wiener (noté sans signe de multiplication). Exprimons ces produits dans la représentation complexe. Soient

$$f = \int \hat{f}(A,B) d\overline{Z}_A dZ_B \quad , \quad g = \int \hat{g}(A,B) d\overline{Z}_A dZ_B$$

(intégrales sur $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$). Le noyau du produit $f\circ g=h$ (ou $fg=h$) est donné dans le premier cas (Wick) par

$$(3) \qquad \hat{h}(A,B) = \Sigma_{\substack{R+S=A \\ T+U=B}} \hat{f}(R,T)\hat{g}(S,U)$$

et dans le second cas (Wiener) par

$$(4) \qquad \hat{h}(A,B) = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}} dMdN \; \Sigma_{\substack{R+S=A \\ T+U=B}} \hat{f}(R+M,T+N)\hat{g}(S+N,T+M)$$

sous réserve que ces intégrales existent bien et que les noyaux ainsi définis appartiennent à L^2, mais en fait nous ne multiplierons que des v.a. très simples, et ces problèmes ne se poseront pas.

En pratique, comment multiplie t-on au sens de Wick ou de Wiener deux intégrales stochastiques d'Ito (diagonales exclues)

$$\int_{\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n} f_{mn}(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n)d\overline{Z}_{s_1}..d\overline{Z}_{s_m}dZ_{t_1}..dZ_{t_n}$$

et
$$\int_{\mathbb{R}_+^p\times\mathbb{R}_+^q} g_{pq}(u_1,..,u_p,v_1,..,v_q)d\overline{Z}_{u_1}..d\overline{Z}_{u_p}dZ_{v_1}..dZ_{v_q} \qquad ?$$

Le produit de Wick est tout simplement l'intégrale d'Ito

$$(5)\qquad \int_{\mathbb{R}_+^{m+p}\times\mathbb{R}_+^{n+q}} f_{mn}(s,t)g_{pq}(u,v)\quad \Pi d\overline{Z}_{s_i}d\overline{Z}_{u_j}dZ_{t_k}dZ_{v_\ell}\ ^{(1)}$$

diagonales exclues. Le produit de Wiener comporte des termes additionnels appartenant aux chaos d'ordre (m+p-1,n+q-1), (m+p-2,n+q-2)... correspondant aux coïncidences entre un s_i et un v_ℓ , ou entre un u_j et un t_k (les coincidences entre un s_i et un t_j , ou entre un u_k et un v_ℓ , ont été exclues dès le départ). Chaque coïncidence fait descendre le degré d'une unité en $\overline{Z}$ et une unité en Z, et le nombre total des coincidences est au plus $(m\wedge q)+(n\wedge p)$. En particulier, si m=q et n=p le produit de Wiener comporte un terme dans le chaos d'ordre (0,0), qui s'obtient en contractant au maximum, de toutes les manières possibles, les s_i et les v_ℓ , les t_j avec les u_k, et qui est l'espérance du produit de Wiener. Ces procédés combinatoires sont résumés dans la méthode des diagrammes utilisée par les physiciens, ou dans les formules (3),(4).

Si maintenant les deux intégrales étaient prises au sens de Stratonovitch (diagonales incluses), leur produit de Wiener serait simplement l'intégrale (5) diagonales incluses. Cela illustre bien la simplicité algébrique de l'intégrale de Stratonovitch.

Donnons un exemple concret de cela : soient $u_1,..,u_m$, $v_1,..,v_n$ des éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Posons $Z_{v_j}=\int v_j(s)dZ_s$ et $\overline{Z}_{u_i}=\int u_i(s)d\overline{Z}_s$. Le noyau du produit de Wick $\overline{Z}_{u_1}\circ..\circ\overline{Z}_{u_m}\circ Z_{v_1}\circ..\circ Z_{v_n}$ est donné, si $A = \{s_1<...<s_m\}$, $B = \{t_1<...<t_n\}$[1], par

$$(6)\quad h(A,B) = \Sigma_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_m\\ \tau\in\mathfrak{S}_n}} u_{\sigma(1)}(s_1)...u_{\sigma(m)}(s_m)v_{\tau(1)}(t_1)...v_{\tau(n)}(t_n)$$

($h(A,B)=0$ si $|A|\neq m$ ou $|B|\neq n$).

Calculons ensuite le produit de Wiener $\overline{Z}_{u_1}...\overline{Z}_{u_m}Z_{v_1}...Z_{v_n}$: c'est l'intégrale multiple diagonales incluses

$$\int_{\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n} u_1(s_1)..u_m(s_m)v_1(t_1)..v_n(s_n)d\overline{Z}_{s_1}..d\overline{Z}_{s_m}dZ_{t_1}..dZ_{t_n}$$

1. Noter que l'on a fait passer les $\overline{Z}_{u_k}$ sur les Z_{t_j} : il y a donc une commutativité que l'on a utilisée sans rien dire . Noter aussi que l'intégrande de (5) n'est pas symétrique : il faut le symétriser !

L'intégration sur l'ensemble $\{\forall i,j\ s_i \neq t_j\}$ fournit le produit de Wick $\bar{Z}_{u_1} \circ .. \bar{Z}_{u_m} \circ Z_{v_1} .. \circ Z_{v_n}$ déjà vu. Les ensembles à une seule coïncidence $s_i = t_j$ fournissent les termes du chaos d'ordre (m-1,n-1)

$$(u_i, v_j)\bar{Z}_{u_1} \circ .. \hat{\bar{Z}}_{u_i} \circ .. \circ \bar{Z}_{u_m} \circ Z_{v_1} \circ .. \circ \hat{Z}_{v_j} \circ .. \circ Z_{v_n}$$

($(u_i, v_j) = \langle \bar{u}_i, v_j \rangle$ est le produit scalaire bilinéaire $\int u_i(s) v_i(s) ds$), les ensembles $\{s_i = t_j,\ s_{i'} = t_{j'}\}$ comportent deux (,) et ainsi de suite. En particulier si m=n, il y a un terme dans le chaos d'ordre (0,0), qui est aussi l'espérance du produit de Wiener (si $m \neq n$, l'espérance est nulle) : c'est le <u>permanent</u> des produits scalaires (u_i, v_j)

(7) $\qquad \operatorname{Per}(u_i, v_j) = \Sigma_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (u_1, v_{\sigma(1)}) \dots (u_m, v_{\sigma(m)})$.

3. Avant de continuer, nous allons mettre les résultats précédents sous une forme un peu plus algébrique .

Ecrivons $\underline{\underline{H}}$ au lieu de $L^2(\mathbb{R}_+)$, et formons $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{H}}' \oplus \underline{\underline{H}}$ ($\underline{\underline{H}}'$ est le dual de $\underline{\underline{H}}$) . L'application $x \mapsto x^* = \langle x, . \rangle$ est un isomorphisme antilinéaire de $\underline{\underline{H}}$ sur $\underline{\underline{H}}'$, que l'on prolonge de façon naturelle en une <u>involution</u> de $\underline{\underline{G}}$, encore notée $*$. Nous définissons alors sur $\underline{\underline{G}}$ un produit scalaire bilinéaire $(x,y) = \langle x^*, y \rangle$, et pour ce produit scalaire, les deux espaces $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}'$ sont <u>isotropes</u> (car pour $x \in \underline{\underline{H}}$, $\langle x^*, x \rangle = 0$ puisque $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}'$ sont orthogonaux par construction de $\underline{\underline{G}}$). Inversement, on peut montrer que dans <u>tout</u> espace de Hilbert complexe $\underline{\underline{G}}$ muni d'une involution, qui est de dimension infinie ou de dimension finie paire, on peut trouver deux sous espaces fermés conjugués orthogonaux $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{E}}^*$ de somme $\underline{\underline{G}}$; ils sont alors isotropes pour le produit scalaire bilinéaire $(x,y) = \langle x^*, y \rangle$, et il est facile d'identifier $\underline{\underline{E}}^*$ au dual $\underline{\underline{E}}'$ de $\underline{\underline{E}}$ au moyen du produit scalaire (,). Une telle décomposition de $\underline{\underline{G}}$ en somme de deux sous-espaces isotropes maximaux est loin d'être unique.

On retrouvera tout cela à propos de l'algèbre extérieure.

Revenons à $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{H}}' \oplus \underline{\underline{H}}$: construisons l'algèbre symétrique de $\underline{\underline{G}}$, qui se complète en l'espace de Fock symétrique. Un élément de cette algèbre est une c.l. finie de produits $u_1' \circ \dots \circ u_m' \circ v_1 \dots \circ v_n$, auxquels nous associons les v.a. $\bar{Z}_{u_1} \circ \dots \circ \bar{Z}_{u_n} \circ Z_{v_1} \circ \dots \circ Z_{v_n}$ (ici, nous sommes revenus à $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}' = L^2(\mathbb{R}_+)$, l'interprétation concrète du début). On construit ainsi un isomorphisme entre l'espace de Fock symétrique <u>sur</u> $\underline{\underline{G}}$ et l'espace L^2 associé au mouvement brownien <u>complexe</u>, analogue à celui qui nous a occupés depuis l'exposé V. Du fait que (Z_t) et $(\bar{Z}_t)$ sont des martingales conformes, bien des calculs sont plus élégants dans le cas complexe que dans le cas réel.

Les calculs que nous avons indiqués au n°2 (sans les expliciter complètement) permettent de décrire, de manière purement algébrique, le produit de Wiener $\overline{Z}_{u_1}\ldots\overline{Z}_{u_m}Z_{v_1}\ldots Z_{v_n}$. En transportant ces formules sur l'algèbre symétrique de $\underline{\underline{H}}'\oplus\underline{\underline{H}}$ (ou plus simplement de $\underline{\underline{G}}$, sans distinguer $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}'$) on obtient l'intéressante notion d'<u>algèbre de Wiener</u>, qui est l'analogue commutatif des algèbres de Clifford classiques, et que Dynkin a introduite pour formaliser les calculs gaussiens. Il s'agit d'une seconde structure d'algèbre sur l'algèbre symétrique $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{G}})$ d'un espace vectoriel $\underline{\underline{G}}$ muni d'un produit scalaire bilinéaire (,), commutative et associative, admettant le vecteur vide **1** comme élément neutre, et telle que

(8) $$u(v_1\circ\ldots\circ v_n) = u\circ v_1\circ\ldots\circ v_n + \Sigma_i\ (u,v_i)v_1\circ\ldots\circ\cancel{v_i}\circ\ldots\circ v_n$$

(le produit symétrique est noté o, le nouveau produit sans signe)[1].
On notera que cette notion algébrique permet de faire du << calcul gaussien >> sans supposer la positivité de la forme (,) !

