PAUL-ANDRÉ MEYER
JIA-AN YAN

# À propos des distributions sur l'espace de Wiener

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 21 (1987), p. 8-26
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__8_0>

# A PROPOS DES DISTRIBUTIONS SUR L'ESPACE DE WIENER

par P.A. MEYER et J.A. YAN

## I. INTRODUCTION

Nous désignons par $(B_t)$ le mouvement brownien linéaire issu de 0, réalisé de manière canonique sur l'espace de Wiener $(\Omega,\mathcal{F},P)$, où $\Omega$ est l'espace de toutes les trajectoires continues nulles en $0$. Tout élément $f$ de $L^2(P)$ admet un développement suivant les chaos de Wiener, noté $f=\Sigma_n f_n$ ; $f_o$ est la constante $E[f]$, et pour $n>0$ $f_n$ est une intégrale stochastique multiple

(1) $$f_n = J_n(\hat{f}_n) = \int_{s_1<\ldots<s_n} \hat{f}_n(s_1,\ldots,s_n)dB_{s_1}\ldots dB_{s_n}$$

étendue au n-èdre croissant $C_n$ de $\mathbb{R}_+^n$. Le ^ indique que l'on réalise une sorte d'analyse harmonique de la v.a. $f$ , et la fonction $\hat{f}_n$ sera appelée le coefficient de $f$ dans le n-ième chaos. Rappelons que les chaos sont orthogonaux, et que

(2) $$\| f_n \|^2_{L^2(P)} = \| \hat{f}_n \|^2_{L^2(C_n)} .$$

Pour $n=0$, on convient que $C_0$ est réduit à un point, muni de son unique loi de probabilité. Nous préférerons écrire le développement sous la forme

(3) $$f_n = J_n(\hat{f}_n) = \frac{1}{n!}I_n(\hat{f}_n) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+^n} \hat{f}_n(s_1,\ldots,s_n)dB_{s_1}\ldots dB_{s_n},$$

où la fonction $\hat{f}_n$ a maintenant été prolongée par symétrie à $\mathbb{R}_+^n$ , et les diagonales sont omises dans l'intégration. Soit de même un second $g = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{g}_n) \in L^2(P)$ ; on a

(4) $$< f,g >_\Omega = \Sigma_n \frac{1}{n!} < \hat{f}_n,\hat{g}_n >_{\mathbb{R}_+^n} .$$

Il existe plusieurs théories des distributions sur l'espace de Wiener ( cf. les références aux travaux de P. Krée ). La plus connue actuellement est celle de S. Watanabe, qui part de l'espace suivant de fonctions-test : ce sont premièrement des fonctions $f=\Sigma_n f_n$ pour lesquelles la suite des normes $\|f_n\|_2$ est à décroissance rapide, de sorte que pour tout $k$ , on peut définir l'élément de $L^2(P)$

(5) $$(I+N)^k f = \Sigma_n (1+n)^k f_n \quad (k\in\mathbb{N}) .$$

Parmi ces fonctions, les fonctions-test sont celles qui satisfont aux conditions

(6) Pour tout $p<\infty$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $\| f \|_{p,k} = \| (I+N)^{k/2} f \|_{L^p} < \infty$ .

Les semi-normes $\|\cdot\|_{p,k}$ forment une famille filtrante de semi-normes, munissant l'espace des fonctions-test d'une topologie localement convexe, et les distributions de S.Watanabe sont les formes linéaires continues sur cet espace. Toute distribution $T$ satisfait donc à une inégalité

(7) $$|\langle T,f\rangle| \leqq C\|f\|_{p,2k} \quad \text{pour un } k \text{ et un } p \ (2\leqq p<\infty) .$$

Le point fort de cette théorie est la richesse de l'espace des fonctions-test : il contient toutes les v.a. $X_t$ , où $X$ est solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients très réguliers. Le point faible est le fait que la structure de l'espace de Wiener n'est pas pleinement utilisée : si $j$ est un isomorphisme ( modulo les ensembles négligeables ) de l'espace mesuré $(\Omega,\mathcal{F},P)$, qui respecte les chaos de Wiener ( donc les espaces $L^p$ et l'opérateur $N$ ), $j$ opère sur les fonctions test et les distributions. Il est facile de définir de tels isomorphismes à partir d'isomorphismes de $(\mathbb{R}_+,dt)$ ne respectant ni l'ordre, ni la continuité.

Au cours de l'année 1985-86 à Strasbourg, nous avons étudié dans un séminaire la théorie des distributions due à T. Hida et ses associés (H.H. Kuo en particulier ). Nous présentons ici cette théorie dans le langage usuel des probabilistes, assez différent de celui de Hida ( qui est le langage des distributions aléatoires de Gelfand ). Nous ne présentons presque aucun résultat qui ne figure déjà chez Hida, mais on pourra constater que nous avons considérablement modifié ( simplifié, croyons nous ) l'exposé et les démonstrations. Nous espérons ainsi faire mieux connaître une théorie qui nous a paru très intéressante.

## II. QUELQUES IDEES GENERALES

1. Pour présenter la partie formelle des travaux de Hida, il est avantageux de travailler sur un espace de fonctions-test aussi petit que possible. Un tel espace est formé des sommes

(8) $$f = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{f}_n)$$

ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls, et où $\hat{f}_n$ est une fonction <u>symétrique</u> appartenant à $\mathcal{D}_n = C_c^\infty(]0,\infty[^n)$ ( nous laissons l'intervalle ouvert en 0, pour éviter le caractère singulier de ce point ).

Désignons par $\mathcal{D}_{ns}$ l'espace de ces fonctions symétriques : l'espace des fonctions-test peut donc s'identifier à la somme directe $\oplus_n \mathcal{D}_{ns}$ ( $\mathcal{D}_{0s}=\mathbb{R}$ ) ; si l'on y tient, on peut le munir de la topologie somme directe localement convexe, et il est alors nucléaire ( en tant que somme directe dénombrable d'espaces nucléaires ). Son dual s'identifie au produit $\prod_n \mathcal{D}'_{ns}$ , qui est aussi nucléaire. Une distribution $T$ sur l'espace de Wiener est donc une suite $(\hat{T}_n)$ de distributions symétriques sur les ouverts $]0,\infty[^n$. Nous écrirons symboliquement

(9) $$T = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{T}_n)$$

la valeur de la distribution (9) sur la fonction-test (8) étant donnée par

(10) $$< T,f > = \Sigma_n \frac{1}{n!} < \hat{T}_n,\hat{f}_n > .$$

COMMENTAIRES. 1) L'idée de considérer des sommes formelles du type (9) est due à K.R. Parthasarathy [1]. C'est la lecture de cet article qui nous a amenés à nous intéresser à la théorie de Hida.

Les espaces considérés par Hida sont plus larges pour les fonctions-test, et plus restreints pour les distributions. Par exemple, dans la représentation (8), Hida permet que les $\hat{f}_n$ appartiennent aux espaces de Sobolev $H^{(n+1)/2}$, et dualement, impose aux $\hat{T}_n$ de (9) d'appartenir aux espaces $H^{-(n+1)/2}$. Le choix de ces espaces tient au lemme de plongement de Sobolev : la condition $\hat{f}_n \in H^{(n+1)/2}$ assure que $\hat{f}_n$ admet un représentant continu. Ces restrictions ne jouant qu'un rôle très accessoire, nous préférons les oublier.

