SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD
H. SADI

Processus admettant un processus à accroissements indépendants tangent : cas général

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 479-514
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__479_0>

PROCESSUS ADMETTANT UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS TANGENT : CAS GENERAL

J. JACOD et H. SADI

1 - INTRODUCTION

Dans [4] nous avons introduit la notion de processus admettant un PAI (processus à accroissements indépendants) tangent, qui ne s'applique malheureusement qu'aux processus quasi-continus à gauche. Slominski [6] a proposé une généralisation simple, mais qui n'englobe pas toutes les semimartingales. Ci-dessous nous proposons une généralisation plus compliquée, ayant toutefois l'avantage de contenir toutes les semimartingales.

Commençons par rappeler la notion introduite dans [4], sans revenir sur les motivations. On considère une suite $\mathcal{T}=(\tau^n)_{n\geq 1}$ de subdivisions $\tau^n=\{0=t_0^n<\ldots<t_i^n<\ldots\}$ de $\mathbb{R}_+$, dont le pas tend vers 0 et telles que $\lim_i \uparrow t_i^n=\infty$. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ un espace probabilisé filtré. A tout processus càdlàg adapté quasi-continu à gauche X on associe:

(1.1) $\rho_i^{X,n}(\omega,dx)$ = une version régulière de la loi conditionnelle

$$\mathcal{L}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n}\mid\mathcal{F}_{t_{i-1}^n})\qquad(\text{pour } i\geq 1);$$

(1.2) $\zeta^{X,n}(\omega,dy)$ = l'unique probabilité sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}=\mathbb{D}([0,\infty[;\mathbb{R})$ faisant du processus canonique Y un PAI tel que

i) Y est p.s. constant sur les intervalles $[t_i^n,t_{i+1}^n[$,

ii) pour tout $i\geq 1$, la loi du saut $\Delta Y_{t_i^n}$ est $\rho_i^{X,n}(\omega,.)$

(rappelons que, par convention, un PAI est p.s. nul en 0).

On peut considérer $\zeta^{X,n}$ comme une v.a. à valeurs dans l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ des probabilités sur $\mathbb{D}$. Muni de la topologie étroite ($\mathbb{D}$ étant lui-même muni de la topologie de Skorokhod), $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ est un espace métrisable. On peut donc poser la

(1-3) DEFINITION: On dit que le processus <u>quasi-continu à gauche</u> X <u>admet un PAI tangent le long de</u> $\mathcal{T}$ si la suite $(\zeta^{X,n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une limite, notée ζ^X. On note $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$ l'ensemble de ces processus X.

Si $X\in\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$, pour P-presque tout ω la loi $\zeta^X(\omega,dy)$ fait évidemment du processus canonique Y un PAI (dont on peut montrer qu'il n'a pas de discontinuité fixe), dont on note $B^X(\omega)$, $C^X(\omega)$, $\nu^X(\omega)$ les caractéristiques (voir e.g. [3]); rappelons que la première caractéristique est associée à une <u>fonction de troncation</u> $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qu'on a fixée une fois pour toutes, et choisie <u>continue</u> (on a $h(x)=x$ pour $|x|$ petit, et $h(x)=0$ pour $|x|$ grand).

Dans [4] on a montré que $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$ est un espace vectoriel, et

(1-4) Tout PAI sans discontinuité fixe appartient à $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$.

(1-5) Toute semimartingale quasi-continue à gauche X appartient à $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$; dans ce cas, (B^X,C^X,ν^X) sont aussi les caractéristiques de X en tant que semimartingale.

Par ailleurs, Kwapien et Woyczinski [5] ont donné un intéressant critère d'appartenance à $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$:

(1-6) Pour que le processus adapté quasi-continu à gauche X appartienne à $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$, il faut et il suffit que la suite de processus

$$B_t^{X,n} = \sum_{i:t_i^n\leq t} E[h(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}]$$

(où h est toujours notre fonction de troncation) converge uniformément sur tout intervalle fini, en probabilité; la limite est alors automatiquement B^X.

L'espace $\mathcal{A}_g(\mathcal{T})$ dépend de manière essentielle de la suite de subdivisions $\mathcal{T}$, ce qui malheureusement enlève bien de l'intérêt à cette notion: Kwapien et Woyczynski [5] esquissent un exemple de ce fait (à ce propos, la remarque (1.16-1) de [4] selon laquelle, lorsque $X \in \mathcal{A}_g(\mathcal{T}) \cap \mathcal{A}_g(\mathcal{T}')$, les caractéristiques de X relativement à $\mathcal{T}$ et à $\mathcal{T}'$ sont nécessairement les mêmes est pour le moins aventureuse, et sans doute fausse).

Dans [4], aussi bien que dans la partie des résultats de Kwapien et Woyczinski qui concerne les PAI tangents, la quasi-continuité à gauche joue un rôle essentiel.

En suivant Slominski [6], et sans changer (1-1) ni (1-2), on peut tout simplement songer à supprimer dans (1-3) l'hypothèse de quasi-continuité à gauche. On obtient alors une classe $\hat{\mathcal{A}}_g(\mathcal{T})$ de processus telle que

(1-7) Tout PAI appartient à $\hat{\mathcal{A}}_g(\mathcal{T})$; recopions ici la démonstration de Slominski, qui remplace avantageusement la longue preuve de (1-4) dans [4]. Notons X^n le processus qui vaut $X_{t_i^n}$ sur l'intervalle $[t_i^n, t_{i+1}^n[$; il est clair que $X^n_.(\omega) \to X_.(\omega)$ pour la topologie de Skorokhod, tandis que $\zeta^{X,n}(\omega,.)$ ne dépend pas de ω et égale simplement la loi de X^n; par suite $\zeta^{X,n}$ converge vers la loi de X.

Slominski donne aussi une caractérisation des semimartingales qui appartiennent à $\hat{\mathcal{A}}_g(\mathcal{T})$. Il en découle facilement qu'il existe des semimartingales n'appartenant à $\hat{\mathcal{A}}_g(\mathcal{T})$ pour aucune suite $\mathcal{T}$ de subdivisions de $\mathbb{R}_+$.

Ci-dessous nous proposons d'étendre la définition (1-3) dans une autre direction, en admettant des subdivisions τ^n constituées de temps d'arrêt prévisibles. On verra alors que toute semimartingale admet un PAI tangent le long d'une famille de subdivisions, dépendant éventuellement de la semimartingale. Là encore, le résultat est loin d'être satisfaisant, mais il semble difficile d'obtenir une extension qui englobe simultanément toutes les semimartingales.

La méthode que nous employons est celle de [4], dont les résultats sont des corollaires de ce qui suit; vu les difficultés techniques, il a semblé préférable de reprendre toutes les démonstrations. Signalons que Kwapien et Woyczinski [5] proposent une méthode largement différente, et plus simple, que celle de [4], mais nous avons été incapables de l'étendre au cas qui nous occupe ici.

2 - LES RESULTATS PRINCIPAUX

§a - Notations.

L'espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F},P)$ est fixé, ainsi que la fonction de troncation continue h. A tout processes càdlàg X on associe le processus

$$X(h) = X - X_0 - \textstyle\sum_{s\leq .}[\Delta X_s - h(\Delta X_s)], \tag{2-1}$$

donc $\Delta X(h)=h(\Delta X)$.

A toute classe $\mathcal{C}$ de processus on associe de la manière usuelle la classe localisée $\mathcal{C}_{loc}$: $X\in\mathcal{C}_{loc}$ si et seulement s'il existe une suite (S_n) de temps d'arrêt croissant p.s. vers $+\infty$, telle que $X^{S_n}\in\mathcal{C}$ pour tout n (X^S désigne le processus arrêté en S).

(2-2) Une classe $\mathcal{C}$ est dite locale si elle est stable par arrêt (i.e. $X\in\mathcal{C}$ et T temps d'arrêt $\Rightarrow X^T\in\mathcal{C}$), et si $\mathcal{C}_{loc}=\mathcal{C}$.

On considère une suite $\mathcal{T}=(\tau^n)_{n\geq 1}$ de subdivisions de $\mathbb{R}_+$, du type suivant:

(2-3) i) pour chaque n, $\tau^n=\{0=T_0^n<T_1^n<\ldots<T_i^n<\ldots\}$ où les T_i^n sont des temps prévisibles bornés, et $\lim_{(i)}\uparrow T_i^n = \infty$;

ii) si $D^n=\bigcup_{i\geq 0}[\![T_i^n]\!]$, on a $D^n\subset D^{n+1}$; on écrit $D=\bigcup_n D^n$;

iii) $\alpha_n:=\sup_{\omega,i}\ \{T_i^n(\omega)-T_{i-1}^n(\omega)\}\to 0$ quand $n\uparrow\infty$.