De la même manière, mais en utilisant cette fois explicitement la décomposition $\underline{\underline{G}}=\underline{\underline{H}}'\oplus\underline{\underline{H}}$, on munit l'algèbre symétrique $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{G}})$ d'une forme linéaire privilégiée donnée par (7), et qui correspond à l'espérance ordinaire d'un produit de Wiener. Nous la noterons donc Esp

$$\mathrm{Esp}(\overline{Z}_{u_1}\circ\ldots\overline{Z}_{u_m}\circ Z_{v_1}\ldots\circ Z_{v_n}) = 0 \text{ si } m\neq n\ ,\ \mathrm{Per}(u_i,v_j) \text{ si } m=n$$

$$(\text{ ou } \mathrm{Esp}(u_1'\circ\ldots\circ u_m'\circ v_1\circ\ldots\circ v_n) = \mathrm{Per}(u_i'(v_j)) \text{ si } m=n\ )$$

Cette forme linéaire n'est pas partout définie sur l'espace de Fock : pour une v.a. f de la forme $\int f(A,B)d\overline{Z}_A dZ_B$, on a en effet

(9) $$\mathrm{Esp}(f) = \int f(A,A)dA$$

qui est une <u>trace</u>. Le symbole Esp représente l'espérance ordinaire de l'intégrale $\int f(A,B)d\overline{Z}_A dZ_B$ prise <u>diagonales incluses</u>, i.e. au sens de Stratonovitch. Noter qu'ici on intègre sur les $\mathcal{P}_m\times\mathcal{P}_n$, de sorte qu'il y a bien moins de diagonales permises que sur les $\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n$.

4. <u>Exponentielles</u>. On a passé un long moment dans les exposés précédents à étudier les exponentielles (de Wick ou de Wiener) d'éléments du premier chaos, c'est à dire les vecteurs cohérents. Nous allons parler ici des calculs analogues pour les éléments du second chaos. De quoi s'agit-il ? Du point de vue des probabilités quantiques, l'espace de Fock est livré avec une loi gaussienne naturelle, fournie par l'état vide $\mathbb{1}$: dans cet état, les opérateurs de multiplication de Wiener par les $\overline{Z}_u$ et les Z_v s'interprètent comme des v.a. gaussiennes (complexes ! ces opérateurs ne sont pas a.a.). Si l'on remplace $\mathbb{1}$ par un

1. Chez Dynkin, les (,) sont traités comme des éléments de l'algèbre de degré 0, mais non nécessairement des scalaires, pour traiter certaines << v.a. gaussiennes de variance infinie >>.

vecteur cohérent normalisé, on donne une moyenne non nulle à ce processus gaussien. En utilisant l'exponentielle d'un élément du second chaos on modifie la covariance du processus (mais en restant dans la classe d'équivalence de la mesure de Wiener).

Nous avons déjà étudié les exponentielles d'éléments du second chaos sous un autre nom, dans Sém. Prob. XXI, p. 19, dans le cas d'un seul mouvement brownien (B_t). Bien que nous n'ayons pas à utiliser ces résultats, il est opportun de les rappeler. Considérons un élément du second chaos

$$F = \int_{s<t} f(s,t)dX_s dX_t \qquad (f(\cdot,\cdot) \text{ réelle symétrique sur } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$$

auquel nous associons l'opérateur de Hilbert-Schmidt autoadjoint $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\mathcal{F}h(s) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} f(s,t)h(t)dt$$

Alors e^F (exponentielle de Wiener) appartient à L^2 si et seulement si toutes les valeurs propres c_n de $\mathcal{F}$ sont <1 , auquel cas $\mathcal{G}=\mathcal{F}/I-\mathcal{F}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Revenant de $\mathcal{G}$ à son noyau $\frac{1}{2}g(s,t)$ puis à la v.a. G, on a

$$e^F = Ce_o^G \quad (\text{exp. de Wick}) \qquad \text{où } C=E[e^F] \ .$$

Cela montre qu'il n'y a pas à distinguer de manière essentielle entre exponentielles de Wiener et de Wick. Nous ferons peu de théorie, mais le calcul explicite suivant sera important pour la suite de l'exposé.

Nous revenons à l'espace de Fock double, et considérons l'élément du second chaos

$$(10) \qquad G = \bar{Z}_{u_1} o Z_{v_1} + \dots + \bar{Z}_{u_n} o Z_{v_n}$$

correspondant du point de vue algébrique à $u_1' o v_1 + \dots + u_n' o v_n$. Nous nous proposons de calculer $\mathrm{Esp}(e_o^{-\varepsilon G})$, l'exponentielle <u>de Wick</u> de G, qui existe pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Remarquons tout de suite que, par définition de Esp( ), on a aussi

$$\mathrm{Esp}(e_o^{-\varepsilon G}) = E[e^{-\varepsilon \hat{G}}] \quad \text{avec} \quad \hat{G} = \bar{Z}_{u_1} Z_{v_1} + \dots + \bar{Z}_{u_n} Z_{v_n} \ .$$

LEMME 1. Soit A la matrice $a_{ij}=(u_i,v_j)$; on a

$$(11) \qquad \mathrm{Esp}(e_o^{-\varepsilon G}) = 1/\det(I+\varepsilon A) \ .$$

<u>Démonstration</u>. Nous travaillerons plutôt sur $\hat{G}$ et l'espérance ordinaire. Remarquons d'abord que G est une fonction bilinéaire des u_i et des v_j , et dépend donc seulement du tenseur $u_1'\otimes v_1 + \dots + u_n'\otimes v_n$, que l'on peut identifier à l'opérateur de rang fini

$$\alpha h = u_1'(h)v_1 + \dots + u_n'(h)v_n$$

(si l'on préfère, on écrira (u_i,h) au lieu de $u_i'(h)$) .

L'opérateur $I+\alpha$ admet alors un déterminant intrinsèque, et si l'on écrit $\det(I+\alpha)$ au lieu de $\det(I+A)$, on s'affranchit de toute représentation explicite de G au moyen des u_i, v_j.

Montrons d'autre part que l'espérance $E[e^{-\varepsilon\hat{G}}]$ admet une représentation explicite (compliquée) au moyen de la matrice des (u_i,v_j). Pour cela nous développons la série exponentielle

$$
(11)\quad \begin{aligned}
E[e^{-\varepsilon\hat{G}}] &= 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} E[(\overline{Z}_{u_1} Z_{v_1} + \ldots + \overline{Z}_{u_n} Z_{v_n})^k] \\
&= 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} \Sigma_{a\in F_k} E[\overline{Z}_{u_{a(1)}} Z_{v_{a(1)}} \ldots \overline{Z}_{u_{a(k)}} Z_{v_{a(k)}}]
\end{aligned}
$$

où F_k est l'ensemble des applications (non nécessairement injectives) de $\{1,\ldots,k\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. Par la formule (7), nous transformons la dernière espérance en $\mathrm{Per}(u_{a(i)}, v_{a(j)})$, et alors la propriété cherchée est claire. <u>L'espérance ne change donc pas si l'on remplace les</u> u_i <u>par leurs projections orthogonales sur l'espace engendré par les</u> v_j (on peut aussi voir cela par un argument probabiliste : ces projections orthogonales sont des espérances conditionnelles, et il faut utiliser ensuite les propriétés des gaussiennes complexes...). Nous pouvons alors choisir pour (v_i) une base orthonormale de l'espace $\mathcal{H}$ image de α, supposer que les u_i sont aussi dans $\mathcal{H}$, de sorte que tout se passe dans $\mathcal{H}$ et que la matrice A est simplement la matrice de α dans la base (v_i). La base peut être choisie de sorte que sa matrice soit triangulaire ($(u_i,v_j)=0$ pour $j<i$). Nous posons alors $(u_i,v_i)=\lambda_i$, et $\det(I+\varepsilon A) = \prod(1+\varepsilon\lambda_i)$.

Revenons au côté droit de (11) : soit $\{i_1<\ldots<i_p\}$ l'image de l'application a, et soit k_j le nombre de points de $\{1,\ldots,k\}$ dont l'image est i_j (on a $p\leq k$, $k_1+\ldots+k_p=k$). Toutes les applications a admettant la même image avec les mêmes multiplicités k_j ont même contribution à la somme, et leur nombre est $k!/k_1!\ldots k_p!$. On a donc

$$
E[e^{-\varepsilon\hat{G}}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon)^k \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_p=k \\ i_1<\ldots<i_p}} E[(\overline{Z}_{u_{i_1}} Z_{v_{i_1}})^{k_1} \ldots (\overline{Z}_{u_{i_p}} Z_{v_{i_p}})^{k_p}]/k_1!\ldots k_p!
$$

Nous calculons l'espérance par la formule (7) : comme la matrice A est triangulaire, les seules permutations σ de $\{1,\ldots,k\}$ qui contribuent au permanent sont celles qui préservent les intervalles $\{1,\ldots,k_1\}$, $\{k_1+1,\ldots,k_1+k_2\}$, $\ldots\{k_1+\ldots+k_{p-1}+1, k_1+\ldots+k_p\}$; leur nombre est $k_1!\ldots k_p!$ et chacune contribue $(u_{i_1},v_{i_1})^{k_1}\ldots(u_{i_p},v_{i_p})^{k_p}$. Remplaçant (u_{i_j},v_{i_j}) par λ_{i_j}, on voit que l'espérance vaut

$$(\Sigma_{m_1}(-\varepsilon\lambda_1)^{m_1})(\Sigma_{m_2}(-\varepsilon\lambda_2)^{m_2})\dots(\Sigma_{m_n}(-\varepsilon\lambda_n)^{m_n})$$
$$= (1+\varepsilon\lambda_1)^{-1}\dots(1+\varepsilon\lambda_n)^{-1}.$$

Le lemme est établi.

Indiquons une extension utile de ce lemme : si l'on pose $C=I+\varepsilon\alpha$ (supposé inversible), on a

(12) $\quad \mathrm{Esp}(\overline{Z}_{p_1}\circ Z_{q_1}\circ\dots\overline{Z}_{p_k}\circ Z_{q_k}\, e_\circ^{-\varepsilon G}) = \mathrm{Per}(p_i, C^{-1}q_j)/\det(C)$.

Pour voir cela, nous cherchons le coefficient de $t_1\dots t_k$ dans le développement de

$$\mathrm{Esp}(\ e_\circ^{t_1\overline{Z}_{p_1}\circ Z_{q_1}+\dots+t_k\overline{Z}_{p_k}\circ Z_{q_k}-\varepsilon G}\ )$$

qui vaut d'après le lemme $1/\det(I+\varepsilon\alpha-U)$ avec $U = \Sigma_1^k\ t_i p_i^!\otimes q_i$. Si C est inversible, ce déterminant s'écrit $\det(C)\det(I-C^{-1}U)$, et $C^{-1}U$ est l'opérateur de rang fini $\Sigma_1^k\ t_i p_i^!\otimes C^{-1}q_i$. D'après le calcul précédent, $1/\det(I-C^{-1}U)$ peut s'interpréter comme $E[e^H]$ où

$$H = t_1\overline{Z}_{p_1}\circ Z_{C^{-1}q_1}+\dots+t_k\overline{Z}_{p_k}\circ Z_{C^{-1}q_k}$$

d'où le coefficient de $t_1\dots t_k$ dans l'espérance, qui d'après (7) vaut $\mathrm{per}(p_i, C^{-1}q_j)$.