2) Comme en théorie classique des distributions, on utilise la notion de distribution comme une sorte de gros sac où l'on peut tout fourrer, mais en fait étant donnée une distribution concrète $T$ , on cherche à définir $<T,f>$ sur un espace de fonctions $f$ aussi large que possible . Soulignons que l'on ne dispose, pour faire cette extension, que d'un seul moyen : la formule (10). Il faut que chaque $\hat{f}_n$ soit dans le domaine de la distribution $\hat{T}_n$ , et que la série converge.

2. Pour toute fonction $h$ de $L^2(\mathbb{R}_+)$, nous pouvons définir le vecteur exponentiel

(11) $$\mathcal{E}(h) = \exp(\tilde{h} - \tfrac{1}{2}<h,h>) \quad \text{où} \quad \tilde{h} = \int h_s dB_s .$$

Ces vecteurs appartiennent à tous les $L^p$ ($p<\infty$ ). Le développement de $\mathcal{E}(h)$ suivant les chaos de Wiener est

(12) $$\mathcal{E}(h) = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(h^{\otimes n}) .$$

En particulier, prenons $\xi \in C_c^\infty(]0,\infty[)$ - la lettre $\xi$ sera réservée à cet usage ; pour toute distribution $T=\Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{T}_n)$ , $<\hat{T}_n,\xi^{\otimes n}>$ a un sens.

Si la série

(13) $$U_T(\xi) = \Sigma_n \frac{1}{n!} < \hat{T}_n, \xi^{\otimes n} >$$

converge pour tout $\xi$ , nous appellerons sa somme la <u>fonction caractéristique</u> de la distribution $T$ . Hida utilise le nom peu suggestif de << U-functional >>, rappelé par notre notation. Nous pensons que le mot de fonction caractéristique ne peut créer de confusion avec les notions élémentaires désignées d'habitude par ce terme.

Montrons que $U_T$ caractérise $T$ : tout d'abord, la série

$$U_T(t\xi) = \Sigma_n \frac{t^n}{n!} <\hat{T}_n, \xi^{\otimes n}>$$

convergeant pour tout t, sa somme représente une fonction entière de t. On a alors

(14) $$< \hat{T}_n, \xi^{\otimes n}> = \frac{d^n}{dt^n} U_T(t\xi)|_{t=0} \quad .$$

Par polarisation, on en déduit $<\hat{T}_n, \xi_1 \circ \ldots \circ \xi_n>$ ( produit symétrique ), qui vaut aussi $< \hat{T}_n, \xi_1 \otimes . . \otimes \xi_n >$ puisque $\hat{T}_n$ est une distribution symétrique. Il est bien connu que les valeurs de $\hat{T}_n$ sur les fonctions de ce type déterminent $\hat{T}_n$ , et donc $T$ .

La fonction caractéristique joue dans cette théorie le rôle d'une sorte de transformée de Fourier-Laplace. On pourrait songer à une sorte de transformée de Fourier, la <<$\tau$-functional>> de Hida

$$\tau_T(\xi) = < T, e^{i\tilde{\xi}} > = \exp(\|\xi\|^2/2)U_T(i\xi) \quad (\xi \text{ réelle}).$$

En pratique, c'est la fonction caractéristique qui est la notion la plus utile.

Les distributions les plus simples sont celles qui correspondent aux fonctions $g$ appartenant à $L^2$, dont la valeur sur une fonction-test f est simplement $E[gf]$, et la fonction caractéristique vaut $E[g\mathcal{E}(\xi)]$. En particulier, la fonction caractéristique associée à la distribution $T=\mathcal{E}(h)$ ( vecteur exponentiel ) est

(15) $$U_T(\xi) = < \mathcal{E}(h), \mathcal{E}(\xi) > = e^{<h,\xi>}$$

tandis que le coefficient $\hat{T}_n$ du développement de $T$ suivant les chaos de Wiener est la fonction $h^{\otimes n}$ .

3. Les physiciens utilisent parfois une << multiplication >> des variables aléatoires sur l'espace de Wiener, appelée <u>produit de Wick</u>, et notée :XY: ( nous préfèrerons souvent l'écrire X:Y, à la manière usuelle de l'algèbre ). Le produit de Wick de deux intégrales stochastiques multiples $I_m(f_m):I_n(g_n)$ est égal à $I_{m+n}(f_m \circ g_n)$, où $f_m \circ g_n$ est le produit tensoriel symétrique de ces deux fonctions. De même, le produit de Wick $\mathcal{E}(f):\mathcal{E}(g)$ de deux vecteurs exponentiels vaut $\mathcal{E}(f+g)$

( tandis que le produit ordinaire vaut $\mathcal{E}(f+g)e^{\langle f,g\rangle}$ ). Tout cela suggère de prendre comme expression du produit de Wick de deux distributions $R=\Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(\hat{R}_n)$, $S=\Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(\hat{S}_n)$ la distribution $T=\Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(\hat{T}_n)$, où

(16) $$\hat{T}_n = \Sigma_{k+m=n} \frac{n!}{k!m!} \hat{R}_k \circ \hat{S}_m$$ ( produit tensoriel symétrique de distributions ) .

Il est alors facile de voir que si R et S admettent des fonctions caractéristiques, il en est de même de T :

(16') $$U_T(\xi) = U_R(\xi)U_S(\xi) \quad .$$

L'analogie entre fonction caractéristique et transformée de Fourier montre que l'on doit penser au produit de Wick comme à une sorte de convolution plutôt qu'à une multiplication. L'opération : est associative et commutative.

Soient $F(z)$ une fonction entière, et $T$ une distribution complexe. Posons $T=c+S$, où $c$ est une constante et $S$ a un coefficient nul dans le chaos de Wiener d'ordre 0 ; soit $G(z)=F(c+z)=\Sigma_n g_n z^n$ . Comme le développement de Wiener de $S^{:n}$ ne commence qu'au n-ième chaos, la série

$$R = \Sigma_n g_n S^{:n}$$

représente une distribution, et nous poserons $R=G(:S)=F(:T)$ ( la notation usuelle est $:G(S):$, $:F(T):$). Si $T$ admet une fonction caractéristique, on a $U_R(\xi)=G\circ U_S(\xi)=F\circ U_T(\xi)$.

## III. QUELQUES EXEMPLES

La plus grande partie de l'exposé va maintenant être consacrée à une liste d'exemples, empruntés à Hida pour la plupart. Pour comprendre certains d'entre eux, il est bon de rappeler qu'en théorie classique des distributions, il est fréquent qu'une distribution apparaisse comme la densité formelle d'une mesure qui n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ( c'est le cas de la « fonction delta », qui est la densité formelle de la masse unité en 0 par rapport à la mesure dx ). Cette situation va se présenter aussi en dimension infinie, les mesures usuelles étant très fréquemment singulières par rapport à la mesure de Wiener. Ajoutons en passant que l'idée familière qui identifie les distributions positives aux mesures positives est liée à la compacité locale, et n'a plus cours en dimension infinie.

1. <u>Distributions au sens de S. Watanabe</u>. Par définition, une telle distribution est une forme linéaire continue $T$ sur l'espace des fonctions-test de Watanabe. Or un élément $f_n=\frac{1}{n!}I_n(\hat{f}_n)$ du n-ième chaos de Wiener est une fonction-test de Watanabe, satisfaisant pour $p\geq 2$ à l'inégalité $\|f_n\|_p \leq (p-1)^{n/2}\|f_n\|_2$ ( th. d'hypercontractivité de Nelson ).