(2-4) $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ désigne l'ensemble des processus càdlàg adaptés tels que D (voir (ii) ci-dessus) contienne le support prévisible de l'ensemble $\{\Delta X\neq 0\}$; en d'autres termes, le processus càdlàg adapté X appartient à $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ si et seulement si on a $\Delta X_S=0$ p.s. sur $\{S<\infty\}$, pour tout temps prévisible S tel que $[\![S]\!]\cap D=\emptyset$ ($[\![S]\!]$ désigne le graphe de S).

A tout processus càdlàg adapté X on associe pour $i\geq 1$:

(2-5) $\rho_i^{X,n}(\omega,dx)$ = une version régulière de la loi conditionnelle

$$\mathcal{L}(X_{(T_i^n)-}-X_{T_{i-1}^n}\mid\mathcal{F}_{(T_{i-1}^n)-});$$

$\bar\rho_i^{X,n}(\omega,dx)$ = une version régulière de la loi conditionnelle

$$\mathcal{L}(\Delta X_{T_i^n}\mid\mathcal{F}_{(T_i^n)-});$$

$\tilde\rho_i^{X,n}(\omega,dx)$ = $\rho_i^{X,n}(\omega,.)*\bar\rho_i^{X,n}(\omega,.)(dx)$ (produit de convolution).

(2-6) $\zeta^{X,n}(\omega,dy)$ = l'unique probabilité sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}$ faisant du processus canonique Y un PAI tel que:

i) Y est p.s. constant sur chaque intervalle $[T_i^n(\omega),T_{i+1}^n(\omega)[$,

ii) pour tout $i\geq 1$, la loi du saut $\Delta Y_{T_i^n(\omega)}$ est $\tilde\rho_i^{X,n}(\omega,.)$.

On peut maintenant définir la notion principale de cet article.

(2-7) DEFINITION: On dit que le processus X appartenant à $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ <u>admet un PAI tangent le long de</u> $\mathcal{T}$ si la suite $(\zeta^{X,n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une limite, notée ζ^X; on note $\tilde{\mathcal{I}}_g(\mathcal{T})$ l'ensemble de ces processus.

(2-8) REMARQUES: 1) Pour tout processus càdlàg adapté X le support prévisible de $\{\Delta X\neq 0\}$ est un ensemble mince (i.e., à coupes dénombrables). On peut donc toujours construire des suites $\mathcal{T}$ vérifiant (2-3) et telles que $X\in\mathcal{M}(\mathcal{T})$.

2) Un processus càdlàg adapté quasi-continu à gauche appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ quelle que soit la famille $\mathcal{T}$.

3) Supposons les temps T_i^n déterministes; la famille $\mathcal{T}$ est alors du même type que dans la partie 1 (avec, en plus, l'hypothèse que les subdivisions sont de plus en plus fines). Si X est un processus quasi-continu à gauche, on a $X_{(T_i^n)-}=X_{T_i^n}$ p.s., donc les définitions (2-5) et (1-1) de $\rho_i^{X,n}$ coïncident, et $\bar{\rho}_i^{X,n}=\varepsilon_0$, et $\tilde{\rho}_i^{X,n}=\rho_i^{X,n}$, donc les définitions (2-6) et (1-2) de $\zeta^{X,n}$ coïncident également. Par suite $\mathcal{I}_g(\mathcal{T})\subset\tilde{\mathcal{I}}_g(\mathcal{T})$ (inclusion évidemment stricte).$\square$

(2-9) DEFINITION: Si $X\in\tilde{\mathcal{I}}_g(\mathcal{T})$, on note $B^X(\omega)$, $C^X(\omega)$, $\nu^X(\omega)$ les caractéristiques du PAI de loi $\zeta^X(\omega,.)$ (on écrit $B^X(h)(\omega)$ si on veut mettre en évidence l'influence de la fonction de troncation); (B^X,C^X,ν^X) s'appelle le <u>triplet des</u> $\mathcal{T}$-<u>caractéristiques de</u> X.

Introduisons enfin une dernière classe de processus:

(2-10) DEFINITION: On note $\tilde{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ la classe des processus X qui sont bornés, prévisibles, nuls en 0, dans $\mathcal{M}(\mathcal{T})$, et tels que pour tout $t\geq 0$,

$$(2\text{-}11)\qquad \sup_{s\leq t}\left|\sum_{i\geq 1,T_i^n\leq s}[\Delta X_{T_i^n}+E(X_{(T_i^n)-}-X_{T_{i-1}^n}|\mathcal{F}_{T_{i-1}^n})]-X_s\right|\xrightarrow{P}0.$$

(2-12) REMARQUE: Supposons les T_i^n déterministes. $\tilde{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ contient alors la classe $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ introduite dans [4], qui est constituée des processus du type précédent, qui sont en plus <u>continus</u>; en fait, dans [4] nous avions imposé une condition supplémentaire, dont Slominski [6] a montré l'inutilité! □

§b - Résultats.

(2-13) THEOREME: $\tilde{\mathcal{S}}_g(\mathcal{T})$ est un espace vectoriel et une classe locale. De plus toute semimartingale de $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ appartient à $\tilde{\mathcal{S}}_g(\mathcal{T})$; dans ce cas, (B^X,C^X,ν^X) sont les caractéristiques de X en tant que semimartingale.

(2-14) THEOREME: $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}(\mathcal{T})$ est un espace vectoriel et une classe locale, contenue dans $\tilde{\mathcal{S}}_g(\mathcal{T})$. De plus,

a) toute martingale locale appartenant à $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}(\mathcal{T})$ est nulle;

b) $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}(\mathcal{T})$ contient tous les processus prévisibles à variation finie nuls en 0 et appartenant à $\mathcal{M}(\mathcal{T})$.

(2-13) suggère que les $\mathcal{T}$-caractéristiques (B^X,C^X,ν^X) de $X\in\tilde{\mathcal{S}}_g(\mathcal{T})$ admettent la même caractérisation que les caractéristiques d'une semimartingale. En effet, on a le:

(2-15) THEOREME: Soit $X\in\tilde{\mathcal{S}}_g(\mathcal{T})$.

i) B^X est l'unique processus de $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}(\mathcal{T})$ tel que

(2-16) $$M(h) = X(h) - B^X$$

soit une martingale locale;

ii) si $M(h)^c$ est la partie martingale continue de $M(h)$, on a

(2-17) $$C^X = \langle M(h)^c, M(h)^c\rangle;$$

iv) ν^X est la mesure de Lévy de X, i.e. la projection prévisible duale de la mesure aléatoire μ^X associée aux sauts de X, et définie par

(2-18) $$\mu^X(\omega;dt\times dx) = \sum_{s>0,\Delta X_s(\omega)\neq 0} \varepsilon_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt\times dx).$$

Terminons enfin cette série de résultats par des critères d'appartenance à $\tilde{\mathscr{J}}_g(\mathcal{T})$.

(2-19) THEOREME: Soit X un processus.

a) Pour que $X\in\tilde{\mathscr{J}}_g(\mathcal{T})$ il faut et il suffit que $X=X'+X''$, avec $X'\in\tilde{\mathscr{B}}_{loc}(\mathcal{T})$ et X'' une semimartingale de $\mathcal{M}(\mathcal{T})$. Dans ce cas, $X-B^X$ est une semimartingale appartenant à $\mathcal{M}(\mathcal{T})$.

b) Pour que $X\in\tilde{\mathscr{J}}_g(\mathcal{T})$ il faut et il suffit que $X\in\mathcal{M}(\mathcal{T})$ et que les processus

(2-20) $$B_t^{X,n} = \sum_{i\geq 1,T_i^n\leq t} \int\tilde{\rho}_i^{X,n}(dx)h(x)$$

convergent uniformément sur tout intervalle fini, en probabilité, vers un processus B; dans ce cas, on a $B^X=B$.

Si les T_i^n sont déterministes et X quasi-continu à gauche, $B^{X,n}$ est comme en (1-6), donc (b) étend le critère de Kwapien et Woyczinski.

Il nous reste à examiner le cas des PAI. On peut trouver des PAI (et même des processus continus déterministes) X pour lesquels il existe une suite $\mathcal{T}$ de subdivisions (aléatoires, bien-sûr) telle que X n'appartienne pas à $\tilde{\mathscr{J}}_g(\mathcal{T})$. Cependant:

(2-21) THEOREME: Si X est un PAI, il existe une famille de subdivisions $\mathcal{T}$ vérifiant (2-3), telle que $X\in\tilde{\mathscr{J}}_g(\mathcal{T})$. Dans ce cas (B^X,C^X,ν^X) sont les caractéristiques de X en tant que PAI; en particulier elles sont déterministes, et $\zeta^X(\omega,.)$ ne dépend pas de ω et égale la loi de X.