II. CALCULS ANTISYMETRIQUES

1. Nous allons faire, à propos de l'espace de Fock antisymétrique, des calculs exactement analogues à ceux du paragraphe précédent, mais plus inattendus et amusants. Ce paragraphe doit beaucoup à Kupsch [4].

$\underline{\underline{H}}$ désigne toujours un espace de Hilbert séparable, $\underline{\underline{H}}'$ son dual, $\underline{\underline{G}}$ la somme directe $\underline{\underline{H}}'\oplus\underline{\underline{H}}$ avec son involution naturelle, mais nous travaillerons sur l'algèbre extérieure $\Lambda(\underline{\underline{G}})$ (dont la complétée est l'espace de Fock antisymétrique). La plupart du temps nous supposerons $\underline{\underline{H}}$ de dimension infinie, mais nous trouverons aussi très instructif de regarder le cas simple où $\dim(\underline{\underline{H}})=N<\infty$.

Soit (e_i) une base orthonormale de $\underline{\underline{H}}$; alors les e_i, e_j^* forment une base orthonormale de $\underline{\underline{G}}$, et une base o.n. de $\Lambda(\underline{\underline{G}})$ est formée des $e_A^* e_B$ (les signes $\wedge$ seront fréquemment omis) , où l'on a posé

si $A=i_1<\dots<i_n$, $e_A=e_{i_1}\dots e_{i_n}$, $e_A^*=e_{i_1}^*\dots e_{i_n}^*$

Faisons tout de suite une observation importante : l'involution $*$ se prolonge naturellement à l'algèbre extérieure, <u>en inversant comme d'habitude l'ordre des produits</u>, de sorte qu'il faut distinguer e_A^* de $(e_A)^*$.

Nous désignerons par $\rho(n)$ le facteur $(-1)^{n(n-1)/2}$, et nous poserons aussi $\rho(A)=\rho(|A|)$ pour simplifier ; enfin, nous désignerons par ρ l'opérateur unitaire de l'espace de Fock qui multiplie par $\rho(n)$ les éléments du n-ième chaos. Nous procéderons de même avec $\sigma(n)=(-1)^n$ et $\tau(n) = (-1)^{n(n+1)/2}$ (des notations voisines ont été utilisées dans l'exposé IV). L'opérateur ρ permet d'écrire

$$u_n\wedge\ldots\wedge u_1 = \rho(n)u_1\wedge\ldots\wedge u_n = \rho(u_1\wedge\ldots\wedge u_n) \qquad (u_i\in\underline{\underline{G}})$$

et en particulier $(e_A)^*=\rho(e_A^*)=\rho(A)e_A^*$.

L'algèbre extérieure étant munie de sa structure hilbertienne complexe naturelle (définie par la formule (13) ci-dessous) , l'involution $*$ permet aussi de la munir d'un produit scalaire bilinéaire $(x,y)=\langle x^*,y\rangle$. Compte tenu de l'involution qui renverse le sens de certains facteurs, il faut comparer soigneusement les formules

$$\begin{array}{lll} (13) & \langle u_1\wedge\ldots\wedge u_n\ ,\ v_1\wedge\ldots\wedge v_n\rangle = \det(u_i,v_j) & \\ (13') & (u_n\wedge\ldots\wedge u_1\ ,\ v_1\wedge\ldots\wedge v_n) = \det(u_i,v_j) & (\ u_i,\ v_i\in\underline{\underline{G}}\ ) \end{array}$$

si l'on rétablit à gauche dans (13') l'ordre normal des facteurs, un coefficient $\rho(n)$ apparaît à droite.

Si l'on utilise la structure particulière de $\underline{\underline{G}}$, i.e. sa décomposition en deux sous-espaces isotropes $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}'$, on a les formules suivantes, où U,V,W,Z sont des éléments de <u>l'algèbre extérieure de $\underline{\underline{H}}$</u>

$$(14)\qquad \begin{array}{ll} \langle U^*\wedge W\ ,\ V^*\wedge Z\rangle & = \langle\overline{U,V}\rangle\langle W,Z\rangle \\ (U^*\wedge W\ ,\ V^*\wedge Z) & = \langle\overline{W,V}\rangle\langle U,Z\rangle\ . \end{array}$$

Enfin, nous verrons que $\Lambda(\underline{\underline{G}})$ porte une forme linéaire naturelle (qui ne s'étend pas à l'espace de Fock antisymétrique), que nous noterons Esp . Nous en rejetterons la description après l'interprétation probabiliste, mais donnons une formule qui permet de bien comprendre de quoi il s'agit : les x_i', y_i sont des éléments de $\underline{\underline{H}}'$ et $\underline{\underline{H}}$ respectivement, et <u>on notera l'ordre des facteurs</u>

$$(15)\qquad \mathrm{Esp}(\ x_m'\wedge\ldots\wedge x_1'\wedge y_1\wedge\ldots\wedge y_n) = \det\ x_i'(y_j)\ \text{si } m=n\ ,\ 0\ \text{si } m\neq n$$

Si l'on rétablit les facteurs dans l'ordre naturel, il apparaît donc un $\rho(m)$ du côté droit.

2. Dans la discussion précédente, l'utilisation d'une base o.n. (e_i) <u>ordonnée</u> pour construire une base o.n. de l'algèbre extérieure est une opération si familière, qu'on ne la mentionne même plus. <u>L'utilisation du mouvement brownien joue exactement le même rôle</u>, et n'est ni plus ni moins artificielle. Elle permet de travailler sur une base o.n. continue (formelle), ce qui est souvent plus simple qu'une base discrète.

Supposons donc $\underline{\underline{H}}$ de dimension infinie, et identifions le à $L^2(\mathbb{R}_+)$, de sorte que $\underline{\underline{G}}$ devient la somme directe de deux copies de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Alors les éléments de l'espace de Fock antisymétrique sur $\underline{\underline{G}}$ sont représentés comme des sommes d'intégrales stochastiques multiples du type de la première page, formules (1) ou (1')

$$f = \Sigma_{m,n} \int_{\substack{s_1<..<s_m \\ t_1<..<t_n}} \hat{f}_{mn}(..,..)dX_{s_1}..dX_{s_m}dY_{t_1}..dY_{t_n}$$
$$= \Sigma_{m,n} \int_{P_m\times P_n} \hat{f}(A,B)dX_A dY_B \;=\; \int_{P} \hat{f}(A,B)dX_A dY_B$$

où (X_t) et (Y_t) sont deux mouvements browniens réels indépendants . Il n'y a ici (nous l'avons bien souligné dans l'exposé V) aucune différence entre symétrique et antisymétrique. La différence commence lorsqu'on remplace l'intégrale sur $P_m\times P_n$ par une intégrale sur $\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n$ à la façon de (2), car maintenant

$$\int_{P_m\times P_n} \hat{f}_{mn}(s_1,\dots,s_m,t_1,..,t_n)dX_{s_1}..dX_{s_m}dY_{t_1}..dY_{t_n}$$
(16)
$$= \frac{1}{m!n!}\int_{\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n} \hat{f}_{mn}(\dots,\dots)dX_{s_1}\wedge..\wedge dX_{s_m}\wedge dY_{t_1}..\wedge dY_{t_n}$$

où maintenant $\hat{f}_{mn}$ est prolongée par <u>anti</u>symétrie (par rapport aux s_i et aux t_j séparément), et le signe $\wedge$ rappelle que les éléments différentiels anticommutent.

L'analogue en dimension finie de l'espace que nous venons de construire est l'espace des formes différentielles doubles à coefficients constants sur $\mathbb{C}^N$

$$\Sigma_{\substack{i_1<\dots<i_m \\ j_1<\dots<j_n}} f_{i_1,..i_m j_1,..j_n} dp_{i_1}\wedge..\wedge dp_{i_m}\wedge dq_{j_1}\wedge..\wedge dq_{j_n}$$

qui interviennent en géométrie symplectique : pour préserver cette analogie, il aurait été plaisant de noter P_t et Q_t les deux mouvements browniens (mais ces P et Q ne satisfaisant pas aux RCC, il y aurait eu des chutes). Remarquer une différence avec le cas symétrique : X et Y sont des mouvements browniens réels, et l'on n'éprouve pas le besoin de passer au complexe.

Calculons par exemple le noyau $\hat{f}(A,B)$ correspondant à l'élément de $\Lambda(\underline{\underline{G}})$ $u_1'\wedge..\wedge u_m'\wedge v_1\wedge..\wedge v_n$. On a $\hat{f}(A,B)=0$ si $|A|\neq m$ ou $|B|\neq n$, et si $A = \{s_1<\dots<s_m\}$, $B=\{t_1<\dots<t_n\}$ on a

$$\hat{f}(A,B) = \Sigma_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_m \\ \tau\in\mathfrak{S}_n}} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\, u_{\sigma(1)}(s_1)..u_{\sigma(m)}(s_m)v_{\tau(1)}(t_1)..v_{\tau(n)}(t_n).$$

A présent, une remarque essentielle : <u>comme dans le cas symétrique, une intégrale du type</u> (16) <u>peut être interprétée</u>, <u>soit au sens d'Ito</u>, soit au sens de Stratonovitch. En effet, les diagonales $\{s_i=s_j\}$ ou $\{t_i=t_j\}$ sont sans intérêt dés le départ à cause de l'antisymétrie, mais on peut attribuer une contribution non nulle aux diagonales $\{s_i=t_j\}$. Cette contribution se calcule suivant la règle

$$dX_s dY_s = ds \ (= -dY_s dX_s)\ , \text{ à comparer à } d\overline{Z}_s dZ_s = ds$$

mais en tenant compte de l'anticommutativité, i.e. du nombre d'inversions nécessaires pour amener en contact dX_{s_i} et dY_{t_j}. Si l'on interprète l'intégrale (16) au sens de Stratonovitch, elle se développe en intégrales multiples d'Ito, avec des termes dans les chaos d'ordre (m-1,n-1), (m-2,n-2),... En particulier, si m=n, il y a un terme dans le chaos d'ordre (0,0) qui est l'espérance de l'intégrale de Stratonovitch, et cette espérance est précisément la forme linéaire Esp introduite plus haut, comme nous le verrons dans un instant.

Cela suggère de considérer deux produits, comme nous l'avons fait dans le cas symétrique : le produit de Grassmann[1] ou produit extérieur (noté $\wedge$) , qui correspond au produit de Wick, et un nouveau produit, que nous appellerons produit de Wiener antisymétrique[1], que nous noterons $\curlywedge$ (ou parfois sans signe), et qui correspond au produit de Wiener. Les deux produits sont associatifs, et satisfont exactement aux mêmes propriétés d'anticommutativité : dX_s et dX_t anticommutent sans restriction, de même dY_s et dY_t , dX_s et dY_t ; cette anticommutation nous impose $dX_s^2=0=dY_s^2$, mais ne nous impose rien sur $dX_s dY_s$ que la relation $dX_s dY_s=-dY_s dX_s$. On prend alors la règle $dX_s dY_s=0$ dans le cas de Grassmann, et la règle $dX_s dY_s=ds$ dans le cas de Wiener.