Définissons alors une forme linéaire sur $L^2_{sym}(\mathbb{R}^n_+)$ par la formule

$$< \hat{T}_n, \hat{f}_n > = n! < T, f_n > .$$

L'inégalité $|<T,f>| \leqq C\|f\|_{p,2k}$ pour k,p assez grands ($p \geqq 2$) exprime la continuité de T ; elle entraîne

$$|<\hat{T}_n,\hat{f}_n>| = n!|<T,f_n>| \leqq n!C\|(1+n)^k f_n\|_p \leqq Cn!(1+n)^k(p-1)^{n/2}\|f_n\|_2$$
$$= C\sqrt{n!}(1+n)^k(p-1)^{n/2}\|\hat{f}_n\|_2$$

donc $\hat{T}_n$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, avec une norme $\|\hat{T}_n\|_2 \leqq C\sqrt{n!}M^n$ ( ou $CM^n$ si l'on se restreint au n-èdre croissant $C_n$ ). Ces inégalités ne suffisent certainement pas à caractériser les formes linéaires $T = \Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(\hat{T}_n)$ continues au sens de Watanabe.

On voit donc que les distributions de Watanabe se développent suivant les chaos de Wiener comme des v.a. ( i.e. ont des coefficients dans $L^2$ ), mais la série de Wiener ne converge qu'en un sens faible. Les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(h)$ étant des fonctions-test au sens de Watanabe, et la série $\mathcal{E}(h) = \Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(h^{\otimes n})$ convergeant pour la topologie des fonctions-test, la fonction caractéristique de la distribution de Watanabe T est égale à $U_T(\xi) = < T, \mathcal{E}(\xi) >$ .

2. Exemple plus spécial : distributions $f(B_t)$ .

L'un des résultats les plus remarquables de Watanabe concerne la composition d'une distribution tempérée T sur $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur de fonctions-test, satisfaisant à une condition convenable de non-dégénérescence. Nous allons traiter ici un cas très particulier, où n=1 et la fonction-test appartient au premier chaos.

Nous allons poser $\tilde{h} = \int h_s d\tilde{B}_s$ , avec $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Le cas le plus important est celui où $h = I_{]0,t]}$, et $\tilde{h} = B_t$. Soit d'abord une fonction f appartenant à l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz. Quels sont la fonction caractéristique, le développement suivant les chaos de Wiener, de la v.a. $f\circ\tilde{h}$ ?

Soit $F(u) = \int e^{iux}f(x)dx$ la transformée de Fourier de f . On a

$$f\circ\tilde{h} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-iu\tilde{h}} F(u)du = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{E}(-iuh)e^{-u^2<h,h>/2}F(u)du$$

Comme la fonction caractéristique de $\mathcal{E}(-iuh)$ est $e^{-iu<h,\xi>}$ et le développement suivant les chaos $\Sigma_n \frac{1}{n!}I_n((-iuh)^{\otimes n})$, on a

$$f\circ\tilde{h} = \Sigma_n \frac{a_n}{n!}I_n(h^{\otimes n}) \ , \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int(-iu)^n e^{-<h,h>u^2/2}F(u)du$$

$$U_{f\circ\tilde{h}}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int \exp(-iu<h,\xi> - \frac{u^2}{2}<h,h>)F(u)du$$
$$= \phi(<h,\xi>)$$

où $\phi = f*\gamma$, convolution de f avec la densité gaussienne de variance $<h,h>$.

Supposons maintenant que T soit une distribution tempérée, que nous approchons ( au sens des distributions tempérées classiques ) par une suite $(f_n)$ d'éléments de $\mathcal{S}$. D'après les résultats de Watanabe, les v.a. $f_n\circ\tilde{h}$ convergent vers $T\circ\tilde{h}$ au sens des distributions de Watanabe. En particulier, les coefficients des développements suivant les chaos, et les fonctions caractéristiques, convergent aussi. Nous avons donc encore

$$
(17)\qquad \begin{aligned} T\circ\tilde{h} &= \Sigma_n \frac{a_n}{n!} I_n(h^{\otimes n}),\quad a_n=\int(-iu)^n e^{-u^2<h,h>/2}F(u)\frac{du}{2\pi} = <D^nT,\gamma> \\ U_{T\circ\tilde{h}}(\xi) &= \phi(<h,\xi>),\quad \phi=T*\gamma\ , \end{aligned}
$$

$\gamma$ étant comme plus haut la densité gaussienne de variance $<h,h>$.

Les deux cas les plus intéressants sont

- D'abord le cas où $\tilde{h}=B_t$, et la distribution T vaut $\delta(x-a)$. Alors $\delta(B_t-a)$ est la <u>fonction delta de Donsker</u>, souvent citée par Hida. Formellement, le temps local $L_t^a$ vaut $\int_0^t \delta(B_s-a)ds$, donc cette distribution sur l'espace de Wiener représente la dérivée du temps local en t. Sa fonction caractéristique est $\gamma(\int_0^t \xi_s ds -a)$, où $\gamma$ est la densité gaussienne $p_t$ de variance $t$. On trouve sans difficulté

$$
(18)\qquad \delta(B_t-a) = p_t(a)\ :\exp\left(-\frac{B_t^2-2aB_t}{2t}\right):\ .
$$

- Ensuite, le cas où la distribution T vaut $v.p.(\frac{1}{x})$ ( transformée de Fourier $F(u)=\pi i\,\mathrm{sgn}\,u$ ). En effet, le processus $\int_0^t ds/B_s$ ( dont la dérivée formelle est $1/B_t$ ), défini en valeur principale et étudié par Yamada et Yor, est un exemple de processus de Dirichlet à variation non bornée, mais à variation quadratique nulle, qui intervient naturellement dans beaucoup de problèmes liés à l'étude fine du $m^t$ brownien. On voit sur la première formule (17) que les coefficients $a_n$ associés à $F(u)=1$ et à $F(u)=\mathrm{sgn}\,u$ sont en quelque sorte complémentaires.

REMARQUE. Soit $f_n=1/2n$ sur $[a-1/n,a+1/n]$ , $f_n=0$ hors de cet intervalle. La suite $(f_n)$ converge au sens des distributions tempérées vers $\delta(x-a)$, donc $f_n\circ B_t$ converge ( au sens des distributions de Watanabe ) vers $\delta(B_t-a)$. $E[f_n\circ B_t]$ tend vers $p_t(a)$, et la loi de densité $f_n\circ B_t/E[f_n\circ B_t]$ converge étroitement vers la loi du pont brownien entre $(0,0)$ et $(t,a)$. On voit donc que la distribution $\delta(B_t-a)/p_t(a)$ est la densité formelle de la loi du pont brownien par rapport à la mesure de Wiener.

3. <u>La « valeur en 0 »</u> . Cet exemple n'est pas une distribution de Watanabe, et ne figure pas non plus chez Hida.

L'espace CM des fonctions de Cameron-Martin $\tilde{h}(t) = \int_0^t h(s)ds$, h parcourant $L^2(\mathbb{R}_+)$, est de mesure nulle dans l'espace de Wiener, mais en un sens il doit être considéré comme « portant » la mesure, le gros espace de Wiener $\Omega$ étant une sorte de complétion de CM destinée à rendre complètement additive la mesure gaussienne canonique de l'espace CM ( muni de la structure hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+)$). Nous allons tenter de définir une masse unité $\varepsilon_{\underset{\sim}{h}}$ en tout point $\underset{\sim}{h}$ de CM , en tant que distribution sur $\Omega$ , dont nous cherchons le développement suivant les chaos de Wiener.