Preuve. On choisit pour $\mathcal{T}$ n'importe quelle famille vérifiant (2-3), constituée de T_i^n déterministes, et telle que $X\in\mathcal{M}(\mathcal{T})$: c'est possible, car le support prévisible de $\{\Delta X\neq 0\}$ est simplement l'ensemble des temps de discontinuités fixes de X. La preuve est alors exactement la même que pour (1-7), une fois remarqué que $\tilde{\rho}_i^{X,n}(\omega,.)$ est la loi de $X_{T_i^n} - X_{T_{i-1}^n}$ pour $i\geq 1$. □

(2-22) REMARQUE: On vérifie aussi que si X est un "processus" déterministe, il existe $\mathcal{T}$ (avec des T_i^n déterministes) avec $X-X_0\in\tilde{\mathcal{B}}_{loc}(\mathcal{T})$.

En fait, soit $\mathcal{T}$ une famille quelconque et $X\in\mathcal{M}(\mathcal{T})$ un PAI de première caractéristique B. On a alors $X\in\tilde{\mathcal{J}}_g(\mathcal{T}) \Leftrightarrow B\in\tilde{\mathcal{B}}_{loc}(\mathcal{T})$.□

3 - LA MESURE DE LEVY

Dans toute la suite, la famille $\mathcal{T}$ de subdivisions est fixée; on écrit donc $\mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{J}}_g$, $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$. Dans cette partie, X désigne un processus càdlàg adapté, et ν^X est sa mesure de Lévy (cela n'entrainera pas de confusion de notations avec la partie 2). Pour $i\geq 1$ on écrit:

$$(3\text{-}1)\qquad \begin{cases} \Delta_i^n X = X_{(T_i^n)-} - X_{T_{i-1}^n} \\ E_i^n(.) = E(.|\mathcal{F}_{T_{i-1}^n}) \end{cases}$$

Pour les notations de théorie des processus, on renvoie à [1] ou [2]. Pour toute mesure aléatoire μ sur $\mathbb{R}_+$ on écrit

$$f*\mu(\omega)_t = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} f(x)\mu(\omega;ds\times dx).$$

Dans la suite on mentionnera la fonction de troncation h dans les caractéristiques qui en dépendent. Rappelons que si Z est une semimartingale, de première caractéristique B(h), le processus $M(h)=Z(h)-B(h)$ (cf. (2-1)) est une martingale locale, la seconde caractéristique est $C=\langle M(h)^c,M(h)^c\rangle$ (indépendante de h), et la seconde caractéristique modifiée est $\tilde{C}(h)=\langle M(h),M(h)\rangle$.

On note C^+ l'ensemble des fonctions $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ bornées, continues, nulles sur un voisinage de 0. Soit $\mathcal{L}_a$ l'ensemble des $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $|f(x)| \leq a$ et $|f(x)-f(y)| \leq a|x-y|$.

On note $B^{X,n}(h)(\omega)$, $C^{X,n}(\omega)$, $\nu^{X,n}(\omega)$ les caractéristiques et $\tilde{C}^{X,n}(h)(\omega)$ la seconde caractéristique modifiée du PAI de loi $\zeta^{X,n}(\omega)$. On sait que:

$$(3\text{-}2)\qquad \begin{cases} f*\nu_t^{X,n} = \sum_{i\geq 1,\ T_i^n \leq t} \int \tilde{\rho}_i^{X,n}(dx)f(x) , \\ B^{X,n}(h) = h*\nu^{X,n} , \qquad C^{X,n} = 0 , \\ \tilde{C}^{X,n}(h) = h^2*\nu^{X,n} - \sum_{s\leq .} [\Delta B^{X,n}(h)_s]^2 . \end{cases}$$

Nous nous proposons de montrer le:

(3-3) THEOREME: <u>Soit</u> $X \in \mathcal{M}$. <u>On a alors</u>

$$[U\text{-}\delta] \qquad f*\nu^{X,n} \xrightarrow{P-u} f*\nu^X \qquad \forall f \in C^+,$$

<u>où</u> $\xrightarrow{P-u}$ <u>signifie "convergence en probabilité, uniforme sur tout intervalle fini"</u>.

Commençons par plusieurs lemmes.

(3-4) LEMME: <u>Soit</u> A <u>un processus adapté à variation finie, tel que</u> $E[Var(A)_t] < \infty$ <u>pour tout</u> $t < \infty$ ($Var(A)$ désigne le processus variation), <u>et que</u> $\{\Delta A \neq 0\} \subset D$. <u>Alors</u>

$$A^n := \sum_{i\geq 1, T_i^n \leq .} E_i^n(\Delta_i^n A) \xrightarrow{P-u} A^c ,$$

<u>où</u> A^c <u>est la partie continue de</u> A.

<u>Preuve</u>. Par linéarité, il suffit de considérer deux cas:

a) A est croissant et purement discontinu: on a alors (pour α_n, voir (2-3)):

$$E(A_t^n) \leq E[\sum_{i\geq 1, T_{i-1}^n \leq t} \Delta_i^n A] \leq E[\int_0^{t+\alpha_n} 1_{(D^n)^c}(s)dA_s]$$
$$\to E[\int_0^t 1_{D^c}(s)dA_s) = 0$$

d'après Lebesgue et $\{\Delta A \neq 0\} \subset D$. Donc $A^n \xrightarrow{P-u} 0$.

b) A est croissant et continu : soit $T=T^{n_0}_{i_0}$. Pour $n\geq n_0$ on a $\{T^n_i\leq T\} = \{T^n_{i-1}<T\}$ (car $D^{n_0}\subset D^n$) et $\Delta^n_i A = A_{T^n_i} - A_{T^n_{i-1}}$ car A est continu. Donc

$$A^n_T = \sum\nolimits_{i\geq 1,T^n_{i-1}<T} E(A_{T^n_i}-A_{T^n_{i-1}} | \mathcal{F}_{T^n_{i-1}}) .$$

Par les laplaciens approchés [1] on a $A^n_T \xrightarrow{L^1} A_T$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $A^n_T(\omega) \to A_T(\omega)$ pour tout $T=T^{n_0}_{i_0}$ (n_0, i_0 quelconques), pour tout $\omega\notin N$ avec $P(N)=0$. Comme l'ensemble $\{T^n_i(\omega): n,i\in\mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$, A^n et A sont croissants, et A est continu, on en déduit classiquement que $A^n(\omega) \to A(\omega)$ uniformément sur les compacts, pour $\omega\notin N$. Donc $A^n \xrightarrow{P-u} A$. $\square$

Pour tout temps d'arrêt T on pose

(3-5) $$\gamma^{X,n}_{i,T} = 1_{\{T^n_{i-1}<T\leq T^n_i\}} \times \inf(1,\mathrm{Max}(\sup\nolimits_{T^n_{i-1}<s<T} |X_s-X_{T^n_{i-1}}|, \sup\nolimits_{T<s\leq T^n_i} |X_s-X_T|))$$

(3-6) LEMME : <u>Pour tout</u> $t>0$, <u>on a</u> $\sum_{i\geq 1} 1_{\{T^n_i\leq t\}} E^n_i(\gamma^{X,n}_{i,T}) \xrightarrow{L^1} 0$.

<u>Preuve</u>. Soit $\varepsilon>0$, $R_0=0,\dots,R_{p+1}=\inf(t>R_p: |\Delta X_t|>\varepsilon/2)$, $X'_t = X_t-\sum_{s\leq t}\Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|>\varepsilon/2\}}$, et pour $\eta>0$:

$$S_\eta = \inf(t: \sup\nolimits_{(s-\eta)^+\leq r\leq s} |X'_r-X'_s|>\varepsilon).$$

R_p et S_η sont des temps d'arrêt, $\lim_{(p)}\uparrow R_p=\infty$, et comme $|\Delta X'|\leq\varepsilon/2$ on a $\lim_{\eta\downarrow 0}\uparrow S_\eta=\infty$. Il existe donc $q\in\mathbb{N}^*$, $\eta>0$ tels que