Si l'on traduit ces règles en formules explicites, on obtient pour produit des v.a. $f = \int_{P\times P} \hat{f}(A,B)dX_A dY_B$ et $g = \int_{P\times P} \hat{g}(A,B)dX_A dY_B$ la v.a. h de noyau $\hat{h}(A,B)$, donné par

$$\hat{h}(A,B) = \Sigma_{\substack{R+S=A\\T+U=B}} \hat{f}(R,T)\hat{g}(S,U)(-1)^{n(R,S)+n(T,U)+|S||T|} \tag{17}$$

pour Grassmann. Pour Wiener, on a un alternant horrible, et la formule est inutilisable :

$$\hat{h}(A,B) = \int dMdN\ \Sigma_{\substack{R+S=A\\T+U=B}} \hat{f}(R,T)\hat{g}(S,U)(-1)^{n(R,S)+n(T,U)+|S||T|} \times(-1)^{n(N,S)+n(T,N)+|N|+n(M,B+S)+n(A+T,N)} \tag{18}$$

Il est plus agréable de calculer le produit de Wiener de fonctions simples. Rappelons d'abord les notations $X_u=\int u_s dX_s$, $Y_v=\int v_s dY_s$, et le fait que $Y_{v_1}\curlywedge..\curlywedge Y_{v_n}=Y_{v_1}\wedge...\wedge Y_{v_n}$. Nous avons ensuite, en complète analogie avec (8)

$$X_{u_1}\curlywedge Y_{v_1}\curlywedge..\curlywedge Y_{v_n} = X_{u_1}\wedge Y_{v_1}\wedge..\wedge Y_{v_n} + (u_1,v_1)X_{u_1}\wedge Y_{v_2}\wedge..\wedge Y_{v_n} \tag{19}$$
$$-(u_1,v_2)X_{u_1}\wedge Y_{v_1}\wedge Y_{v_3}..\wedge Y_{v_n}+(-1)^n(u_1,v_n)X_{v_1}\wedge..\wedge Y_{v_{n-1}}.$$

1. Note en dernière page.

On peut maintenant ajouter un X_{u_2} à gauche et recommencer l'opération, grâce à l'associativité de la multiplication. On voit que du côté gauche, les facteurs $X_{u_m}\ldots X_{u_1}$ apparaissent naturellement en ordre inversé. En particulier, le terme totalement contracté (i.e. d'ordre (0,0)) du produit $X_{u_m}\ast\ldots\ast X_{u_1}\ast Y_{v_1}\ast\ldots\ast Y_{v_n}$ se calcule aisément, et vaut 0 si $m\neq n$, $\det(u_i,v_j)^m$ si $m=n$. Comparant cela à (15), on voit que cela revient au même d'appliquer Esp à un produit de Grassmann (ou à une intégrale d'Ito) que d'appliquer l'espérance ordinaire E au produit de Wiener (ou à l'intégrale de Stratonovitch) correspondant.

Les règles que nous avons données dans le cas symétrique pour la multiplication de deux intégrales (d'Ito) s'appliquent ici encore : le produit de Grassmann revient à écrire le produit comme intégrale multiple (ne pas oublier d'antisymétriser la fonction) ; pour le produit de Wiener, il fait interpréter l'intégrale multiple au sens de Stratonovitch, et la redévelopper en Ito (cf. (5)).

REMARQUE. Comment montrer qu'il existe vraiment un produit associatif satisfaisant aux règles du produit de Wiener ? La méthode figurant dans l'article de Le Jan (où elle sert de définition au produit) consiste à réaliser une algèbre d'opérateurs (donc nécessairement associative) admettant ces règles. Voici comment on fait : ε et η prenant les valeurs $\pm$, introduisons les opérateurs de création et d'annihilation fermioniques db_t^ε et dc_t^η associés aux mouvements browniens X_t et Y_t , les db_s^ε et dc_t^η anticommutant et satisfaisant à $db_s^\varepsilon dc_s^\eta=0$ (cette construction est celle d'une algèbre de Clifford continue, et considérée comme classique). On pose ensuite

$$d\lambda_s = db_s^+ + dc_s^- \ , \ d\mu_s = dc_s^+ - db_s^-$$

et l'on vérifie que la table de multiplication des $d\lambda_s$ et $d\mu_t$ satisfait bien aux règles imposées (noter que $d\lambda_t\cdot\mathbb{1} = dX_t$ et $d\mu_t\cdot\mathbb{1} = dY_t$). Nous ne donnerons pas plus de détails sur ce sujet, pour lequel nous renvoyons à Le Jan, et à ses sources physiciennes.

Nous conclurons cette section par une formule que nous n'utiliserons pas, mais qui a un intérêt, car elle identifie la forme linéaire Esp comme une trace tordue : si l'on tient compte du calcul du noyau de $X_{u_1}\wedge\ldots\wedge X_{u_m}\wedge Y_{v_1}\ldots\wedge Y_{v_n}$ (après (16)) et de la valeur (15) de Esp, on trouve la formule générale

(20) $$\operatorname{Esp}(f) = \int_{\mathcal{P}} \hat{f}(A,A)\,\rho(A)\,dA \quad .$$

3. Cette section est une digression, et peut être omise sans inconvénient. En pratique, les objets les plus intéressants sont les <u>opérateurs</u> sur l'espace de Fock antisymétrique construit sur $\underline{\underline{H}}$. Il est

donc utile de disposer d'une correspondance entre éléments de $\Lambda(\underline{\underline{H}}\oplus\underline{\underline{H}}')$ et opérateurs sur $\Lambda(\underline{\underline{H}})$. L'idée la plus simple (traitée chez Kupsch) consiste à associer à $F\in\Lambda(\underline{\underline{H}}\oplus\underline{\underline{H}}')$ l'opérateur L_F défini par

$$(21) \qquad \langle x, L_F y \rangle = \langle y^* \wedge x, F \rangle .$$

Par exemple, si $F=e_A^*\wedge e_B$ (où (e_i) est une base o.n. de $\underline{\underline{H}}$), L_F est l'opérateur de rang 1 $\rho(A)|e_B\rangle\langle e_A|$ (notation de Dirac). On pourrait penser à une autre correspondance qui donnerait plutôt $b_A^+b_B^-$.

La fonctionnelle Esp est une trace tordue sur $\Lambda(\underline{\underline{H}}\oplus\underline{\underline{H}}')$. Il existe une autre trace tordue célèbre, cette fois sur l'ensemble des opérateurs sur $\Lambda(\underline{\underline{H}})$, qui n'existe qu'en dimension finie, et qui est la <u>supertrace</u> de Berezin. Bien qu'elle n'ait rien à faire ici (et n'ait aucune relation évidente avec Esp !), il est difficile de ne pas en dire un mot. On suppose $\underline{\underline{H}}$ de dimension finie N, muni d'une base o.n. (e_i), et de la base correspondante e_A pour l'algèbre extérieure. La supertrace d'un opérateur U est définie par

$$(22) \qquad \mathrm{Str}(U) = \mathrm{Tr}(\sigma U) = \Sigma_A \ (-1)^{|A|}\langle e_A, Ue_A\rangle .$$

Nous désignons par Θ la <u>partie pleine</u> $\{1,\dots,N\}$, qui est interdite en dimension infinie, et introduisons les opérateurs fermioniques $b_i^{\pm}$ (comme plus haut, le fait que $(b_A^-)^*=\rho(A)b_A^+$ modifie le signe du résultat final).

Le lemme suivant est attribué à Berezin-Patodi dans le livre [7]. Il pourrait suggérer que les $b_A^+b_B^-$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\mathrm{Str}(U^*V)$, mais cette conjecture est fausse.

LEMME 2. $\mathrm{Str}(b_A^+b_B^-)=0$ si $(A,B)\neq(\Theta,\Theta)$, et $\mathrm{Str}(b_\Theta^+b_\Theta^-) = \tau(N)$.

<u>Démonstration</u>. On a vu dans l'exposé IV que $b_B^-e_C=(-1)^{n(B,C)}e_{C-B}$ si $B\subset C$ (et 0 sinon), $b_A^+e_D=(-1)^{n(A,D)}e_{A+D}$ si $A\cap D=\emptyset$ (0 sinon). Il en résulte que $b_A^+b_B^-e_C$ est, si $A\neq B$, de la forme εe_F où ε vaut 0, 1 ou -1, et $F\neq C$. La supertrace est donc nulle, et il suffit d'examiner le cas où B=A. Posons $M=b_A^+b_A^-$; on a $Me_C=0$ si C ne contient pas A, et si $C\supset A$ on a

$$Me_C = (-1)^{n(A,A)}e_C = \rho(A)e_C$$

Donc $\mathrm{Str}(M) = \rho(A)\Sigma_{C\supset A} \ (-1)^{|C|}$, somme valant 0 si $A\neq\Theta$, et $(-1)^N$ si $A=\Theta$. On conclut en remarquant que $\rho(N)(-1)^N=\tau(N)$ par définition de τ !

Nous arrêtons cette digression, bien qu'il y ait évidemment une foule de questions à discuter (je ne prétends pas être capable de le faire !).

4. EXPONENTIELLES. Nous revenons à $\underline{\underline{H}}=L^2(\mathbb{R}_+)$: l'espace de Fock antisymétrique nous est, lui aussi, livré avec la mesure « gaussienne » associée à l'état vide $\mathbb{1}$. Nous allons perturber cette mesure comme nous l'avons fait dans le cas symétrique. Considérons un élément du second chaos, de la forme (cf. (10))

(23) $$G = X_{u_1} \wedge Y_{v_1} + \ldots + X_{u_n} \wedge Y_{v_n}$$

dont nous considérons l'exponentielle $e_\wedge^G$ au sens de Grassmann ; la série exponentielle est ici une somme finie, et il n'y a donc aucun problème de convergence. Le problème consiste à calculer $\mathrm{Esp}(e_\wedge^G)$; la matrice A des (u_i,v_j) , l'opérateur de rang fini α sur $\underline{\underline{H}}$, ont la même signification que pour le lemme 1. Remarquons tout de suite que si l'on introduit

$$G' = X_{u_1} \curlywedge Y_{v_1} + \ldots + X_{u_n} \curlywedge Y_{v_n} \quad (= G + \Sigma_i\, (u_i,v_i))$$

et si $e^{G'}$ est l'exponentielle de Wiener (antisymétrique), on a simplement $\mathrm{Esp}(e_\wedge^G) = E[e^{G'}]$: en effet, les développements des deux exponentielles sont exactement parallèles, puisque les deux produits ont les mêmes propriétés combinatoires, et pour chaque terme du développement nous avons une égalité Esp(produit de Grassmann) = E[même produit de Wiener].

LEMME 3. On a $\mathrm{Esp}[e_\wedge^G] = \det(I+A)$.