Une masse unité est une forme linéaire multiplicative pour le produit ordinaire des fonctions-test ( $\varepsilon(fg)=\varepsilon(f)\varepsilon(g)$ ), et par conséquent satisfait à l'identité $\varepsilon(e^f)=e^{\varepsilon(f)}$. D'autre part, il est naturel de demander que $\varepsilon_{\underset{\sim}{h}}(\int \xi_s dB_s)$ soit égal à $\langle h,\xi\rangle$ . La distribution $T=\varepsilon_{\underset{\sim}{h}}$ doit donc avoir pour fonction caractéristique

(19) $$U_T(\xi) = \langle \varepsilon_{\underset{\sim}{h}}, \mathcal{E}(\xi) \rangle = \exp(\langle h,\xi\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\xi,\xi\rangle) .$$

Nous allons calculer les distributions $\hat{T}_n$ correspondantes. Pour cela, nous avons besoin d'une définition. Pour tout entier $k\leqq n/2$, appelons k-diagonale dans $\mathbb{R}_+^n$ un ensemble de la forme

$$D = \{s_{i_1}=s_{j_1},\dots,s_{i_k}=s_{j_k}\}$$

où $i_1,j_1,\dots,i_k,j_k$ sont des indices tous distincts. Nous désignerons par $\Delta_k$ l'ensemble des k-diagonales ( le nombre des k diagonales est $n!/2^k k!(n-2k)!$ ) . Nous paramétrons la k-diagonale D ci-dessus par les coordonnées $s_{i_1},\dots,s_{i_k}$ et les n-2k coordonnées restant libres $s_{\ell_1},\dots,s_{\ell_{n-2k}}$, et munissons D de la mesure image

(20) $$d\mu(h,D) = h(s_{\ell_1})\dots h(s_{\ell_{n-2k}})ds_{i_1}\dots ds_{i_k}ds_{\ell_1}\dots ds_{\ell_{n-2k}}$$

sur $\mathbb{R}_+^n$ , portée par D . Enfin, appelons $\mu_k(h)$ la somme $\Sigma_D\ \mu(h,D)$ étendue à toutes les k-diagonales, qui est une mesure symétrique sur $\mathbb{R}_+^n$ . Si h=0, $\mu_k(0)$ est nul pour $k\neq n/2$ .

Ces définitions étant données, calculons d'abord la distribution $R=\varepsilon_0$ . Nous avons

$$\exp( -\frac{t^2}{2}\langle\xi,\xi\rangle ) = \Sigma_n \langle \hat{R}^n, \xi^{\otimes n} \rangle \frac{t^n}{n!}$$

donc $\hat{R}_n=0$ pour n=2k+1, et pour n=2k $\langle\hat{R}_{2k}, \xi^{\otimes 2k}\rangle = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!}\langle\xi,\xi\rangle^k$. On en déduit

(21) $$\hat{R}_{2k} = (-1)^k\mu_k(0)$$

( le coefficient $(2k)!/2^k k!$ étant le nombre des k-diagonales de $\mathbb{R}_+^{2k}$). Comme (21) n'est pas un élément de $L^2(\mathbb{R}_+^{2k})$, on voit que $\varepsilon_0$ n'est pas une distribution au sens de Watanabe.

Nous passons ensuite à $T=\varepsilon_h$ , qui est la translatée par $\underset{\sim}{h}$ de $R=\varepsilon_0$ . On a $U_T(\xi)=\exp(\langle h,\xi\rangle)U_R^{\sim}(\xi) = U_S(\xi)U_R(\xi)$ d'après (19), où S est la distribution $\mathcal{E}(h)$. Donc $T=S:R$, et l'on peut calculer $\hat{T}_n$ par

(16)-(16'). Le résultat est

$$\hat{T}_n = \Sigma_{k \leqq n/2} (-1)^k \mu_k(h) \quad . \tag{22}$$

COMMENTAIRES. Cet exemple appelle d'assez nombreuses remarques ( qui s'appliqueront aussi aux exemples ultérieurs ).

a) Les distributions $\hat{T}_n$ n'appartiennent pas à $L^2$, mais sont assez peu singulières : ce sont des mesures ( et plus précisément, absolument continues sur des sous-variétés de dimension $\geqq n/2$ ). Jusqu'à maintenant, l'analyse de Wiener n'a jamais vraiment utilisé de coefficients plus singuliers que des mesures. Mais alors, au lieu d'écrire $T$ sous la forme $T=\Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{T}_n)$ , où $\hat{T}_n$ est une mesure symétrique, on peut revenir à la première forme (1), $T=\Sigma_n J_n(\hat{T}_n)$, où $\hat{T}_n$ est une mesure sur le n-èdre $\overline{C}_n=\{s_1 \leqq \cdots \leqq s_n\}$ dans $]0,\infty[^n$, avec

$$< T,f > = \Sigma_n < \hat{T}_n,\hat{f}_n >_{\overline{C}_n} \quad .$$

Cela simplifie les problèmes combinatoires. Par exemple, dans le cas de $\varepsilon_0$ , $\overline{C}_{2k}$ ne contient plus qu'une seule k-diagonale, qui est $\{s_1=s_2,\ldots,s_{2k-1}=s_{2k}\}$.

b) La remarque faite plus haut, suivant laquelle translater une distribution de $\underset{\sim}{h}$ revient à faire le produit de Wick avec $\mathcal{E}(h)$, est un fait général. En effet, soit $T$ une distribution, et soit $T'$ sa translatée par $\underset{\sim}{h}$ ( $<T',f> = <T,f(\cdot+\underset{\sim}{h})>$ ; attention, si $T$ est associée à une fonction g, $T'$ n'est pas associée à $g(\cdot-\underset{\sim}{h})$, mais à $g(\cdot-\underset{\sim}{h})\mathcal{E}(h)$ ) ; on a $U_{T'}(\xi) = e^{<h,\xi>}U_T(\xi) = U_{\mathcal{E}(h):T}(\xi)$ .

c) Introduisons les polynômes d'Hermite $H_n(x,u)$ par leur fonction génératrice

$$e^{tx-ut^2/2} = \Sigma_n \frac{t^n}{n!} H_n(x,u) \tag{23}$$

( les polynômes d'Hermite usuels sont $H_n(x)=H_n(x,1)$, et $H_n(x,u)$ vaut $u^{n/2}H_n(x/\sqrt{u})$). Alors la distribution $\hat{T}_n$ satisfait à

$$< \hat{T}_n, \xi^{\otimes n} > = H_n(<h,\xi>,<\xi,\xi>) \qquad ( \text{cf. } (19)).$$

d) Soit $\gamma$ la loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$. Les polynômes d'Hermite classiques

$$H_n(x) = \Sigma_{k \leqq n/2} (-1)^k x^{n-2k} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \tag{24}$$

forment une base orthogonale de $L^2(\gamma)$, avec $\|H_n\|^2_{L^2} = n!$ . Désignons par $\tau(x)=\Sigma_n c_n H_n(x)/\sqrt{n!}$ la densité formelle de la masse unité $\varepsilon_0$ par rapport à $\gamma$ , de sorte que si $f= \Sigma_n a_n H_n(x)/\sqrt{n!}$ est une combinaison linéaire finie de polynômes d'Hermite, on a formellement

$$<\varepsilon_0,f> = <f,\tau>_\gamma = \Sigma_n\, a_n c_n \;=\; f(0) = \Sigma_n\, a_n H_n(0)$$

d'où en utilisant (24)

$$c_{2k+1}=0 \quad , \quad c_{2k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad .$$