(3-7) $$P(R_q\wedge S_\eta \leq t+1) \leq \varepsilon .$$

Pour n assez grand on a $\alpha_n\leq\eta\wedge 1$, donc sur $\{R_q\wedge S_\eta\geq T^n_i\}$,

$$\gamma^{X,n}_{i,T} \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{si } R_p\notin]T^n_{i-1},T[\cup]T,T^n_i] \ \ \forall p\leq q \ \text{ et } \ T^n_{i-1}<T\leq T^n_i \\ 1_{\{T^n_{i-1}<T\leq T^n_i\}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\{R_q\wedge S_\eta\le T_i^n,\ T_{i-1}^n\le t\} \subset \{R_q\wedge S_\eta\le t+1\}$ il vient

$$E[\sum_{i\ge 1, T_i^n\le t} E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n})] \le E[\sum_{i\ge 1, T_{i-1}^n\le t} \gamma_{i,T}^{X,n}]$$

$$\le E[\sum_{i\ge 1, T_{i-1}^n\le t} 1_{\{T_{i-1}^n<T\le T_i^n\}} \{\varepsilon + 1_{\{R_q\wedge S_\eta\le t+1\}} + \sum_{p=1}^q 1_{\{T_{i-1}^n<R_p<T\}} + \sum_{p=1}^q 1_{\{T<R_p\le T_i^n\}}\}]$$

$$\le \varepsilon + P(R_q\wedge S_\eta\le t+1) + \sum_{p=1}^q \{P(R_p<T<R_p+\alpha_n) + P(T<R_p<T+\alpha_n)\}.$$

Comme $\alpha_n\to 0$, pour n assez grand on a $P(R_p<T<R_p+\alpha_n) \le \varepsilon/q$ et $P(T<R_p<T+\alpha_n) \le \varepsilon/q$ pour tout $p\le q$. Donc par (3-7),

$$E[\sum_{i\ge 1, T_i^n\le t} E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n})] \le 4\varepsilon. \ \square$$

Pour toute mesure ρ on introduit la notation $\rho(f)=\int\rho(dx)f(x)$, et

$$\text{(3-8)}\quad \begin{cases} a_t^X(\omega) = \nu^X(\omega;\{t\}\times\mathbb{R}), \\ \nu^{X,c}(\omega;dt\times dx) = \nu^X(\omega;dt\times dx)1_{\{a_t^X(\omega)=0\}}, \quad \nu^{X,d} = \nu - \nu^{X,c}. \end{cases}$$

(3-9) LEMME: <u>Soit</u> $X\in\mathcal{M}$, $a>0$, $f\in\mathcal{L}_1$ <u>avec</u> $f(x)=0$ <u>pour</u> $|x|\le a$, <u>et supposons que</u> $\sum_{s\le t} 1_{\{|\Delta X_s|>a/2\}} \le K_t < \infty$ <u>identiquement pour tout</u> $t<\infty$. <u>Alors</u>

$$\sum_{i\ge 1, T_i^n\le .} \rho_i^{X,n}(f) \xrightarrow{P-u} f*\nu^{X,c}.$$

<u>Preuve</u>. Le processus $A=f*\nu^X$ vérifie $\{\Delta A\neq 0\}\subset D$, et $A^c=f*\nu^{X,c}$, et

$$E[\mathrm{Var}(A)_t] \le E[|f|*\nu_t^X] \le E[\sum_{s\le t} 1_{\{|\Delta X_s|>a\}}] \le K_t.$$

Etant donné (3-4) il suffit donc de montrer que

$$\text{(3-11)}\qquad \sum_{i\ge 1, T_i^n\le t} |\beta_i^n| \xrightarrow{P} 0,$$

où $\beta_i^n = \rho_i^{X,n}(f) - E_i^n[\Delta_i^n(f*\nu^X)]$. Comme T_i^n est prévisible, on a $E_i^n[\Delta_i^n(f*\nu^X)] = E_i^n[\Delta_i^n(f*\mu^X)]$, donc

$$\beta_i^n = E_i^n(\theta_i^n), \quad \text{avec} \quad \theta_i^n = f(\Delta_i^n X) - \sum_{T_{i-1}^n < s < T_i^n} f(\Delta X_s).$$

Soit $\varepsilon \in]0,a/4]$ et R_p, S_η, X' comme dans la preuve de (3-5). On choisit q et η de sorte qu'on ait (3-7). D'après l'hypothèse de majoration par K_t et le fait que $f \in \mathcal{L}_1$ et $f(x)=0$ pour $|x|\le a$, il vient sur $\{T_{i-1}^n \le t\}$:

$$|\theta_i^n| \le \begin{cases} 0 & \text{si } S_\eta \ge T_i^n \text{ et }]T_{i-1}^n, T_i^n[\text{ contient au plus un } R_p\text{, auquel cas } |\Delta X_{R_p}| \le \frac{a}{2}\,; \\ 2\varepsilon & \text{sur } G_i^{np} = \{S_\eta \ge T_{i-1}^n,\ R_{p-1} \le T_{i-1}^n < R_p < T_i^n \le R_{p+1},\ |\Delta X_{R_p}| > \frac{a}{2}\}\,; \\ 1+K_t & \text{si } S_\eta < T_i^n, \text{ ou si }]T_{i-1}^n, T_i^n[\text{ contient au moins deux } R_p. \end{cases}$$

Soit $R = \inf_{p\le q}(R_p - R_{p-1})$. On a $P(R \le \alpha_n) \le \frac{\varepsilon}{q-1}$ pour n assez grand, et donc

$$E[1_{\{R_q \wedge S_\eta > t\}} \sum_{i\ge 1, T_i^n \le t} |\beta_i^n|] \le E[\sum_{i\ge 1, T_{i-1}^n \le t, T_{i-1}^n < R_q \wedge S_\eta} |\beta_i^n|]$$

$$\le E[\sum_{i\ge 1, T_{i-1}^n \le t, T_{i-1}^n < R_q \wedge S_\eta} |\theta_i^n|]$$

$$\le E[\sum_{i\ge 1, T_{i-1}^n \le t} \{(1+K_t)(1_{\{T_{i-1}^n < R_q \wedge S_\eta < T_i^n\}} + \sum_{p=1}^q 1_{\{T_{i-1}^n < R_p < R_{p+1} < T_i^n\}}) + 2\varepsilon \sum_{p=1}^q 1_{G_i^{np}}\}]$$

$$\le (1+K_t)[P(R_q \wedge S_\eta \le t+1) + (q-1)P(R \le \alpha_n)] + 2\varepsilon\, E[\sum_{p=1}^q 1_{\{T_{i-1}^n < R_p < T_i^n\}} 1_{\{T_{i-1}^n \le t\}} 1_{\{|\Delta X_{R_p}| > a/2\}}]$$

$$\le 2\varepsilon(1+K_t) + 2\varepsilon\, E[\sum_{s\le t+1} 1_{\{|\Delta X_s| > a/2\}}] \le 2\varepsilon(1+2K_t)$$

(grâce à (3-7)). En utilisant encore (3-7), on obtient pour n assez grand:

$$P(\sum_{i\ge 1, T_i^n \le t} |\beta_i^n| > \varepsilon') \le \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon'}(1+2K_{t+1})$$

pour tout $\varepsilon' > 0$. Comme $\varepsilon \in]0,a/4]$ est arbitraire, on a (3-11). □

(3-12) LEMME: <u>Soit</u> $X \in \mathcal{K}$.

a) Si $f\in C^+$ on a $\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq .} \rho_i^{X,n}(f) \xrightarrow{P-u} f*\nu^{X,c}$.

b) Pour tout $t>0$ on a $\sup_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1) \xrightarrow{P} 0$.

Preuve. a) Si T est un temps d'arrêt, on a:

$$\Delta_i^n X^T = \begin{cases} 0 & \text{si } T\leq T_{i-1}^n \\ \Delta_i^n X & \text{si } T\geq T_i^n \\ \Delta_i^n X + (X_T - X_{(T_i^n)-}) & \text{si } T_{i-1}^n<T<T_i^n, \end{cases}$$

et donc en particulier (voir (3-5)):

$$(3\text{-}13)\qquad 2\wedge|\Delta_i^n X^T - \Delta_i^n X| \;\leq\; 2\gamma_{i,T}^{X,n} \quad \text{sur } \{T>T_{i-1}^n\}.$$

Si $f\in\mathcal{L}_1$ on a $|f(x)-f(y)|\leq 2\wedge|x-y|$, donc

$$|\rho_i^{X^T,n}(f)-\rho_i^{X,n}(f)| = |E_i^n(f(\Delta_i^n X^T)-f(\Delta_i^n X))| \leq 2E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n}) \quad \text{sur } \{T>T_{i-1}^n\},$$

et donc, dès que $\alpha_n\leq 1$,

$$E[\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |\rho_i^{X^T,n}(f) - \rho_i^{X,n}(f)|\, 1_{\{t+1<T\}}]$$

$$(3\text{-}14)\qquad \leq 2E[\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t, T_{i-1}^n<T} E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n})] \leq 2E[\sum_{i\geq 1, T_{i-1}^n\leq t} E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n})] \to 0,$$

par (3-6).