<u>Démonstration</u>. Elle est tout analogue à celle du lemme 1, mais plus simple. On développe la série exponentielle (signes $\wedge$ omis)

$$e_\wedge^G = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, \Sigma_{a\in I_k}\, X_{u_{a(1)}} Y_{v_{a(1)}} \ldots X_{u_{a(k)}} Y_{v_{a(k)}}$$

où I_k est l'ensemble des injections de $\{1,\ldots,k\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. Si l'on promène en bloc un facteur $X_u Y_v$, on ne change pas le produit : on peut donc se restreindre à l'ensemble J_k des injections croissantes, et omettre le facteur $1/k!$ en tête. Si maintenant on amène tous les X_u à gauche dans l'ordre $X_{u_{a(1)}} \ldots X_{u_{a(k)}}$ on aboutit à

$$1 + \Sigma_{k=1}^n\, \Sigma_{a\in J_k}\, \rho(k) X_{u_{a(1)}} \ldots X_{u_{a(k)}} Y_{v_{a(1)}} \ldots Y_{v_{a(k)}}$$

Nous appliquons Esp( ) (formule (15), et le facteur $\rho(k)$ retourne l'ordre des facteurs comme il convient. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Esp}(e_\wedge^G) &= 1 + \Sigma_{k=1}^n\, \Sigma_{a\in J_k}\, \det(u_{a(i)}, v_{a(j)}) \\ &= \Sigma_{B\subset\{1,\ldots,n\}}\, \det{}_{i,j\in B}\, a_{ij}\ .\end{aligned}$$

Nous comparons cela à

$$\det(I+A) = \Sigma_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n (\delta_{i\sigma(i)} + a_{i\sigma(i)}) .$$

Dans le développement du produit, nous avons un certain nombre de facteurs $a_{i\sigma(i)}$ (indices du premier type) et un certain nombre de facteurs $\delta_{i\sigma(i)}$ (indices du second type). Soit B l'ensemble des indices du premier type . Si le terme est non nul, σ doit laisser fixes les indices du second type, et induit donc une permutation de B (de même signature), que nous nous permettons de noter encore σ . Regroupant alors les termes correspondant au même ensemble B, nous retrouvons l'expression de Esp( ) écrite plus haut.

REMARQUE. En raisonnant comme dans le cas symétrique, nous pouvons généraliser la formule, sous la forme (signes $\wedge$ omis)

(24) $\quad \mathrm{Esp}(X_{p_1}Y_{q_1}\ldots X_{p_k}Y_{q_k}e^G) = \det(p_i,C^{-1}q_j)\det C \qquad C = I+\alpha$

si C est inversible. En effet, le côté gauche est le coefficient de $t_1\ldots t_k$ dans le développement de

$$\mathrm{Esp}(\exp_\wedge(t_1X_{p_1}Y_{q_1}+\ldots+t_kX_{p_k}Y_{q_k}+G)) = \det(I+\alpha+U)$$

$U=\Sigma\, t_i p_i^\prime\otimes q_i$ comme dans le cas symétrique. Cela vaut $\det(C)\det(I+C^{-1}U)$, et le calcul précédent nous donne $\det(I+C^{-1}U) = \det(p_i,C^{-1}q_j)$.

5. UN PEU DE ⟨⟨ SUPERSYMETRIE ⟩⟩. Nous arrivons aux points essentiels de la partie algébrique du travail de Le Jan . On forme le produit tensoriel d'un espace de Fock symétrique et d'un espace de Fock antisymétrique des types considérés plus haut (du point de vue probabiliste, on travaille sur l'espace L^2 d'un couple de browniens complexes). L'analogue en dimension finie est l'espace des formes différentielles doubles (de tous degrés mélangés)

$$\Sigma_{\substack{i_1<\ldots<i_m\\ j_1<\ldots<j_n}} c_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n}(p_i,q_i)dp_{i_1}\wedge\ldots\wedge dp_{i_n}\wedge dq_{j_1}\wedge\ldots\wedge dq_{j_n}$$

L'espace de Fock symétrique fournit les coefficients variables, et l'espace antisymétrique les éléments différentiels.

Il se produit alors un miracle : $\det(I+\varepsilon\alpha)$ figure une fois au numérateur et une fois au dénominateur dans les lemmes 1 et 3, et les formules se simplifient merveilleusement. Nous gardons les notations u_1,v_1 $\ldots,u_n,v_n$ et α des lemmes 1 et 3, et nous posons

(25) $$\lambda_\alpha = \Sigma_i\ (\overline{Z}_{u_i}Z_{v_i}-X_{u_i}\between Y_{v_i}) = \Sigma_i\ (\overline{Z}_{u_i}\circ Z_{v_i}-X_{u_i}\wedge Y_{v_i})$$

En tant que forme différentielle, λ_α est donc inhomogène. Pour calculer sur les λ_α on a le choix entre utiliser les deux produits de Wiener (les variables symétriques et antisymétriques commutant) et l'espérance ordinaire, ou bien les produits Wick$\times$Grassmann et l'intégrale Esp. La première option sera choisie de préférence (le produit Wick $\times$ Grassmann sera noté avec une $*$, le produit de Wiener sans signe).

Nous avons d'après le ⟨⟨ miracle ⟩⟩

$$E[\exp(t_1\lambda_{\alpha_1}+\ldots+t_m\lambda_{\alpha_m})] = 1$$

En dérivant, nous avons

$$E[\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_m}] = 0\ . \tag{26}$$

Du point de vue des applications probabilistes, le calcul essentiel est le suivant :

LEMME 4. On a

$$\begin{aligned} E[\overline{Z}_pZ_q\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_m}] &= E[X_pY_q\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_m}] \\ &= \Sigma_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\ (\ p,\ \alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(m)}q\ ) \end{aligned} \tag{27}$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit de traiter le cas où α_i est de la forme $u_i'\otimes v_i$. On applique alors (12) et (24) :

$$E[\overline{Z}_pZ_q\exp(\Sigma_i\ t_i\overline{Z}_{u_i}Z_{v_i}-\Sigma_i\ t_iX_{u_i}Y_{v_i})] = (\ p,\ (I-\Sigma_i\ t_iu_i'\otimes v_i)^{-1}q\ )$$

Le côté gauche de (27) est le coefficient de $t_1\ldots t_m$ à gauche. Du côté droit il faut donc prendre le coefficient de $t_1\ldots t_m$ dans $(\Sigma_i\ t_i\alpha_i)^m$. Le résultat est alors clair.

Il nous reste un important résultat technique, qui sera la clef des calculs de renormalisation faits par Le Jan :

LEMME 5. Posons pour abréger $\lambda=\lambda_{u'\otimes u}$, $q=(u,u)$. On a pour tout n une relation de la forme

$$\frac{\lambda^{*n}}{n!} = P_n(\lambda) = \Sigma_{k=0}^n\ p_{k,n}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{28}$$

où le terme dominant du polynôme $P_n(x)$ est x^n .

<u>Démonstration</u>. Nous allons commencer par exprimer les λ^n en fonction des λ^{*n}. Posons $A=\overline{Z}_uZ_u$, $a=\overline{Z}_u{\circ}Z_u$ (ainsi $A=a+q$) ; désignons par A^n la n-ième puissance de Wiener de a , a^n la n-ième puissance de Wick de a . Les règles que nous avons données pour le calcul du produit de Wiener (qui est une intégrale multiple d'ordre n avec diagonales incluses), et un argument combinatoire simple de comptage de diagonales, nous donnent une formule explicite

$$A^n = \Sigma_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 (n-k)!\,q^{n-k}a^k$$

qui prend une forme plus agréable en fonction d'autres variables

(29) $$B_n = \frac{A^n}{n!} = \Sigma_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} \frac{a^k}{k!} = \Sigma_{k=0}^n c_{n,k} \frac{a^k}{k!}$$

Ecrivons d'autre part

$$\lambda^n = (\bar{Z}_u Z_u - X_u Y_u)^n = A^n - nA^{n-1}X_u Y_u = A^n - nA^{n-1}q - nA^{n-1}X_u \wedge Y_u$$
$$\lambda^{*k} = (\bar{Z}_u \circ Z_u - X_u \wedge Y_u)^{*k} = a^k - ka^{k-1}X_u \wedge Y_u$$

Cherchons à exprimer $\lambda^n/n!$ comme un polynôme $\Sigma_{k=0}^n d_{n,k}\lambda^{*k}/k$: il vient deux relations

$$\frac{A^n - nA^{n-1}q}{n!} = \Sigma_{k=0}^n d_{n,k} \frac{a^k}{k!} \quad , \quad \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} = \Sigma_{k=0}^n d_{n,k} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$$

qui doivent être compatibles. Compte tenu de (29), elles s'écrivent

$$d_{n,k} = c_{n,k} - c_{n-1,k} \text{ si } k \leq n-1 \ , \ d_{n,n} = c_{n,n} \quad \text{pour la première}$$
$$c_{n-1,k} = d_{n,k+1} \ (k \leq n-1) \text{ pour la seconde}$$

La première relation nous donne

(29) $$d_{n,k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} q^{n-k} \text{ si } n \geq k > 0 \ , \ d_{n,0} = 0 \ (n>0), \ d_{0,0} = 1$$

et alors la seconde relation est bien satisfaite. Formons maintenant la série génératrice

$$\Sigma_n \frac{t^n \lambda^n}{n!} = 1 + \Sigma_{n>0} \frac{t^n}{n!} \Sigma_{0<k\leq n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} q^{n-k} \lambda^{*k}/k!$$
$$= 1 + \Sigma_{k>0} \frac{t^k \lambda^{*k}}{k!}\left(1 + \Sigma_{n>k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} t^{n-k} q^{n-k} \right)$$

La parenthèse à droite est égale à $1/(1-tq)^k$, et l'on a par conséquent

(30) $$e^{t\lambda} = e^{t\lambda^*/1-tq}$$ (exponentielle de Wiener à gauche, de Wick à droite)

Posant alors $t=s/1+sq$, on obtient

(31) $$e^{s\lambda^*} = e^{s\lambda/1+sq}$$ (Wick à gauche, Wiener à droite)

D'où aisément le théorème. On a mieux : si l'on se rappelle la fonction génératrice

$$\Sigma_n L_n^{-1}(x)t^n = \exp\left(\frac{-tx}{1-t}\right)$$

d'une famille de polynômes de Laguerre, on trouve explicitement

(32) $$\lambda^n = n!\,q^n L_n^{-1}(-\lambda^*/q) \quad , \quad \lambda^{*n} = n!\,q^n(-1)^n L_n^{-1}(\lambda/q) \ .$$

III. APPLICATIONS PROBABILISTES

1. Nous allons indiquer d'abord, sans chercher la plus grande généralité possible, l'origine probabiliste des problèmes algébriques traités dans les paragraphes précédents.