L'analogie avec (21) est claire.

e) On peut en fait définir une distribution $\varepsilon_\tau$ sur l'espace de Wiener pour <u>toute</u> distribution $\tau$ sur $]0,\infty[$ ( ce qui montre qu'en un sens, et conformément aux idées de Hida, le véritable espace de trajectoires utilisé est l'espace de toutes les distributions ). Il suffit de la définir par sa fonction caractéristique

$$U_T(\xi) = \exp(<\dot\tau,\xi> - \tfrac{1}{2}<\xi,\xi>) \qquad ( \dot\tau \text{ est la dérivée de } \tau )$$

Pour $\tau=\underset{\sim}{h}$ , on a $<\dot\tau,\xi>=<h,\xi>$ comme il convient. Bien entendu, les coefficients de cette distribution n'ont plus de raison d'être des mesures.

4. <u>Mesures gaussiennes</u>. Un autre exemple de distribution donnant une densité formelle de mesure singulière par rapport à la mesure de Wiener nous est fourni par les lois gaussiennes des mouvements browniens $(\sigma B_t)$ , $0\leq\sigma<\infty$ . Il est très facile de calculer la fonction caractéristique de cette distribution $T$

(25) $\quad U_T(\xi) = E[\exp(\sigma\int\xi_s dB_s - \frac{1}{2}<\xi,\xi>)] = \exp(-\frac{a}{2}<\xi,\xi>)$ avec $a=1-\sigma^2$.

Pour $\sigma=0$ on retombe sur $\varepsilon_0$ , et pour $\sigma=1$ on trouve la constante $1$ . Le développement de $T$ suivant les chaos de Wiener ressemble beaucoup à celui de $\varepsilon_0$ :

(26) $\quad \hat{T}_{2k+1}=0 \;,\quad \hat{T}_{2k} = (\sigma^2-1)^k\mu_k(0)$ .

Ayant fait cela pour $\sigma$ positif, rien ne nous empêche de définir une distribution ( complexe ) par cette même formule, en prenant $\sigma^2\in\mathbb{C}$ . En particulier, nous verrons un peu plus loin que le cas $\sigma^2=-i$ correspond à l'<u>intégrale de Feynman</u> ( traité par Hida et Streit ).

5. <u>Le bruit blanc et ses fonctionnelles</u>. Nous touchons ici à l'essentiel de la théorie de Hida, qui occupe le plus grand volume dans ses articles ( ce qui les rend aussi difficiles à lire pour les probabilistes, plus familiers avec le mouvement brownien qu'avec le bruit blanc ). Il s'agit de définir le bruit blanc $\dot B_t$ , et certains polynômes "renormalisés" en $\dot B_t$ . Nous rappelons deux résultats classiques de calcul stochastique.

1) Sur l'intervalle fermé $[0,\infty]$, soit $(U_t)$ une semimartingale continue, nulle en 0, de variation quadratique $<U>_t$ et de partie à variation

finie $A_t$ . Alors on a

$$\int_{s_1<s_2\ldots<s_n} dU_{s_1}\ldots dU_{s_n} = \frac{1}{n!}H_n(U_\infty,\langle U\rangle_\infty)$$

$$E[\int_{s_1<\ldots<s_n} dU_{s_1}\ldots dU_{s_n}] = E[\int_{s_1\ldots<s_n} dA_{s_1}\ldots dA_{s_n}]$$
$$= \frac{1}{n!}E[H_n(A_\infty,0)] = \frac{1}{n!}E[A^n_\infty] .$$

2) Prenons $U_t = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t I_{[\tau,\tau+\varepsilon]}(s)dB_s$ , sous la loi $\mathcal{E}(\xi)P$. Alors

$$\langle U\rangle_\infty = \frac{1}{\varepsilon} \quad , \quad A_\infty = \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\xi(s)ds \quad , \quad U_\infty = \frac{1}{\varepsilon}(B_{\tau+\varepsilon}-B_\tau) .$$

Tout cela nous donne la fonction caractéristique

$$< H_n(\tfrac{1}{\varepsilon}(B_{\tau+\varepsilon}-B_\tau), \tfrac{1}{\varepsilon}) \ , \ \mathcal{E}(\xi) > = ( \tfrac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\xi(s)ds )^n$$

et il est naturel de définir une distribution $H_n(\dot{B}_\tau, \frac{1}{d\tau}) = :\dot{B}_\tau^n:$ par sa fonction caractéristique

$$< :\dot{B}^n_\tau: \ , \ \mathcal{E}(\xi) > = \xi(\tau)^n$$

Cette distribution appartient au n-ième chaos de Wiener, $\hat{T}_n$ étant une masse unité au point $(\tau,\ldots,\tau)$ de la diagonale. Le coefficient est donc encore une mesure, mais plus singulière que celles qui ont été rencontrées plus haut. Tout naturellement, on définira une distribution $:\dot{B}_{s_1}\ldots\dot{B}_{s_n}:$ par sa fonction caractéristique $\xi(s_1)\ldots\xi(s_n)$, que les points $s_1,\ldots,s_n$ soient distincts ou non. La distribution

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} h(s_1)\ldots h(s_n) :\dot{B}_{s_1}\ldots\dot{B}_{s_n}: \ ds_1\ldots ds_n$$

où h est par exemple bornée à support compact, admet comme fonction caractéristique $\langle h,\xi\rangle^n$ ; elle est donc égale à l'intégrale multiple $\int h(s_1)\ldots h(s_n)dB_{s_1}\ldots dB_{s_n}$ du type (3).

Il serait facile maintenant d'expliciter des distributions dont les coefficients ne sont pas des mesures : par exemple, la dérivée seconde $\ddot{B}_\tau$ , de fonction caractéristique $\dot{\xi}(\tau)$.

6. Calcul de certaines exponentielles. Si f est un élément du premier chaos, $e^f$ appartient à $L^2$, mais il n'en est pas nécessairement de même si f appartient au second chaos. Nous allons présenter rapidement ( mais avec une démonstration presque complète ) le calcul que donne Hida de la fonction caractéristique de $e^f$ en tant que distribution.

Nous partons de la formule classique suivante, où X est une v.a. normale centrée réduite

(28) $$E[\exp(cX^2/2 +aX)] = e^{a^2/2(1-c)}/\sqrt{1-c} \qquad (\Re(c)<1) .$$

Cette intégrale peut être prolongée analytiquement au plan complexe privé de la demi-droite $[1,\infty[$ de l'axe réel.