Pour obtenir le résultat, il suffit de considérer le cas où $f\in C^+\cap\mathcal{L}_1$. Soit $a>0$ tel que $f(x)=0$ pour $|x|\leq a$, et $R_p = \inf(t: \sum_{s\leq t} 1_{\{|\Delta X_s|>a/2\}}\geq p\}$. On a $\lim_p\uparrow R_p=\infty$, donc si $\varepsilon>0$ il existe p avec

$$(3\text{-}15)\qquad P(R_p\leq t+1) \;\leq\; \varepsilon\;,$$

et (3-14) appliqué à $T=R_p$ entraine pour n assez grand:

$$P[\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |\rho_i^{X^{R_p},n}(f) - \rho_i^{X,n}(f)| > \varepsilon]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} E[\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |\rho_i^{X^{R_p},n}(f)-\rho_i^{X,n}(f)|1_{\{R_p>t+1\}}] + P(R_p\leq t+1)$$

$$(3\text{-}16)\qquad \leq 2\varepsilon.$$

Mais les processus X^{R_p} vérifient les hypothèses de (3-9), donc

$$(3\text{-}17)\qquad \sum_{i\geq 1,T_i^n\leq .} \rho_i^{X^{R_p},n}(f) \xrightarrow{P-u} f*\nu^{X^{R_p},c} = (f*\nu^{X,c})^{R_p}.$$

Comme $(f*\nu^{X,c})_t^{R_p} = f*\nu_t^{X,c}$ si $t\leq R_p$, on déduit le résultat de (3-15), (3-16) et (3-17).

b) Si $\varepsilon>0$ il existe $f_\varepsilon\in C^+$ avec $0\leq f_\varepsilon\leq 1$ et $f_\varepsilon(x)=1$ pour $|x|\geq\varepsilon$. Alors (a) implique

$$\delta_t^{n,\varepsilon} := \sup_{i\geq 1,T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(f_\varepsilon) \xrightarrow{P} \sup_{s\leq t} \Delta(f_\varepsilon*\nu^{X,c}) = 0,$$

tandis que

$$\sup_{i\geq 1,T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1) \leq \varepsilon + \delta_t^{n,\varepsilon}.$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on a le résultat. □

Terminons ces préliminaires par une remarque. Pour tout temps prévisible fini T on a $\nu^X(\{T\}\times A) = P(\Delta X_T\in A\setminus\{0\}|\mathcal{F}_{T-})$. En comparant à (2-5), on obtient donc

$$(3\text{-}18)\qquad \bar\rho_i^{X,n}(dx) = \nu^X(\{T_i^n\}\times dx) + (1-a^X_{T_i^n})\varepsilon_0(dx).$$

<u>Preuve de (3-3)</u>. Soit $X\in\mathcal{M}$. Il suffit de montrer [U-δ] pour $f\in C^+\cap\mathcal{L}_1$. D'après (3-18), et comme $f(0)=0$,

$$\sum_{i\geq 1,T_i^n\leq t} \bar\rho_i^{X,n}(f) = (f1_{D^n})*\nu_t^X.$$

De plus $X\in\mathcal{M}$ implique que $\{a^X>0\}\subset D$, donc $1_D\cdot\nu^X=\nu^{X,d}$. D'après le théorème de Lebesgue,

$$\sum_{i\geq 1,T_i^n\leq .} \bar\rho_i^{X,n}(f) \xrightarrow{P-u} f*\nu^{X,d}.$$

Etant donnés (3-2), (3-12-a) et (2-5), il suffit donc de montrer que

$$(3\text{-}19)\qquad \sum_{i\geq 1,T_i^n\leq t} \int \bar\rho_i^{X,n}(dx)|E_i[f(x+\Delta_i X)-f(\Delta_i X)-f(x)]| \xrightarrow{P} 0$$

pour $t>0$, $f\in\mathcal{C}^+\cap\mathcal{L}_1$.

Soit $a>0$ tel que $f(x)=0$ pour $|x|\leq a$. Soit $\varepsilon\in]0,a/2]$. On a $|f(x+\Delta_i^n X)-f(\Delta_i^n X)-f(x)| \leq 2(1\wedge|\Delta_i^n X|)$, donc

$$\begin{aligned}\alpha_t^{n,\varepsilon} &:= \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \int_{|x|>\varepsilon} \bar{\rho}_i^{X,n}(dx)\,|E_i^n[f(x+\Delta_i^n X)-f(\Delta_i^n X)-f(x)]| \\ &\leq 2\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \bar{\rho}_i^{X,n}(|x|>\varepsilon)\ \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1) \\ &\leq 2(1_{\{|x|>\varepsilon\}}*\nu_t^X)\ \sup_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1)\end{aligned}$$

d'après (3-18). On déduit alors de (3-12-b) que

$$\text{(3-20)} \qquad \alpha_t^{n,\varepsilon} \xrightarrow{P} 0, \qquad \forall\varepsilon>0,\ \forall t>0.$$

Par ailleurs, comme $\varepsilon\leq a/2$ on a

$$|x|\leq\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x+\Delta_i^n X)-f(\Delta_i^n X)-f(x)| \leq \begin{cases}\varepsilon & \text{si } |\Delta_i^n X|>a/2 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\beta_t^{n,\varepsilon} &:= \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \int_{|x|\leq\varepsilon} \bar{\rho}_i^{X,n}(dx)\,|E_i^n[f(x+\Delta_i^n X)-f(\Delta_i^n X)-f(x)]| \\ &\leq \varepsilon \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(|x|>a/2).\end{aligned}$$

Soit $g\in\mathcal{C}^+$ avec $0\leq g\leq 1$, $g(x)=1$ pour $|x|\geq a/2$. D'après (3-12),

$$\begin{aligned}&\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(|x|>a/2) \\ &\qquad \leq \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(g) \xrightarrow{P} g*\nu_t^{X,c} < \infty,\end{aligned}$$

et donc

$$\text{(3-21)} \qquad P[\beta_t^{n,\varepsilon} > \varepsilon(1+g*\nu_t^{X,c})] \rightarrow 0.$$

Comme le premier membre de (3-19) égale $\alpha_t^{n,\varepsilon}+\beta_t^{n,\varepsilon}$, [U-δ] découle immédiatement de (3-20) et (3-21). □

4 - CARACTERISATION DE $\tilde{\mathcal{J}}_g$ ET DE $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$

§a - Caractérisation de $\tilde{\mathcal{J}}_g$.

Dans ce qui suit, ν^X désigne toujours la mesure de Lévy du processus càdlàg adapté X. On introduit la classe $\mathcal{J}_0$ des processus càdlàg adaptés X tels que (avec la notation (2-1))

$$(4\text{-}1) \qquad X(h) = B + M$$

avec B prévisible nul en 0, et M martigale locale. Bien-sûr, la décomposition (4-1) n'est en général pas unique. Comme $X(h)-X(h')= (h-h')*(\mu^X-\nu^X) + (h-h')*\nu^X$, on voit que cette classe ne dépend pas de la fonction de troncation h. Voici quelques propriétés utiles:

(4-2) LEMME: a) $\mathcal{J}_0$ <u>est un espace vectoriel et une classe locale, qui contient les semimartingales</u>.

b) <u>Soit</u> $X\in\mathcal{J}_0$, <u>avec la décomposition (4-1). Les processus de saut</u> ΔB <u>et</u> ΔM <u>sont bornés, et</u>

$$(4\text{-}3) \qquad \Delta B_t = \nu^X(\{t\}\times h)$$

$$(4\text{-}4) \qquad A_t := [h(x)-\Delta B]^2*\nu_t^X + \sum_{s\leq t}(1-a_s^X)(\Delta B_s)^2 < \infty$$

<u>pour tout</u> t (a^X est défini en (3-8)) <u>et on a</u>

$$(4\text{-}5) \qquad \langle M,M\rangle = \langle M^c,M^c\rangle + A.$$

<u>Preuve</u>. a) Soit $X,Y\in\mathcal{J}_0$ et $Z=X+Y$. On a $Z(h)=X(h)+Y(h)+G$, avec

$$G = \sum_{s\leq .} [h(\Delta X_s+\Delta Y_s) - h(\Delta X_s) - h(\Delta Y_s)]$$

et G est clairement à variation intégrable; donc $G=G'+G''$ avec G' prévisible à variation finie et G'' martingale locale, donc $Z\in\mathcal{J}_0$. Le reste est évident.

b) En prenant la projection prévisible des sauts dans (4-1) on obtient ${}^{p}(\Delta X(h)) = {}^{p}(h(\Delta X)) = \Delta B$, d'où (4-3) et $|\Delta B| \leq K$, si $K = \sup|h|$. On a aussi $|\Delta M| \leq |h(\Delta X)| + |\Delta B| \leq 2K$. De plus

$$[M,M] = \langle M^c,M^c\rangle + (h(x)-\Delta B)^2 * \mu^X + \sum_{s\leq .} (\Delta B_s)^2 \, 1_{\{\Delta X_s=0\}},$$

dont on déduit aisément (4-5) et donc (4-4).□

(4-6) PROPOSITION: <u>Soit</u> $X \in \mathcal{M}$. <u>Pour que</u> $X \in \tilde{\mathcal{S}}_g$ <u>il faut et il suffit qu'il existe un processus càdlàg</u> $B^X(h)$ <u>et un processus croissant continu</u> C^X <u>tels que</u> $B = B^X(h)$ <u>vérifie (4-3) et (4-4) et que, si</u> $\tilde{C}^X(h) = C^X + A$ (où A est donné par (4-4)) <u>on ait</u>

[U-β] $\quad B^{X,n}(h) \xrightarrow{P-u} B^X(h)$,

[U-γ] $\quad \tilde{C}^{X,n}(h) \xrightarrow{P-u} \tilde{C}^X(h)$,

(voir (3-2) pour $B^{X,n}(h)$ et $\tilde{C}^{X,n}(h)$).