Considérons sur un espace d'états E une mesure η, et une probabilité de transition P_t symétrique par rapport à η. On suppose que le semi-groupe (P_t) est transient, avec un noyau potentiel absolument continu par rapport à η

$$\int_0^\infty P_t(x,dy)dt = g(x,y)\eta(dy)$$

La fonction $g(x,y)$ est symétrique, et $g(\cdot,y)$ est excessive pour tout y. Cela permet d'associer à toute mesure positive ρ une fonction excessive, le potentiel de ρ

$$G\rho = \int g(\cdot,y)\rho(dy)$$

On définit l'énergie de la mesure ρ comme $<\rho,G\rho>$; l'inégalité de l'énergie affirme que

$$< \rho,G\sigma >^2 \leqq < \rho ,G\rho ><\sigma,G\sigma >$$

qui permet de définir l'espace préhilbertien des mesures (non nécessairement positives) différences de deux mesures d'énergie finie. On peut montrer[1] que cet espace est séparé : on en fait un espace de Hilbert par complétion, qui sera (ou plus exactement, dont le complexifié sera) l'espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$ du paragraphe I .

1. Nous n'avons pas du tout précisé les hypothèses faites sur le semi-groupe, et ne chercherons pas à le faire. Cette partie de l'exposé doit rester simple. En pratique P_t sera le semi-groupe brownien, avec éventuellement un facteur exponentiel e^{-pt} pour le rendre transient.

L'idée de départ de Dynkin était d'utiliser systématiquement le champ gaussien ϕ_ρ de covariance $E[\phi_\rho\phi_\sigma] = <\rho,G\sigma>$: cela revient à travailler sur l'espace de Fock symétrique associé à $\underline{\underline{H}}$. L'utilisation des espaces de Fock antisymétriques ou supersymétriques est plus récente. On notera que ce champ gaussien, dans le cas où (P_t) est le semi-groupe brownien avec facteur exponentiel, est le champ libre de la théorie euclidienne des champs.

Introduisons maintenant le processus de Markov (X_t) gouverné par (P_t), sur l'espace Ω des trajectoires càdlàg. à durée de vie. Pour toute mesure θ sur E, on sait définir sur Ω une mesure P^θ correspondant au choix de comme mesure initiale du processus. On écrit P^x si $\theta=\varepsilon_x$.

Soit μ positive et d'énergie finie. On peut montrer que la fonction excessive $h=G\mu$ est finie η-p.p., et que la surmartingale $H_t=h(X_t)$ est un potentiel de la classe (D) sous toute loi P^θ, où θ est d'énergie finie (et sous presque toute loi P^x). Cela permet d'associer à μ une fonctionnelle additive continue (A_t^μ). On a pour toute fonction $f \geqq 0$

$$G(f\mu) \quad = E^{\cdot}[\int_0^\infty f(X_s)dA_s^\mu]$$

L'intégrale n'est étendue en réalité que jusqu'à la durée de vie ζ du processus, car $A_\cdot$ est constant sur $[\zeta,\infty[$. Calculons $E^{\cdot}[(A_\infty^\mu)^n]$, fonction excessive que nous désignerons par $h^{(n)}$, et qui peut d'ailleurs être identiquement $+\infty$. Omettant provisoirement la mention de μ, nous avons

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= E^{\cdot}[\int_0^\infty -d(A_\infty-A_s)^n] = E^{\cdot}[\int_0^\infty n(A_\infty-A_s)^{n-1}dA_s] \\ &= nE^{\cdot}[\int E[(A_\infty-A_s)^{n-1}|\underline{\underline{F}}_s]dA_s] = nE^{\cdot}[\int h^{(n-1)}(X_s)dA_s] \\ &= nG(h^{(n-1)}.\mu) \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence, on obtient alors la formule

$$h^{(n)}(x) = n!\int g(x,y_1)\mu(dy_1)g(y_1,y_2)\mu(dy_2)\ldots g(y_{n-1},y_n)\mu(dy_n)$$

Cela nous donne $E^x[(A_\infty^\mu)^n]$. Par polarisation, on obtient la formule

$$(33)\; E^{\cdot}[A_\infty^{\mu_1}\ldots A_\infty^{\mu_n}] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\int g(\cdot,y_1)\mu_{\sigma(1)}(dy_1)\ldots g(y_{n-1},dy_n)\mu_{\sigma(n)}(dy_n)$$

2. Avant de faire la relation avec l'espace de Fock, il nous faut un peu généraliser cette formule. Pour toute fonction excessive k, >0 partout et finie (en pratique, k ne sera finie que p.p., mais on ne soulèvera pas de difficulté à ce sujet), introduisons le nouveau semi-groupe sousmarkovien

$$P_t^{/k}(x,dy) = P_t(x,dy)k(y)/k(x)$$

symétrique par rapport à la mesure $\eta^{/k}=k^2.\eta$. Le noyau potentiel est remplacé par $g^{/k}(x,y) = g(x,y)/k(x)k(y)$. Lorsque $k=G\varkappa$ (en particulier lorsque $\varkappa=\varepsilon_y$, $k=g(.,y)$) on écrit $P_t^{/}$, $P_t^{/x}$ au lieu de $P_t^{/k}$. Les lois de processus relatives à ce semi-groupe s'écrivent $P^{\theta/k}$, $P^{\theta/\varkappa}$.

Les mesures $P^{\theta/\varkappa}$ possèdent suffisamment de continuité absolue par rapport aux mesures P^θ pour que cela ait un sens de parler d'une <u>même fonctionnelle additive</u> (A_t) sous ces deux familles de lois. Mais la mesure associée change. Par exemple, à la fonctionnelle additive $A_t = \int^t f(X_s)ds$ correspond $f.\eta$ sous le premier semi-groupe, $f.\eta^{/k}$ sous le second, c'est à dire $k^2.(f.\eta)$. Nous admettrons que cette règle est générale, i.e. que μ est toujours remplacée par $k^2.\mu$. Donnons nous alors n <u>fonctionnelles</u> $A^1,\ldots,A^n$, associées aux mesures $\mu_1,\ldots,\mu_n$ pour le <u>premier</u> semi-groupe, et calculons pour le <u>second</u> semi-groupe, en utilisant la formule (33)

$$E^{\cdot/k}[A^1_\infty \dots A^n_\infty] = \Sigma_\sigma \int \frac{g(\cdot,y_1)}{k(\cdot)k(y_1)} k(y_1)\mu_{\sigma(1)}(dy_1)k(y_1) \frac{g(y_1,y_2)}{k(y_1)k(y_2)}$$
$$\dots \frac{g(y_{n-1},y_n)}{k(y_{n-1})k(y_n)} k(y_n)\mu_{\sigma(n)}(dy_n)k(y_n) \ .$$

On voit que tous les k disparaissent, excepté le premier $1/k(\cdot)$ et le dernier $k(y_n)$. Il est plus joli de les faire disparaître aussi en remplaçant $k(y_n)$ par $\int g(y_n,y_{n+1})\varkappa(dy_{n+1})$, et en intégrant par rapport à $k(\cdot)\theta(d\cdot)$ en tête. Il nous reste alors la formule de Dynkin

$$(34)\quad E^{k\theta/k}[A^1_\infty \dots A^n_\infty] = \Sigma_\sigma \int \theta(dy_0)g(y_0,y_1)\mu_{\sigma(1)}(dy_1)g(y_1,y_2)\dots$$
$$\dots g(y_{n-1},y_n)\mu_{\sigma(n)}(dy_n)g(y_n,y_{n+1})\varkappa(dy_{n+1})$$

Le côté droit ne fait intervenir que des données analytiques liées au premier semi-groupe, et la correspondance entre les μ_i et les A^i est celle du premier semi-groupe. Seule <u>l'interprétation probabiliste</u> fait intervenir une espérance relative au second semi-groupe. On notera en particulier que les μ_i sont d'énergie finie par rapport au <u>premier</u> semi-groupe, et n'ont pas besoin de l'être par rapport au second.

3. Nous allons maintenant rapprocher cette formule de la formule (27).

Pour cela, nous supposons que les mesures θ et $\varkappa$ sont d'énergie finie, et nous leur associons deux vecteurs (notés respectivement p et q) dans l'espace $\underline{\underline{H}}$. Aux mesures d'énergie finie μ_i nous associons les opérateurs

$$\alpha_i(\phi) = (G\phi)\cdot\mu_i$$

(il s'agit pour l'instant d'un calcul formel). Alors la formule (34) s'écrit

$$(35)\quad E^{k\theta/\varkappa}[A^1_\infty \dots A^n_\infty] = \Sigma_{\sigma\in\mathfrak{S}} (p, \alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(n)}q)$$

qui est parfaitement analogue à (27), de sorte que l'on a bien envie d'introduire les éléments $\lambda_i=\lambda_{\alpha_i}$ de l'espace de Fock supersymétrique, et d'écrire

$$(36)\quad E^{k\theta/\varkappa}[A^1_\infty \dots A^n_\infty] = E[\overline{Z}_p Z_q \lambda_{\alpha_1}\dots\lambda_{\alpha_n}] \text{ (produit de Wiener) .}$$

Malheureusement, les opérateurs α_i ne sont pas du type envisagé dans la partie algébrique de l'exposé (i.e. des opérateurs de rang fini !) et il se pose des problèmes très délicats lorsqu'on veut interpréter rigoureusement cette relation.

Le cas simple où la formule (36) est rigoureuse est celui où les mesures ponctuelles sont d'énergie finie, i.e. où $g(\cdot,\cdot)$ est finie sur la diagonale. Dans ce cas, la fonctionnelle associée à ε_x est appelée le <u>temps local</u> de x, et notée (L_t^x) (plus exactement, c'est <u>un</u> temps local de x, au sens de la théorie des processus de Markov). Comme $G\phi(x) = \langle\varepsilon_x,\phi\rangle$, l'opérateur α associé à ε_x est alors l'opérateur de rang 1 $(\varepsilon_x)'\otimes\varepsilon_x$, et nous sommes sous les hypothèses du §II. Nous renverrons le lecteur aux articles de Dynkin et de Le Jan cités à la fin pour les applications de l'espace de Fock aux calculs sur les temps locaux. Ici, nous préférons porter l'attention sur le cas où les temps locaux n'existent pas.

Pour fixer les idées, nous travaillerons sur le semi-groupe brownien, avec un facteur exponentiel en dimension 2 pour le rendre transient. Une grande partie de ce qui suit s'étend à des semi-groupes plus généraux, mais peu importe.

Introduisons les mesures $\varepsilon_y^t=\varepsilon_y P_t$, de potentiel $g_t(.,y)=\int_t^\infty p_s(.,y)ds$ Ce potentiel étant borné, ε_y^t est d'énergie finie, et le vecteur λ_x^t associé à $(\varepsilon_x^t)'\otimes\varepsilon_x^t$ est bien défini. On fait alors tendre t vers 0 : il n'y a pas d'espoir (en l'absence de temps local) d'obtenir un vecteur limite λ_x dans l'espace de Fock, mais on peut considérer (λ_x) comme un "champ généralisé" , et se demander par quelle sorte de mesure μ il faut "étaler" le champ pour que $\int\lambda_x\mu(dx)$ représente un véritable élément de l'espace de Fock - en espérant bien entendu que les mesures à densité C^∞ seront parmi les bonnes mesures. Nous verrons en fait que la singularité de $g(x,y)$ sur la diagonale est trop forte en dimension ≥ 3 pour que cet espoir soit réalisé.