Considérons un élément du deuxième chaos

$$f = \frac{1}{2}\int F(s,t)dB_s dB_t$$

où $F(s,t)$ est un noyau symétrique appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+^2)$, donc définissant un opérateur de Hilbert-Schmidt. Celui-ci admet une base o.n. de vecteurs propres $e_n \in L^2(\mathbb{R}_+)$, et l'on peut écrire

$$F(s,t) = \Sigma_n\, c_n e_n(s)e_n(t) \qquad \text{avec} \quad \Sigma_n\, c_n^2 < \infty$$

et l'on a alors

$$f = \frac{1}{2}\Sigma_n\, c_n(\tilde{e}_n^2 - 1) \qquad \text{avec} \quad \tilde{e}_n = \int e_n(s)dB_s\ .$$

Les v.a. $\tilde{e}_n$ sont gaussiennes centrées réduites indépendantes. On peut affirmer que $e^f$ appartient à $L^2$ si l'on a $c_n < 1/2$ pour tout $n$. Calculons dans ce cas la fonction caractéristique $U(\xi) = E[e^f \mathcal{E}(\xi)]$ de $e^f$ : désignant par $a_n = <\xi, e_n>$ les coefficients du développement de $\xi$ selon les $e_n$, la v.a. $e^f\mathcal{E}(\xi)$ est un produit de facteurs indépendants

$$\exp(\ \frac{1}{2}c_n(\tilde{e}_n^2 - 1) + a_n\tilde{e}_n - \frac{1}{2}a_n^2\ )$$

d'où en appliquant (28)

$$(29) \qquad U(\xi) = \Lambda\exp(\ \frac{1}{2}\Sigma_n \frac{c_n}{1-c_n} <\xi, e_n>^2\ ) \qquad \text{avec} \quad \Lambda = \prod_n \frac{e^{-c_n/2}}{\sqrt{1-c_n}}\ .$$

Le produit infini $\Lambda$ converge du fait que $\Sigma_n\, c_n^2 < \infty$. Quand au second facteur, c'est la fonction caractéristique de la distribution $:e^g:$, où $g$ est l'élément du second chaos

$$g = \frac{1}{2}\int G(s,t)dB_s dB_t \quad , \quad G(s,t) = \Sigma_n \frac{c_n}{1-c_n} e_n(s)e_n(t)\ .$$

Maintenant, il est facile d'étendre la formule (29), par prolongement analytique, à des cas où $e^f$ n'appartient plus à $L^2$ : il suffit en somme que $F$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ et n'admette pas la valeur propre 1, et qu'il y ait une raison naturelle de choisir une détermination des racines $\sqrt{1-c_n}$ figurant dans $\Lambda$.

Hida aborde de cette manière la définition des intégrales de Feynman. Nous préférons l'aborder directement.

## IV. L'INTEGRALE DE FEYNMAN EN TANT QUE DISTRIBUTION

1. Nous rappelons d'abord la méthode heuristique de Feynman pour construire la solution d'une équation de Schrödinger

$$U_t f = e^{-itH/\hbar} f\ , \quad H = H_0 + H_1\ , \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\ , \quad H_1 = V$$

où $V$ est un potentiel. On connaît les deux groupes unitaires $U_t^j = \exp(-itH_j/\hbar)$ pour $j=0,1$ : prenant $\hbar = m = 1$

$U_t^1 f(x) = e^{-itV(x)} f(x)$ , $U_t^0 f(x) = \int (-it)^{-1/2} \exp(-i(x-y)^2/2t) f(y) \not{d}y$ ($\not{d}y = dy/\sqrt{2\pi}$). On va utiliser une <<formule de Trotter-Kato >>

$$U_t f = \lim_n \, (U^1_{t/n} U^0_{t/n})^n f$$

Cette expression se calcule explicitement, et vaut

$$\int (-i\tfrac{t}{n})^{-n/2} \exp(\tfrac{in}{2t} \Sigma (x_j - x_{j-1})^2) \exp(-i\tfrac{t}{n} \Sigma V(x_{j-1}) f(x_n) \not{d}x_1 \ldots \not{d}x_n$$

avec $x_0 = x$ , la sommation $\Sigma$ allant de 1 à n . Pour faire un passage à la limite, comme il n'y a pas de mesure plate en dimension infinie, on fait apparaître une densité gaussienne, et on écrit cela comme une espérance brownienne ( on a posé $t_j = \frac{j}{n} t$ , $\Delta = \frac{t}{n}$, $\Delta B_j = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ )

(30) $\quad (-i)^{-n/2} \; E^x[\exp(\frac{1-i}{2} \frac{1}{\Delta} \Sigma (\Delta B_j)^2) \exp(-i\Delta \Sigma V(B_{t_{j-1}})) f(B_t)]$

Les intégrales qui apparaissent dans ces formules ne sont pas nécessairement absolument convergentes, car pour V=0, f=1 on retrouve (28) avec c=1-i, qui est juste sur le bord du domaine de convergence absolue. Il ne faut donc pas s'étonner que les intégrales de Feynman en dimension infinie soient définies comme valeurs au bord de fonctions analytiques: c'est déjà le cas en dimension finie !

En revanche, et contrairement à ce qui est souvent affirmé, nous n'aurons à faire aucune renormalisation multiplicative : celle-ci est déjà réalisée par le changement de mesure de base en (30).

2. Nous allons nous intéresser d'abord au cas où V=0 dans la formule (30). Quitte à remplacer f par $f(x+\cdot)$, nous pouvons remplacer $E^x$ par $E$ . En fait, nous laisserons pour l'instant f de côté, et étudierons la fonction caractéristique de la distribution

(31) $\qquad i^{n/2} \exp(\frac{1-i}{2} \frac{1}{\Delta} \Sigma (\Delta B_j)^2 )$

( nous disons distribution, et non v.a., car cette v.a. n'est pas intégrable : en tant que distribution, elle est définie par prolongement analytique ). Multiplier (31) par $\mathcal{E}(\xi)$ et intégrer revient à calculer l'espérance de (31), non pas sur le mouvement brownien, mais sur le processus $B_t + \int_0^t \xi_s ds$ ( th. de Cameron-Martin-Girsanov ), ou encore à remplacer $\Delta B_j$ par $\Delta B_j + \lambda_j$ , avec $\lambda_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \xi_s ds$ . Pour alléger la notation, posons 1-i=c , $\Delta B_j = X_j \sqrt{\Delta}$ , où $X_j$ est normale centrée réduite. La fonction caractéristique vaut alors

$$i^{n/2} \prod_n E[\exp( \tfrac{c}{2} X_j^2 + c\lambda_j X_j/\sqrt{\Delta} + c\lambda_j^2/2\Delta)]$$

L'espérance se calcule par (28), et vaut

$$\exp(c\lambda_j^2/2\Delta)\ \frac{e^{\frac{c^2}{2(1-c)}\frac{\lambda_j^2}{\Delta}}}{\sqrt{1-c}}$$

Remplaçant $c$ par $1-i$ , on voit apparaître au dénominateur un $i^{n/2}$ qui s'élimine avec celui qui est en tête, et il reste simplement

$$\prod_n \exp(\ -\tfrac{1+i}{2}\Sigma_n\ \lambda_j^2/\Delta)$$

qui tend vers $\exp(-\frac{1+i}{2}\int_0^t \xi_s^2 ds\ )$ . Posons $\int_0^t \xi_s^2 ds = <\xi,\xi>_t$ .