<u>Dans ce cas</u>, $B^X(h)$, C^X, $\tilde{C}^X(h)$ <u>sont prévisibles, et</u> $(B^X(h), C^X, \nu^X)$ <u>est le triplet des</u> τ-<u>caractéristiques de</u> X.

Il est bien connu que, sous [U-δ] (automatiquement vérifié d'après (3-3) ici), les conditions [U-β] et [U-γ] ne dépendent pas de la fonction de troncation h, pourvu qu'elle soit continue. Dans ce cas, C^X ne dépend pas de h, et on a

(4-7) $$B^X(h') - B^X(h) = (h'-h) * \nu^X.$$

<u>Preuve</u>. D'après [3], $\zeta^{X,n}(\omega,.)$ converge étroitement si et seulement s'il existe une mesure $\nu(\omega,.)$, une fonction càdlàg $B_.(\omega)$ et une fonction croissante continue $C_.(\omega)$ vérifiant

$$(4\text{-}8)\quad \begin{cases} \nu(\{0\}\times\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}_+\times\{0\}) = 0, \\ \nu([0,t]\times\{|x|>\varepsilon\}) < \infty, \qquad a_t := \nu(\{t\}\times\mathbb{R}) \le 1, \\ \Delta B_t = \nu(\{t\}\times h), \\ \tilde{C}_t := C_t + (h(x)-\Delta B)^2 * \nu_t + \sum_{s\le t} (1-a_s)(\Delta B_s)^2 < \infty; \end{cases}$$

$$(4\text{-}9)\qquad \sum_{s\le t} \left|\int \nu(\{s\}\times dx) h(x-\Delta B_s) + (1-a_s)h(-\Delta B_s)\right| < \infty;$$

et tels que (en omettant d'écrire la fonction de troncation h):

$$(4\text{-}10)\quad \begin{cases} B^{X,n}(\omega) \xrightarrow{Sk} B(\omega) \\ \tilde{C}^{X,n}(\omega) \xrightarrow{Sk} \tilde{C}(\omega) \\ f*\nu^{X,n}(\omega) \xrightarrow{Sk} f*\nu(\omega) \qquad \forall f\in \mathcal{C}_0^+, \end{cases}$$

où $\xrightarrow{Sk}$ désigne la convergence au sens de Skorokhod et où $\mathcal{C}_0^+$ est une famille dénombrable de fonctions de $\mathcal{C}^+$, déterminante pour la convergence étroite. Dans ce cas, $(B(\omega),C(\omega),\nu(\omega))$ sont les caractéristiques du PAI de loi $\zeta^X(\omega,.)$, limite des $\zeta^{X,n}(\omega,.)$. Enfin si dans (4-10) on a $f*\nu^{X,n}(\omega) \to f*\nu(\omega)$ localement uniformément pour toute $f\in\mathcal{C}_0^+$, alors les convergences $B^{X,n}(\omega) \to B(\omega)$ et $\tilde{C}^{X,n}(\omega) \to \tilde{C}(\omega)$ au sens de Skorokhod et au sens local uniforme coïncident, car les sauts de $B^{X,n}$ et de $\tilde{C}^{X,n}$ (resp. B et $\tilde{C}$) sont aussi des sauts de $f*\nu^{X,n}$ (resp. $f*\nu$) pour f bien choisie dans $\mathcal{C}_0^+$.

Par ailleurs on peut remarquer que (4-8) entraine (4-9) (nous aurions dû le noter dans [3]!). En effet si $h(x)=x$ pour $|x|\le\alpha$ et si $K=\sup|h|$, on a

$$\sum_{s\le t} \left|\int \nu(\{s\}\times dx) h(x-\Delta B_s) + (1-a_s)h(-\Delta B_s)\right|$$

$$= \sum_{s\le t} \left|\int \nu(\{s\}\times dx)[h(x-\Delta B_s) - h(x)] + \Delta B_s + (1-a_s)h(-\Delta B_s)\right|$$

$$= \sum_{s\le t,\,|\Delta B_s|>\alpha/2} \left|\int \nu(\{s\}\times dx)[h(x-\Delta B_s)-h(x)] + \Delta B_s + (1-a_s)h(-\Delta B_s)\right|$$

$$+ \sum_{s\le t,\,|\Delta B_s|\le\alpha/2} \left|\int \nu(\{s\}\times dx)[h(x-\Delta B_s) - h(x) + \Delta B_s]\right.$$

$\leq \quad 4K \sum_{s\leq t} 1_{\{|\Delta B_s|>\alpha/2\}} + 3K\nu([0,t]\times\{|x|>\alpha/2\}) \quad < \quad \infty.$

On peut alors appliquer (3-3). Quitte à prendre une sous-suite on a $f*\nu^{X,n}(\omega) \to f*\nu^X(\omega)$ localement uniformément pour toute $f\in C_0^+$ et tout $\omega\notin N$, avec $P(N)=0$. Donc $\zeta^{X,n}(\omega,.)$ converge si et seulement s'il existe B et C vérifiant (4-8), ou de manière équivalente (4-3) et (4-4), tels que $B^{X,n}(\omega) \to B(\omega)$ et $\tilde{C}^{X,n}(\omega) \to \tilde{C}(\omega)$ localement uniformément. On en déduit l'équivalence cherchée et la dernière assertion de la proposition.

Enfin comme $B^{X,n}$ et $\tilde{C}^{X,n}$ sont prévisibles par construction, [U-β] et [U-γ] entrainent la prévisibilité de B^X et $\tilde{C}^X$, et donc de C^X.□

§b - Localisation de $\tilde{\mathcal{J}}_g$.

Dans le but de prouver le critère (2-19-b) on introduit aussi la classe $\tilde{\mathcal{J}}'_g$ des processus $X\in\mathcal{M}$ vérifiant [U-β] pour un processus $B^X(h)$. On montrera ultérieurement que $\tilde{\mathcal{J}}'_g=\tilde{\mathcal{J}}_g$.

(4-11) PROPOSITION: Les classes $\tilde{\mathcal{J}}_g$ et $\tilde{\mathcal{J}}'_g$ sont locales. De plus si $X\in\tilde{\mathcal{J}}'_g$ (resp. $\tilde{\mathcal{J}}_g$) et si T est un temps d'arrêt, on a $B^{X^T}(h)=[B^X(h)]^T$ (resp. $\tilde{C}^{X^T}(h)=[\tilde{C}^X(h)]^T$ et $C^{X^T}=(C^X)^T$).

Preuve. a) Commençons par un résultat auxiliaire. Soit $f\in\mathcal{L}_a$ avec $f(0)=0$ et T un temps d'arrêt et $X\in\mathcal{M}$. Soit

$$\alpha_i^n(X,f,T,t) = \alpha_i^n := 1_{\{T_i^n\leq t\}}[\tilde{\rho}_i^{X^T,n}(f) - \tilde{\rho}_i^{X,n}(f)1_{\{T_i^n\leq T\}}]$$

$$= 1_{\{T_i^n\leq t\wedge T\}}[\bar{\rho}_i^{X,n}*(\rho_i^{X^T,n} - \rho_i^{X,n})](f) + 1_{\{T<T_i^n\leq t\}}\rho_i^{X^T,n}(f)$$

(en effet, $\bar{\rho}_i^{X^T,n} = \bar{\rho}_i^{X,n}$ si $T_i^n\leq T$, et $\bar{\rho}_i^{X^T,n} = \varepsilon_0$ sinon). On a

$$|f(x+\Delta_i^n X) - f(x+\Delta_i^n X^T)| \leq a(2\wedge|\Delta_i^n X - \Delta_i^n X^T|),$$

donc (3-13) entraine que sur $\{T_{i-1}^n<T\}$,

$$|[\bar{\rho}_i^{X,n}*(\rho_i^{X^T,n} - \rho_i^{X,n})](f)| \leq 2aE_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n}).$$

Si $T \leq T_{i-1}^n$ on a $\Delta_i^n X^T = 0$, donc $\rho_i^{X^T,n} = \varepsilon_0$, et par suite

$$\sum_{i\geq 1} |\alpha_i^n| \leq 2a \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n}) + \sup_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X^T,n}(|f|).$$

Comme $|f(x)| \leq a(|x|\wedge 1)$, (3-6) et (3-12-b) entrainent

$$\text{(4-12)} \qquad \sum_{i\geq 1} |\alpha_i^n(X,f,T.t)| \xrightarrow{P} 0.$$

b) Le choix de la fonction h étant arbitraire, on peut supposer que $h\in\mathcal{L}_1$. D'après (3-2) on a (en omettant h):

$$\text{(4-13)} \qquad B_t^{X^T,n} - (B^{X,n})_t^T = \sum_{i\geq 1} \alpha_i^n(X,h,T,t).$$

Si X vérifie [U-β] on a $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} B^X$ et il découle de (4-12) et (4-13) que $B^{X^T,n} \xrightarrow{P-u} (B^X)^T$, donc X^T vérifie [U-β] avec $B^{X^T} = (B^X)^T$.