<u>Nous commençons par revenir à l'algèbre</u>, et par calculer diverses quantités utiles.

a) <u>Calculons</u> (u et v désignant deux éléments de $\underline{\underline{H}}$) <u>la norme de</u> $\lambda_{u'\otimes u}$, et plus généralement, le produit scalaire $\langle\lambda_{u'\otimes u},\lambda_{v'\otimes v}\rangle$. On a (en revenant à l'interprétation brownienne)

$$\lambda_{u'\otimes u} = \overline{Z}_u \circ Z_u - X_u\wedge Y_u$$

$$\langle\lambda_{u'\otimes u},\lambda_{v'\otimes v}\rangle = \langle\overline{Z}_u \circ Z_u,\overline{Z}_v \circ Z_v\rangle + \langle X_u\wedge Y_u,X_v\wedge Y_v\rangle$$

Ces deux termes sont en fait égaux. Le premier vaut

$$\langle \int u(s)u(t)d\overline{Z}_s dZ_t, \int v(s)v(t)d\overline{Z}_s dZ_t \rangle = \langle u,v\rangle^2 \text{ (int. d'Ito sur } \mathbb{R}_+^2 \text{)}$$

Ainsi nous avons

$$(37)\qquad \langle \lambda_{u'\otimes u},\lambda_{v'\otimes v} \rangle =2\langle u,v\rangle^2 .$$

b) Plus généralement, on peut voir que si α est un opérateur de rang fini (de la forme $\Sigma_i\ u_i'\otimes v_i$), on a

$$(38)\qquad \|\lambda_\alpha\|^2 = 2\ \|\alpha\|_{HS}^2 .$$

c) Désignons par λ_u^{*n} la n-ième puissance de Wick-Grassmann de $\lambda_{u'\otimes u}$.

Un calcul analogue au précédent nous donne

$$(39) \qquad \langle \lambda_u^{*n},\lambda_v^{*n} \rangle = c\langle u,v\rangle^{2n} \ , \ c=2(n!)^2 \ .$$

<u>Faisons alors un raisonnement formel</u> : nous voudrions définir des champs généralisés λ_x^{*n} , que nous étalerons en $\int\lambda_x^{*n}\mu(dx)$; nous aurons

$$\langle \lambda_x^{*n},\lambda_y^{*n} \rangle = cg(x,y)^{2n}$$

et par conséquent, pour les vecteurs de champ étalés par la mesure μ

$$\|\int\mu(dx)\lambda_x^{*n}\|^2 = c\int\mu(dx)\mu(dy)g(x,y)^{2n}$$

Pour d=2, la singularité de $g(x,y)$ est en $-\log|x-y|$, et $g(x,y)^{2n}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^{2n}$ pour tout n . Mais pour d>2, il n'existe aucune mesure <u>positive</u> absolument continue μ telle que cette intégrale soit finie (cependant, on doit pouvoir la définir pour des mesures non positives, dont les moments d'ordre suffisamment élevés sont nuls : cette question n'a pas été étudiée par Le Jan).

Nous nous plaçons en dimension 2, pour rendre rigoureux ce qui précède. Nous avons d'abord $\langle\varepsilon_x^t,\varepsilon_y^s\rangle = g_{s+t}(x,y)$, et par conséquent

$$\langle \lambda_x^{t*n},\lambda_y^{s*n} \rangle = cg_{s+t}^{2n}(x,y)$$

Posons $\int\mu(dx)\lambda_x^{t*n} = K_t$, de sorte que $\langle K_t,K_s\rangle = c\int g_{s+t}^{2n}(x,y)\mu(dx)\mu(dy)$ $= h(s+t)$, où la fonction $h(t)$ est (par convergence dominée) continue bornée. Nous sommes ici dans les vecteurs réels, donc inutile de distinguer $\langle\ ,\ \rangle$ et $(\ ,\ )$: $\|K_t-K_s\|^2=h(2t)+h(2s)-2h(t+s)$, et il est alors clair que la limite en 0 existe.

> Il est intéressant de remarquer que ce calcul ne fait pratiquement pas intervenir la supersymétrie : le rôle de celle-ci a simplement consisté à doubler les constantes dans le calcul ! L'existence des ⟨⟨ puissances renormalisées du champ d'occupation ⟩⟩ , i.e. de la possibilité d'étaler certains produits de Wick formels par des mesures μ assez régulières, a été établie par Dynkin dans le cas de l'espace de Fock symétrique.
> En revanche, on n'a rien d'aussi simple que (36) dans une situation purement symétrique (ou antisymétrique).

Nous ne ferons qu'esquisser la fin de l'article de Le Jan, en omettant les détails techniques, qui sont délicats.

Considérons une suite θ_m de mesures suffisamment régulières convergeant vers la masse unité ε_0 ; par translation nous obtenons des mesures θ_m^x convergeant vers ε_x . Les fonctionnelles additives $(A_t^{x,m})$ correspondantes "devraient" converger vers le temps local en x, mais celui-ci n'existe pas. On fixe aussi une mesure μ , ayant par exemple une densité C^∞ à support compact.

Le problème probabiliste consiste à trouver des polynômes $F_m(z)$, de degré n et de coefficient dominant 1, tels que les v.a. $\int\mu(dx)F_m(A^{x,m}_\infty)$ aient une limite non triviale lorsque $m\to\infty$. L'idée naturelle consiste à algébriser le problème, en remplaçant les $A^{m,x}$ par les $\lambda^{m,x}=\lambda_{(\theta^x_m)'\otimes\theta^x_m}$ qui leur correspondent ; on écrit alors (28)

$$(\lambda^{m,x})^{*n} = \sum_{k\leq n} b_k(\lambda^{m,x})^k q_m^{n-k} \qquad (q_m = \|\theta_m\|^2)$$

et l'on prend $F_m(z) = \sum b_k z^k q_m^{n-k}$, puisqu'on sait que $\int\mu(dx)(\lambda^{m,x})^{*n}$ admet une limite non triviale.

Ceci est le principe de la méthode, mais il reste à établir que les $\int\mu(dx)F_m(\lambda^{m,x})$ (produits de Wiener) convergent effectivement dans l'espace de Fock, et que cela entraîne la convergence dans L^2 des v.a. correspondantes. L'emploi de l'espace de Fock supersymétrique permet ainsi à Le Jan de remonter sur l'espace de Fock la totalité du calcul.

REFERENCES

[1] BEREZIN (F.A.). The method of second quantization. Ed. anglaise Academic Press 1966.

[2] DYNKIN (E.B.). Polynomials of the occupation field and related random fields. J. Funct. Anal. 58, 1984, p. 20-52.

[3] --- . Gaussian and non-gaussian random fields associated with Markov processes. J. Funct. Anal. 55, 1984, p. 344-376.

[4]. KUPSCH (J.). Measures for fermionic integration. Fortschr. Phys. 35, 1987, p. 415-436.

[5] LE JAN (Y.). Temps local et superchamp. Sém. Prob. XXI, Lecture Notes in M. 1247, 1987.

[6] --- On the Fock space representation of functionals of the occupation field and their renormalization.

[7] CYCON (H.L.) FROESE (R.G.) KIRSCH (W.) SIMON (B.). Schroedinger Operators. Springer 1987.

NOTE FINALE. M. Emery m'a fait remarquer que l'intégrale stochastique multiple (1) est anticipante, puisque les s_i et les t_j ne sont pas rangés en ordre croissant dans leur ensemble. Pour lui donner un sens, on peut convenir (par exemple) d'intégrer en Y d'abord, puis en X (en incluant Y dans la tribu initiale de X).

Signalons d'autre part que Le Jan appelle <u>produits de Wick</u> les deux produits de Wick et de Grassmann, et <u>produit de Wiener-Grassmann</u> notre produit de Wiener antisymétrique.

ELEMENTS DE PROBABILITES QUANTIQUES. X

CALCULS AVEC DES NOYAUX DISCRETS

Ceci n'est pas à proprement parler un exposé, mais une note pédagogique sur le calcul de Maassen. Le modèle quantique le plus simple, après le spin (exposé II) est l'oscillateur harmonique (exposé III), c'est à dire l'espace de Fock construit sur un Hilbert de dimension 1. Que donne dans ce cas le calcul sur les noyaux ? Nous allons traiter celui-ci en partant des résultats déjà vus en dimension infinie (cela n'a rien de choquant : il est souvent très commode de traiter les problèmes sur les v.a. gaussiennes en dimension finie au moyen du mouvement brownien et du calcul stochastique).

RAPPELS

Nous travaillons sur l'espace de Fock de l'exposé IV, i.e. l'espace L^2 associé au mouvement brownien standard issu de 0 (X_t). Les vecteurs de l'espace de Fock admettent une représentation en chaos de Wiener, que nous écrivons sous la forme concise

(1) $$f = \int \hat{f}(A)dX_A \qquad \hat{f}\in L^2(\mathcal{P})$$

$\mathcal{P}$ étant l'ensemble des parties finies $A=\{s_1<s_2\dots<s_n\}$ de $\mathbb{R}_+$; $n=|A|$ varie de 0 à $+\infty$; dA représente $ds_1\dots ds_n$ sur $\mathcal{P}_n$, et la masse unité en l'unique point $\{\emptyset\}$ de $\mathcal{P}_0$; dX_A représente $dX_{s_1}\dots dX_{s_n}$ sur $\mathcal{P}_n$, et la constante 1 sur $\mathcal{P}_0$.

Nous utiliserons la formule de multiplication des intégrales stochastiques : si f et g sont des v.a. admettant la représentation (1), leur produit ordinaire $h=fg$ admet une représentation (1) donnée par

(2) $$\hat{h}(A) = \int \Sigma_{U+V=A}\ \hat{f}(U+M)\hat{g}(V+M)dM$$

où le symbole + désigne une réunion disjointe (noter que la variable d'intégration M parcourant $\mathcal{P}$ est p.s. disjointe de la partie finie donnée A).

Nous utiliserons la représentation des opérateurs au moyen de noyaux de Maassen (simples : à deux arguments) : si un opérateur K s'écrit

(3) $$K = \int K(A,B)da_A^+da_B^-$$

l'effet $g=Kf$ de l'opérateur K sur la v.a. f est donné par une représentation du type (1), avec

(4) $$\hat{g}(A) = \int \Sigma_{U+V=A}\ K(U,M)\hat{f}(V+M)dM$$

sous réserve que cela représente effectivement un vecteur, i.e. que la fonction $\hat{g}$ soit bien définie et appartienne à $L^2(\mathcal{P})$ - mais dans cette note nous nous intéressons surtout aux aspects algébriques des calculs.

Nous utiliserons la formule de composition des noyaux, due à Maassen : si J et K sont des opérateurs représentés sous la forme (3), leur composé L=JK est aussi représentable sous la forme (3), avec

$$(5) \qquad L(A,B) = \int \Sigma_{\substack{U+V=A \\ W+Z=B}} K(U,W+M)L(V+M,Z)dM \quad .$$

Voilà tout ce dont nous aurons besoin.