DEFINITION. On appelle distribution de Feynman ( resp. distr. de Feynman sur $[0,t]$ ) la distribution de fonction caractéristique

(32) $$U_F(\xi) = \exp(-\tfrac{1+i}{2}<\xi,\xi>\ )\quad (\text{ resp. } <\xi,\xi>_t\ )$$

Cette distribution est du type étudié en (25)-(26) avec $\sigma^2=-i$, d'où le développement de $F$ suivant les chaos

(33) $$\hat{F}_{2k+1}=0\ ,\quad \hat{F}_{2k} = (-1)^k(1+i)^k\mu_k(0)\ .$$

3. Revenons à la formule (30), en y remettant la fonction $f$ : si l'on traite le cas où $f(x)=e^{iux}$, on saura aussi ( par intégration en $u$ ) traiter le cas de toutes les fonctions suffisamment régulières - par exemple, des transformées de Fourier de mesures bornées, qui forment ici une classe naturelle. Mais insérer $e^{iu(x+B_t)}$ dans l'intégrale revient à y insérer $e^{iux-tu^2/2}\mathcal{E}(iuI_{[0,t]})$, et l'on retombe sur le problème qui vient d'être étudié : la limite de l'expression (30) avec $V=0$, $f(x)=e^{iux}$, est égale à $\exp(i(ux+tu^2/2))$, qui vaut bien $e^{-itH_0}f$.

4. La mesure Brownienne permet de résoudre l'équation de la chaleur

$$f_t(x) = E^x[f\circ B_t] \text{ est solution de } \dot{f}_t= \tfrac{1}{2}D^2f_t$$

et la formule de Kac

(34) $$f_t(x) = E^x[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} f\circ B_t]$$

fournit une solution de l'équation $\dot{f}_t = (\frac{1}{2}D^2-V)f_t$ . De la même manière la «mesure» de Feynman permet de résoudre l'équation de Schrödinger libre

$$f_t(x) = E_F^x[f\circ B_t] \text{ est solution de } \dot{f}_t = \tfrac{i}{2}D^2f_t =-iH_0f_t$$

et la formule de Feynman ( antérieure à la formule de Kac ! )

(35) $$f_t(x) = E_F^x[e^{-i\int_0^t V(B_s)ds} f\circ B_t]$$

devrait nous permettre de résoudre l'équation $\dot{f}_t= -i(H_0+V)f_t$ . Seulement, alors que la formule (34) ne pose aucun problème d'interprétation ( il s'agit seulement d'examiner si une v.a. positive est intégrable par rapport à une mesure positive ), la formule (35) demande que l'on calcule la valeur d'une distribution sur une fonctionnelle de Wiener qui n'est pas une fonction-test.

La définition des distributions nous ouvre une seule possibilité pour donner un sens à cette expression : développer en chaos de Wiener la v.a. sur l'espace de Wiener

(36) $\quad h_t^x = e^{-i\int_0^t V(x+B_s(\omega))ds}\, f(x+B_t(\omega)) = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{h}_n^x)$

Ensuite, examiner si les fonctions $\hat{h}_{2k}^x$ ont des traces sur les k-diagonales, et poser

(37) $\quad G_t^x(z) = \Sigma_k \frac{(z-1)^k}{2^k\ k!} \int_{s_1<s_2\ldots<s_k<t} \hat{h}_{2k}^x(s_1,s_1,\ldots s_k,s_k)ds_1\ldots ds_k$

où la somme sur toutes les k-diagonales a été réduite à l'unique k-diagonale du 2k-èdre croissant $C_{2k}$. En principe, pour $z=\sigma^2$ cette série devrait représenter l'espérance de (36) sous la loi brownienne de paramètre $\sigma^2$ , et pour $z=-i$ l'intégrale de Feynman.

Nous ne nous proposons pas de faire ici une théorie rigoureuse de l'intégrale de Feynman : ceci a été fait par de nombreux auteurs. Nous nous proposons plutôt de traiter une question probabiliste, celle du développement de la v.a. (36) suivant les chaos de Wiener. Nous ne donnerons d'ailleurs pas une démonstration complète, mais seulement une indication de méthode. Posons

(38) $$Q_t(x,f) = E[\exp(-i\int_0^t V(x+B_s)ds)f(x+B_t)]$$

Ceci est un excellent semi-groupe de noyaux complexes de masse $\leq 1$ , pourvu seulement que l'intégrale $\int_0^t |V(x+B_s)|ds$ soit p.s. finie. Son générateur est formellement $\frac{1}{2}D^2 - iV$ , et nous allons supposer que le semi-groupe est suffisamment régulier pour que la fonction $Q_t(x,f)$ soit <u>dérivable en</u> $x$ ; cette dérivée sera notée $R_t(x,f)$.

Il sera parfois commode de travailler sur l'espace de toutes les trajectoires continues, sans la restriction $B_0=0$ ; alors au lieu de $x+B_t$ en (36) nous pouvons écrire $B_t$ , en intégrant par rapport à la loi $P^x$ du mouvement brownien issu de $x$ . Nous poserons alors

$$M_t = \exp(-i\int_0^t V(B_s)ds) \ , \quad H_t = M_t f(B_t) \ .$$

Le coefficient de $H_t$ dans le chaos d'ordre 0 est $E^x[H_t]=Q_t(x,f)$.
Introduisons ensuite la martingale

$$E^x[H_t|\mathcal{F}_u] = Q_t(x,f) + \int_0^u \eta_s dB_s \qquad (u<t)$$

Par ailleurs, soit $\Theta_u$ l'opérateur de translation $(B_s\circ\Theta_u=B_{s+u})$ ; on a

$$H_t = M_u M_{t-u}\circ\Theta_u . f(B_{t-u}\circ\Theta_u)$$

donc $E^x[H_t|\mathcal{F}_u] = M_u . Q_{t-u} f\circ B_u$ . Le côté gauche est une martingale, du côté droit $(M_u)$ est un processus à variation finie qui ne s'annule jamais, donc $(Q_{t-u}f\circ B_u)$ est une semimartingale. Admettant que nous pouvons lui appliquer la formule d'Ito, nous avons

$$d(Q_{t-u}f\circ B_u)=(R_{t-u}f\circ B_u)dB_u + \text{termes à variation finie} .$$

et par conséquent

$$d(M_uQ_{t-u}f\circ B_u) = M_uR_{t-u}f\circ B_u\, dB_u + \text{termes à variation finie}$$

Mais en fait le côté gauche est une martingale, donc ces termes à variation finie sont nuls. On a donc sous la loi $P^x$

(39) $$H_t = M_tf(B_t) = Q_t(x,f) + \int_0^t M_uR_{t-u}f(B_u)dB_u$$

Lorsqu'on connaît le développement d'une v.a. en intégrale stochastique prévisible

$$H = E[H] + \int_0^\infty \eta_s dB_s$$

Le premier terme du développement en chaos de Wiener est égal à $\int_0^\infty E[\eta_s]dB_s$ . Pour continuer, on développe en i.s. prévisible

$$\eta_s = E[\eta_s] + \int_0^s \eta_{us}dB_u$$

et le terme dans le second chaos est alors $\int_{u<s} E[\eta_{us}]dB_udB_s$. Pour avoir le terme dans le troisième chaos, on développe $\eta_{us}$ , etc. Appliquant ici cette recette, on obtient pour les deux premiers coefficients

(40) $$\hat{h}_0^x = Q_t(x,f) \ , \qquad \hat{h}_1^x(s) = E^x[M_sR_{t-s}f\circ B_s] = Q_s(x,R_{t-s}f) \ .$$

Pour continuer, il faut développer en intégrale stochastique

$$M_sR_{t-s}f(B_s) = Q_s(x,R_{t-s}f) + \int_0^s \eta_{us}dB_s$$

Mais ce problème est identique à celui que nous avons traité déjà, $s$ remplaçant $t$ , et $R_{t-s}f$ remplaçant $f$ . D'où le second coefficient

(41) $$\hat{h}_2^x(u,s) = Q_u(x,R_{s-u}R_{t-s}f)$$

On a des formules analogues pour tous les coefficients. Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet.