Inversement supposons que les temps d'arrêt T_p croissent vers $+\infty$, et que $X(p) := X^{T_p} \in \tilde{\mathscr{S}}'_g$ pour chaque p. D'après ce qui précède on a $(B^{X(p+1)})^{T_p} = B^{X(p)}$, donc il existe un processus B^X tel que $B^{X(p)} = (B^X)^{T_p}$ pour tout p. De plus $B^{X(p),n} \xrightarrow{P-u} (B^X)^{T_p}$, donc (4-13) et (4-12) entrainent $(B^{X,n})^{T_p} \xrightarrow{P-u} (B^X)^{T_p}$ et comme $T_p\uparrow\infty$ on en déduit $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} B^X$ et $X\in\tilde{\mathscr{S}}'_g$.

c) D'après (3-2) encore, pour tout temps d'arrêt T on a

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_t^{X^T,n} - (\tilde{C}^{X,n})_t^T &= \sum_{i\geq 1} \alpha_i^n(X,h^2,T,t) \\
&\quad + \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} [1_{\{T_i^n\leq T\}} \tilde{\rho}_i^{X,n}(h)^2 - \tilde{\rho}_i^{X^T,n}(h)^2] \\
&= \sum_{i\geq 1} \alpha_i^n(X,h^2,T,t) - \sum_{i\geq 1} 1_{\{T<T_i^n\leq t\}} \rho_i^{X^T,n}(h)^2 \\
&\quad + \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t\wedge T} [\tilde{\rho}_i^{X,n}(h) - \tilde{\rho}_i^{X^T,n}(h)][\tilde{\rho}_i^{X,n}(h) + \tilde{\rho}_i^{X^T,n}(h)]
\end{aligned}$$

(car $\bar{\rho}_i^{X^T,n} = \varepsilon_0$ si $T<T_i^n$). Comme $h\in\mathcal{L}_1$ on a donc pour $s\leq t$:

$$\begin{aligned}
|\tilde{C}_s^{X^T,n} - (\tilde{C}^{X,n})_s^T| &\leq \sum_{i\geq 1} \{|\alpha_i^n(X,h^2,T,t)| + 2|\alpha_i^n(X,h,T,t)|\} \\
&\quad + \sup_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X^T,n}(|x|\wedge 1)^2,
\end{aligned}$$

en utilisant encore le fait que $\rho_i^{X^T,n} = \varepsilon_0$ si $T \le T_{i-1}^n$. D'après (4-12) (car $h^2 \in \mathcal{L}_2$) et (3-12-b), il vient

$$\text{(4-14)} \qquad \sup_{s\le t} |\tilde{C}_s^{X^T,n} - (\tilde{C}^{X,n})_s^T| \xrightarrow{P} 0.$$

On démontre alors exactement comme en (b) que la propriété [U-γ] est locale, et que si X satisfait [U-γ] alors $\tilde{C}^{X^T} = (\tilde{C}^X)^T$. Enfin (4-2) et (4-4) sont aussi des propriétés locales, donc la classe $\tilde{\mathcal{J}}_g$ est locale, et si $X \in \tilde{\mathcal{J}}_g$ et si T est un temps d'arrêt on déduit $C^{X^T} = (C^X)^T$ de $\tilde{C}^{X^T} = (\tilde{C}^X)^T$ et de $\nu^{X^T} = (\nu^X)^T$. □

§c - La classe $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$.

Commençons par une propriété de martingale qui sera utilisée plusieurs fois. Posons

$$\text{(4-15)} \quad \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_t^n = \text{la tribu telle que } \overline{\mathcal{F}}_t^n \cap \{T_i^n \le t < T_{i+1}^n\} = \mathcal{F}_{T_i^n} \cap \{T_i^n \le t < T_{i+1}^n\} \\ \qquad \text{pour tout } i \ge 0, \\ \overline{X}_t^n = X_{T_i^n} \quad \text{si} \quad T_i^n \le t < T_{i+1}^n. \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{F}}^n = (\overline{\mathcal{F}}_t^n)_{t\ge 0}$ est clairement une filtration continue à droite.

(4-16) LEMME: <u>Soit</u> X <u>un processus borné par</u> K, <u>et</u> h <u>une fonction de troncation telle que</u> $h(x)=x$ <u>pour</u> $|x| \le 4K$. <u>Alors</u>

$$\text{(4-17)} \quad \begin{cases} M_t^n = \overline{X}_t^n - B_t^{X,n}(h) \\ N_t^n = (M_t^n)^2 - \tilde{C}_t^{X,n}(h) \end{cases}$$

<u>sont des</u> $\overline{\mathbb{F}}^n$-<u>martingales</u>.

<u>Preuve</u>. Il suffit clairement de montrer que

$$E_i^n(M_{T_i^n}^n - M_{T_{i-1}^n}^n) = E_i^n(N_{T_i^n}^n - N_{T_{i-1}^n}^n) = 0$$

pour tout $i \ge 1$. Remarquer que $\overline{\rho}_i^{X,n}$ et $\rho_i^{X,n}$ ne chargent que l'intervalle $[-2K, 2K]$, donc d'après les propriétés de h,

$$\tilde{\rho}_i^{X,n}(h) = \int \bar{\rho}_i^{X,n}(dx)\rho_i^{X,n}(dy)h(x+y) = \bar{\rho}_i^{X,n}(h) + \rho_i^{X,n}(h)$$

$$\text{(4-18)}\quad \tilde{\rho}_i^{X,n}(h^2) = \int \bar{\rho}_i^{X,n}(dx)\rho_i^{X,n}(dy)h^2(x+y)$$

$$= \bar{\rho}_i^{X,n}(h^2) + \rho_i^{X,n}(h^2) + 2\bar{\rho}_i^{X,n}(h)\rho_i^{X,n}(h).$$

D'après les définitions de $\bar{\rho}_i^{X,n}$ et de $\rho_i^{X,n}$ et (3-2) et (4-18),

$$E_i^n(M^n_{T_i^n} - M^n_{T_{i-1}^n}) = E_i^n[\Delta_i^n X + \Delta X_{T_i^n} - \bar{\rho}_i^{X,n}(h) - \rho_i^{X,n}(h)]$$

$$= E_i^n(\Delta_i^n X) - \rho_i^{X,n}(h) + E_i^n[E(\Delta X_{T_i^n}|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}) - \bar{\rho}_i^{X,n}(h)] = 0$$

(rappelons encore que $\Delta_i^n X = h(\Delta_i^n X)$ sous nos hypothèses). De même,

$$E_i^n(N^n_{T_i^n} - N^n_{T_{i-1}^n}) = E_i^n[\{\Delta_i^n X + \Delta X_{T_i^n} - \bar{\rho}_i^{X,n}(h) - \rho_i^{X,n}(h)\}^2$$

$$- \bar{\rho}_i^{X,n}(h^2) - \rho_i^{X,n}(h^2) - 2\bar{\rho}_i^{X,n}(h)\rho_i^{X,n}(h) + \{\bar{\rho}_i^{X,n}(h) + \rho_i^{X,n}(h)\}^2]$$

$$= E_i^n[\{\Delta_i^n X - \rho_i^{X,n}(h)\}^2 + \{\Delta_i^n X - \bar{\rho}_i^{X,n}(h)\}^2 - \bar{\rho}_i^{X,n}(h^2) - \rho_i^{X,n}(h^2)$$

$$+ \bar{\rho}_i^{X,n}(h)^2 + \rho_i^{X,n}(h)^2 + 2\{\Delta_i^n X - \rho_i^{X,n}(h)\}\{\Delta X_{T_i^n} - \bar{\rho}_i^{X,n}(h)\}]$$

$$= E_i^n[(\Delta_i^n X)^2 + 2\rho_i^{X,n}(h)^2 - 2\Delta_i^n X\, \rho_i^{X,n}(h) - \rho_i^{X,n}(h^2)]$$

$$+ E_i^n[E\{(\Delta X_{T_i^n})^2 + 2\bar{\rho}_i^{X,n}(h)^2 - 2\Delta X_{T_i^n}\, \bar{\rho}_i^{X,n}(h) - \bar{\rho}_i^{X,n}(h^2)|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}\}]$$

$$+ 2E_i^n[\{\Delta_i^n X - \rho_i^{X,n}(h)\}\, E\{\Delta X_{T_i^n} - \bar{\rho}_i^{X,n}(h)|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}\}] = 0. \square$$

(4-19) PROPOSITION: La classe $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ est locale.