REMARQUE. La formule de multiplication (2) n'est qu'un échantillon, parmi de nombreuses formules définissant des multiplications associatives (non nécessairement commutatives) entre vecteurs de l'espace de Fock. On obtient toute une famille de tels produits en insérant dans la formule (2) un facteur $\lambda^{|M|}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. En particulier pour $\lambda=0$ on obtient le produit de Wick, donné par

$$(2') \qquad \hat{g}(A) = \Sigma_{U+V=A}\ \hat{f}(U)\hat{g}(V) \ .$$

Les physiciens utilisent aussi un produit de Wick d'opérateurs, tout à fait analogue, donné par

$$(5') \qquad L(A,B) = \Sigma_{U+V=A,\ W+Z=B}\ K(U,W)L(V,Z) \quad .$$

CALCULS GAUSSIENS

Considérons n v.a. $f_1,\ldots,f_n$ représentées sous la forme (1), et désignons par h leur produit . Quelle est la représentation (1) pour h ? La formule est la suivante ; elle fait intervenir non pas n, mais n(n-1)/2 variables d'intégration M_{ij} (i<j) parcourant $\mathcal{P}$. On convient de poser $M_{ij}=M_{ji}$ si j>i .

$$(6) \qquad \hat{h}(A) = \int\{\Sigma_{U_1+\ldots+U_n=A} \prod_i \hat{f}_i(U_i + \Sigma_{i\neq j} M_{ij})\}dM_{11}dM_{12}\ldots dM_{n-1,n}$$

Par exemple, pour n=3 , le produit h=efg se représente ainsi

$$\hat{h}(A) = \int \Sigma_{U+V+W=A}\ \hat{e}(U+N+P)\hat{f}(V+M+P)\hat{g}(W+M+N)dMdNdP$$

Le cas particulier le plus intéressant de cette formule est celui où les f_i appartiennent au premier chaos : $\hat{f}_i(B)=0$ si $|B|\neq 1$. Alors dans la formule (6), ou bien on a $|U_i|=1$ et tous les M_{ij} correspondants sont égaux à $\emptyset$, ou bien on a $|U_i|=0$ et un et un seul des M_{ij} est tel que $|M_{ij}|=1$, les autres étant vides. Il en résulte que $\hat{h}(A)=0$ si $|A|$ (qui est aussi le nombre des $U_i\neq\emptyset$) n'est pas de la forme n-2k. Posant alors $A=\{s_1<\ldots<s_{n-2k}\}$, les $U_i\neq\emptyset$ sont de la forme

$$U_{c(1)}=\{s_1\} \ , \ \ldots \ U_{c(n-2k)}=\{s_{n-2k}\}$$

où c est une injection de $\{1,\dots,n-2k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. D'autre part, les M_{ij} non vides sont les $M_{a(i)b(i)}=M_{b(i)a(i)}$, où a et b sont deux injections de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, dont les images sont disjointes et disjointes de l'image de c . L'intégration sur la variable correspondante fait alors apparaître le produit scalaire (bilinéaire, sans conjugaison complexe) $(f_{a(i)},f_{b(i)})$. Finalement

$$(7) \qquad \hat{h}(A) = \Sigma_{a,b,c} \prod_{i=1}^{n-2k} \hat{f}_{c(i)}(s_i) \prod_{j=1}^{k} (f_{a(j)},f_{b(j)}) \;.$$

En particulier, le calcul de l'espérance de la v.a. $h=f_1\dots f_n$ correspond à $A=\emptyset$; elle n'est différente de 0 que si n est pair, $n=2k$, et elle vaut alors

$$(8) \qquad E[f_1\dots f_{2k}] = \Sigma_{a,b} \prod_{j=1}^{k} (f_{a(j)},f_{b(j)})$$

a,b parcourant l'ensemble des couples d'injections de $\{1,..,k\}$ dans $\{1,..,n\}$ à images disjointes. Cette formule établie pour le premier chaos de l'espace de Wiener est universelle (tous les espaces gaussiens de dimension infinie séparables étant isomorphes au premier chaos), et elle est bien entendu tout à fait classique.

Soit (e_i) une base orthonormale du premier chaos, que nous supposerons (pour éviter de trop réfléchir) constituée d'intégrales stochastiques $\int u_i(s)dX_s$ de fonctions <u>réelles</u>. Désignons par $\mathcal{Q}$ l'ensemble des vecteurs d'occupation $\alpha = n_1.i_1+\dots+n_k.i_k$ (la notation rappelle la notation A pour les parties finies de $\mathbb{R}_+$, mais ici $\mathbb{R}_+$ est remplacé par $\mathbb{N}$, et il peut y avoir occupation multiple d'un point). Nous associons à α un élément e_α de l'espace de Fock, qui est le produit de Wick (ou produit symétrique) $(e_{i_1})^{on_1}o\dots o(e^{i_k})^{on_k}$. Posant comme d'habitude $|\alpha|=n_1+\dots+n_k$, $\alpha!=n_1!\dots n_k!$, on a

$$< e_\alpha,e_\beta > = \alpha! \text{ si } \alpha=\beta \text{ , 0 si } \alpha\neq\beta$$

Un élément de l'espace de Fock se développe sous la forme discrète

$$(9) \qquad f = \Sigma_{\alpha\in\mathcal{Q}} \hat{f}(\alpha)e_\alpha/\alpha! \qquad \text{avec} \quad \|f\|^2 = \Sigma_{\alpha\in\mathcal{Q}} |\hat{f}_\alpha|^2/\alpha!$$

On pourrait rapprocher davantage cette écriture de (1) en écrivant $f=\int \hat{f}_\alpha dx_\alpha$ (intégrales stochastiques multiples discrètes) , et pour $\|f\|^2$ $\int|\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$, où $d\alpha$ attribue la masse $1/\alpha!$ au point α . Le produit de Wick et le produit de Wiener de deux vecteurs f et g représentés sous la forme (9) sont donnés respectivement par

$$(10) \qquad \hat{h}(\alpha) = \Sigma_{\rho+\sigma=\alpha} \hat{f}(\rho)\hat{g}(\sigma) \frac{\alpha!}{\rho!\sigma!} \quad (\text{ cf. } (5'))$$

$$(11) \qquad \hat{h}(\alpha) = \Sigma_\mu \Sigma_{\rho+\sigma=\alpha} \hat{f}(\rho+\mu)\hat{g}(\sigma+\mu) \frac{\alpha!}{\rho!\sigma!\mu!} \quad (\text{cf. } (5))$$

Ici + désigne l'addition ordinaire des vecteurs d'occupation.

Ces formules ont été énoncées, mais non démontrées : voici un moyen de les ramener aux formules continues que nous connaissons déjà. Dans l'espace de Fock, considérons d'abord les vecteurs $\int f(A)dX_A$ possédant les propriétés suivantes : $f(A)=0$ si $A\not\subset[0,1[$, et si $A\subset[0,1[$ $f(A)$ ne dépend que de $|A|$. Supposons par exemple que $f(A)=1$ si $|A|=m$, 0 sinon. Le vecteur est alors une intégrale stochastique itérée $\int_0^1 dX_{s_1}\int_0^{s_1} dX_{s_2}\ldots$ c'est à dire $H_m(e_1)/m!$, où H_n est le m-ième polynôme d'Hermite, et $e_1=X_1$ est une v.a. gaussienne centrée réduite. Les formules de multiplication continues vont alors nous donner les formules relatives à l'espace de Fock construit sur $\mathbb{C}$ (oscillateur harmonique). Pour accomoder toute une famille (e_n) de vecteurs gaussiens indépendants, nous considérons dans l'espace de Fock usuel les vecteurs $\int f(A)dX_A$ pour lesquels $f(A)$ ne dépend que de $|A\cap[0,1[|$, $|A\cap[1,2[|,\ldots|A\cap[n,n+1[|\ldots$ Ainsi, si l'on prend

$$f(A) = 1 \text{ si } |A\cap[0,1[|=m_1 \;,\; \ldots\; |A\cap[n,n+1[|=m_n \quad (\text{ 0 sinon })$$

le vecteur $\int f(A)dX_A$ vaut $H_{m_1}(e_1)\ldots H_{m_n}(e_n)/m_1!\ldots m_n!$, en posant $e_i=X_{i+1}-X_i$. Alors les formules (10) et (11) se ramènent aux formules (2) et (2').

FORMULES DE MULTIPLICATION POUR OPERATEURS

Nous arrivons au point essentiel de cette note. Considérons les opérateurs donnés par un noyau de Maassen $\int K(A,B)da_A^+da_B^-$, où

$$K(A,B) = k(m,n) \quad \text{si } A\subset[0,1[,|A|=m \quad B\subset[0,1[,|B|=n$$

et $K(A,B)=0$ si $A\cup B\not\subset[0,1[$. Il est facile de vérifier alors que

$$K = \Sigma_{m,n}\, k(m,n)a^{+m}a^{-n}/m!n! \tag{12}$$

où a^+ et a^- sont les opérateurs de création et d'annihilation de l'espace de Fock construit sur $\mathbb{C}$, et cela fournit un moyen de calculer sur les noyaux de Maassen discrets.

Nous allons présenter ces formules dans le formalisme un peu plus général des formules (9)-(11). L'écriture des vecteurs étant toujours

$$f = \Sigma_{\alpha\in\mathcal{Q}}\, \hat{f}(\alpha)\,\frac{e_\alpha}{\alpha!} \tag{9}$$

nous écrivons les opérateurs sous la forme

$$K = \Sigma_{\alpha,\beta}\, k(\alpha,\beta)\, a_\alpha^+a_\beta^-/\alpha!\beta! \tag{13}$$

L'effet d'un opérateur sur un vecteur étant, si $Kf=g$

$$\hat{g}(\alpha) = \Sigma_\mu\, \Sigma_{\rho+\sigma=\alpha}\,\frac{\alpha!}{\rho!\sigma!\mu!}\,k(\rho,\mu)\hat{f}(\sigma+\mu) \tag{14}$$

D'autre part, nous avons la formule suivante pour la composition de deux noyaux K et L

$$(15) \qquad KL(\alpha,\beta) = \Sigma_{\mu} \Sigma_{\substack{\rho+\sigma=\alpha \\ \tau+\upsilon=\beta}} K(\rho,\tau+\mu)L(\sigma+\mu,\upsilon) \frac{\alpha!\beta!}{\rho!\sigma!\tau!\upsilon!\mu!}$$

Cette formule donne une expression explicite à ce que les physiciens appellent le <u>théorème de Wick</u>, c'est à dire la possibilité de remettre sous la "forme normale" (13), où les créateurs sont à gauche des annihilateurs, un produit de deux opérateurs donnés sous forme normale.
Un autre trait intéressant de la représentation discrète est le fait que les noyaux de Maassen à trois arguments (i.e. faisant intervenir aussi l'opérateur de nombre) y sont inutiles.