REMARQUE. Soit $P_\sigma$ la loi gaussienne du processus $(\sigma B_t)$. L'intégrale

$$E_\sigma^x[e^{-i\int_0^t V(B_s)ds} f(B_t)] = Q_t^\sigma(x,f)$$

existe sous des conditions très faibles sur $V$ , et définit un semi-groupe de mesures complexes de masse $\leq 1$. A quelles conditions $Q_t^\sigma(x,f)$ peut il être interprété comme la valeur de la distribution $P_\sigma$ sur la fonction $\exp(-i\int_0^t V(x+B_s)ds)f(x+B_t)=h_t^x$ ? Ce problème est étroitement lié au problème de la définition de l'intégrale de Feynman par prolongement analytique de $Q_t^\bullet(x,f)$ hors de l'axe réel.

REMERCIEMENTS. Le second auteur remercie l'Université Louis Pasteur de Strasbourg et l'I.R.M.A. pour leur hospitalité pendant une partie de l'année universitaire 1985-86.

REFERENCES

Notre point de départ a été :

PARTHASARATHY (K.R.). A remark on the paper « une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique ». Sém. Prob. XX, p. 317-320. Lecture Notes in M. 1204, Springer 1986.

La théorie de Hida

Le texte de base est ici le livre

HIDA (T.). Brownian motion. Springer 1980 ( pour la traduction anglaise ).

Voici d'autres articles de Hida ou proches du point de vue de Hida. Nous nous bornons à ceux qui sont parus dans des recueils accessibles.

HIDA (T.). Generalized multiple Wiener integrals. Proc. Japan Acad. 54, 1978, 175-188.

--- Generalized brownian functionals and stochastic integrals. Appl. Math. Optim. 12, 1984, 115-123.

--- Generalized brownian functionals. Theory and application of random fields. Lect. Notes in Control and Inf. 49, Springer 1983.

KUO (H.H.). Brownian functionals and applications. Acta Applicandae Math. 1, 1983, 175-188.

HIDA (T.) et STREIT (L.). Generalized brownian functionals and the Feynman integral. Stochastic Proc. and Appl. 16, 1983, 55-69.

POTHOFF (J.). On the connection of the white-noise and Malliavin calculi. Proc. Japan Acad. 62, 1986, 43-45.

RUSSEK (A.). Hermite expansions of generalized brownian functionals. Probability theory on vector spaces III, Lublin 1983. Lect. Notes in M . 1080, Springer 1984.

Nous avons eu connaissance tout récemment d'un effort de présentation voisin du nôtre :

CHEVET (S.). Remarques sur les fonctionnelles généralisées ( prépubl. 1986 ; Univ. de Clermont-Ferrand ).

Dans cet exposé, nous avons délibérément laissé de côté deux aspects de la théorie de Hida : 1) l'étude de <u>sous-groupes remarquables</u> du groupe unitaire de $L^2(\Omega)$ ; ce que Hida appelle le <u>calcul causal</u>, qui consiste à travailler systématiquement sur le bruit blanc $\dot{B}_t$ , à dériver par rapport à $\dot{B}_t$ , etc.

Théories des distributions.

La théorie la plus familière aux probabilistes est celle qui se rattache au << calcul de Malliavin >> :

WATANABE (S.). Malliavin's calculus in terms of generalized Wiener functionals. Theory and Application of Random Fields, Bangalore 1982, p. 284-290. Lect. Notes. Control Inf. 49, Springer 1983.

SUGITA (H.). Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus. J. Math. Kyoto Univ. 25, 1985, 31-48.

USTUNEL (A.S.). Representation of the distributions on Wiener space and stochastic calculus of variation. A paraître. ( J. Funct. Anal. ? ).

D'autres articles d'Ustunel sont probablement en cours de publication, ainsi que des travaux de J. Potthoff, touchant à la fois aux deux points de vue sur les distributions.

Toutefois, la théorie des espaces de Sobolev d'indice positif ou négatif sur les espaces gaussiens, et l'espace de Wiener en particulier, est bien plus ancienne que le << calcul de Malliavin >>. Voir par ex., en ne citant encore que des publications accessibles :

KREE (P.). Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles. Séminaire Lelong 1972/73, Lect. Notes in M. 410, p. 142-181 et Sém. Lelong 1973/74, Lect. Notes 474, p. 16-47.

KREE (M.). Propriété de trace pour des espaces de Sobolev en dimension infinie. Bull. Soc. M. France 105, 1977, 141-163

KREE (P.). Calcul d'intégrales et de dérivées en dimension infinie. J. Funct. Anal. 31, 1979, 150-186.

LASCAR (B.). Propriétés d'espaces de Sobolev en dimension infinie. Comm. Partial Diff. Equations 1, 1976, 561-584. Marcel Dekker.

LASCAR (B.). Une classe d'opérateurs elliptiques du second ordre sur un espace de Hilbert. J. Funct. Anal. 35, 1980, 316-343.

KREE (P.). Distributions, Sobolev spaces on Gaussian vector spaces and Ito's calculus. A paraître dans le volume du congrès de Silivri, Juillet 1986 ( Lecture Notes ? ).

Intégrale de Feynman.

Nous n'avons fait qu'aborder ce sujet, sur lequel existe une immense littérature. Notre procédé de définition, par prolongement analytique dans un disque centré en 1, est probablement très grossier : il est plus courant de travailler dans le demi-plan de droite. On obtient ainsi l'intégrale de Feynman dite << analytique >>.

A défaut d'une discussion mathématique, voici une liste de références ( concernant seulement la situation élémentaire qui nous a occupés ici, non l'intégrale de F. dans les variétés, ou les problèmes relativistes ).

NELSON (E.). Feynman integrals and the Schroedinger equation. J. Math. Physics 5, 1964, 332-343.

CAMERON (R.H) et STORVICK (D.A.). Some Banach algebras of analytic Feynman integrable functionals. Analytic Functions, Kozubnik 1979, p. 18-67. Lec. Notes in M. 798, Springer 1980.

--- A simple definition of the Feynman integral. Memoir AMS n°288. ( cf. aussi J. Anal. Math. 38, 1980, p. 34-66).

JOHNSON (G.W.). The equivalence to two approaches to the Feynman integral. J. Math. Phys. 23, 1982, 2090-2096.

JOHNSON (G.W.) et SKOUG (D.L.). A Banach algebra of Feynman integrable functionals with application to an integral equation formally equivalent to Schroedinger's equation. J. Funct. Anal. 12, 1973, 129-152.

KALLIANPUR (G.) et BROMLEY (C.). Generalized Feynman integrals using analytic continuation in several complex variables. Stochastic An - lysis, Marcel Dekker 1984. M. Pinsky, ed..

KALLIANPUR (G.), KANNAN (D.), KARANDIKAR (R.L.). Analytic and sequential Feynman integrals on abstract Wiener spaces... Ann. IHP 21, 1985, 323-361.

ALBEVERIO (S.A.) et HØEGH-KROHN (R.). Mathematical theory of Feynman path integrals. Lect. Notes in M. 523, Springer 1976.

Il convient d'ajouter le Lecture Notes in Physics 106 ( Marseille, Mars 1978 ), entièrement consacré aux intégrales de Feynman.

I.R.M.A.
7 rue du G$^{al}$ Zimmer
67084 Strasbourg Cedex France

et

Institute of Applied Mathematics
Academia Sinica, Beijing, Chine