Preuve. Comme la classe localisée d'une classe stable par arrêt est, classiquement [2], une classe locale, il suffit de montrer que $\tilde{\mathcal{B}}$ est stable par arrêt.

Soit donc $X \in \tilde{\mathcal{B}}$, borné par K. On choisit h de sorte que $h(x)=x$ pour $|x| \leq 4K$; on a donc (4-18), et [U-β] avec $B^X(h)=X$ est la même chose que (2-11). D'après (4-11) on a donc $X^T \in \tilde{\mathcal{B}}$ pour tout temps d'arrêt T. $\square$

(4-20) PROPOSITION: <u>On a</u> $X \in \tilde{\mathfrak{B}}_{loc}$ <u>si et seulement si</u> $X \in \tilde{\mathscr{I}}_g$ <u>avec</u> $B^X(h) = X(h)$ <u>et</u> $\nu^X = \mu^X$; <u>dans ce cas, on a aussi</u> $C^X = \tilde{C}^X(h) = 0$.

<u>Preuve</u>. La prévisibilité de X équivaut à $\nu^X = \mu^X$. En vertu de (4-11) et de (4-19), il suffit de considérer des processus X bornés, disons par K, et on choisit h de sorte que $h(x)=x$ pour $|x| \leq 4K$. En particulier on a $X(h)=X$.

a) Supposons que $X \in \tilde{\mathscr{I}}_g$ avec $B^X(h)=X(h)=X$ et $\nu^X=\mu^X$, donc X est prévisible. D'après la preuve de (4-19), [U-β] avec $B^X(h)=X$ entraine (2-11), donc $X \in \tilde{\mathfrak{B}}$.

b) Supposons que $X \in \tilde{\mathfrak{B}}$. On a déjà vu que $\nu^X=\mu^X$ et qu'on a [U-β] avec $B^X(h)=X=X(h)$. Soit aussi $T_n = \inf(t: |B^{X,n}(h)_t| \geq 2K)$, de sorte que $|B^{X,n}(h)_{t \wedge T_n}| \leq 6K$ et, avec les notations (4-17), $|M^n_{t\wedge T_n}| \leq 7K$. Par ailleurs [U-β] et $B^X(h)=X$ entrainent $T_n \xrightarrow{P} \infty$. Donc $B^{X,n}(h)_{t\wedge T_n} \xrightarrow{P} B^X(h)_t = X_t$ pour tout t. Comme $X \in \mathcal{M}$, il existe un ensemble négligeable N_t tel que si $(\omega,t) \notin D$ et $\omega \notin N_t$ on ait $\Delta X_t(\omega)=0$, alors que $\overline{X}^n_t(\omega)=X_t(\omega)$ pour tout n assez grand si $(\omega,t) \in D$. Par suite $\overline{X}^n_t \to X_t$ p.s., et donc

$$M^n_{t\wedge T_n} \xrightarrow{P} B^X(h)_t - X_t = 0.$$

Comme $|M^n_{t\wedge T_n}| \leq 7K$, cette convergence a lieu aussi dans L^2. Donc

$$E[\tilde{C}^{X,n}(h)_{t\wedge T_n}] = E[(M^n_{t\wedge T_n})^2 - N^n_{t\wedge T_n}] = E[(M^n_{t\wedge T_n})^2] \to 0$$

(utiliser (4-16)). Grâce encore à $T_n \xrightarrow{P} \infty$ on en déduit que $\tilde{C}^{X,n}(h)_t \xrightarrow{P} 0$. Comme $\tilde{C}^{X,n}(h)$ est croissant, on a donc [U-γ] avec $\tilde{C}^X(h)=0$. Il est alors évident qu'on a (4-3) et (4-4) avec $C^X=0$, et $X \in \tilde{\mathscr{I}}_g$ par (4-6). □

(4-21) LEMME: <u>$\tilde{\mathfrak{B}}_{loc}$ est un espace vectoriel et une classe stable; la seule martingale locale appartenant à $\tilde{\mathfrak{B}}_{loc}$ est la martingale nulle.</u>

<u>Preuve</u>. Il est évident sur la définition que $\tilde{\mathfrak{B}}$ est un espace vectoriel, et on a vu que $\tilde{\mathfrak{B}}_{loc}$ est une classe locale. Il en découle faci-

lement que $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ est aussi un espace vectoriel.

Pour la seconde partie, il suffit par localisation de considérer une martingale X appartenant à $\tilde{\mathcal{B}}$. Comme X est une martigale prévisible et que T_i^n est prévisible, on a $\Delta X_{T_i^n}=0$, et par suite $E_i^n(\Delta_i^n X)=0$ également. En comparant à (2-11), on obtient $X=0$. □

(4-22) LEMME: <u>$\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ contient les processus prévisibles à variation finie nuls en</u> 0 <u>et appartenant à</u> $\mathcal{M}$.

<u>Preuve</u>. Soit $X\in\mathcal{M}$ un processus prévisible à variation finie, nul en 0. Comme $X\in\mathcal{M}$ on a $\{\Delta X\neq 0\}\subset D$. Par localisation, on peut supposer que $Var(X)_\infty \leq K < \infty$. Alors (3-4) entraine

$$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq .} E_i^n(\Delta_i^n X) \xrightarrow{P-u} X^c$$

et

$$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq .} E(\Delta X_{T_i^n}|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}) = \int_0^{\cdot} 1_{D^n}(s)dX_s \xrightarrow{P-u} \int_0^{\cdot} 1_D(s)dX_s = X^d$$

(car $\{\Delta X\neq 0\}\subset D$). On a donc (2-11), et $X\in\tilde{\mathcal{B}}$. □

<u>5 - ELIMINATION DES GRANDS SAUTS</u>

<u>§a - La classe</u> $\tilde{\mathcal{A}}_0$.

Nous avons introduit la classe $\mathcal{A}_0$ au §4-a. Notons $\tilde{\mathcal{A}}_0$ la classe des $X\in\mathcal{A}_0\cap\mathcal{M}$ tels que le processus B dans (4-1) appartienne à $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$.

Soit alors $X\in\tilde{\mathcal{A}}_0$ et h' une autre fonction de troncation. On a $X(h)=B+M$ avec $B\in\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ et M martingale locale. De plus

$$\begin{aligned} X(h') &= X(h) + (h'-h)*\mu^X \\ &= B + M + (h'-h)*\nu^X + (h'-h)*(\mu^X-\nu^X). \end{aligned}$$

Donc $X(h')=B'+M'$, avec $B'=B+(h'-h)*\nu^X$ et $M'=M+\tilde{M}$ et $\tilde{M}=(h'-h)*(\mu^X-\nu^X)$.

D'après (4-22), $(h'-h)*\nu^X \in \tilde{\mathcal{B}}_{loc}$, donc $B' \in \tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ d'après (4-21). De plus M' est une martingale locale. On voit donc que la classe $\tilde{\mathcal{J}}_0$ ne dépend pas de la fonction de troncation h.

Si $X \in \tilde{\mathcal{J}}_0$, le processus B de (4-1) est unique en vertu de (4-21), et on le note $F^X(h)$. D'après ce qui précède,

$$(5\text{-}1) \qquad F^X(h') = F^X(h) + (h'-h)*\nu^X.$$

On note G^X le processus $\langle M^c, M^c\rangle$ (où $M = X(h) - F^X(h)$). Avec les notations précédentes on a $M'^c = M^c$, car $\tilde{M}^c = 0$ ($\tilde{M}$ est à variation finie), donc G^X ne dépend pas de la fontion h.

(5-2) PROPOSITION: a) <u>On a</u> $X \in \tilde{\mathcal{J}}_0$ <u>si et seulement si</u> $X(h) \in \tilde{\mathcal{J}}_0$, <u>et alors</u>

$$(5\text{-}3) \qquad G^{X(h)} = G^X,$$

$$(5\text{-}4) \qquad F^{X(h)}(h) = F^X(h) + (h\circ h - h)*\nu^X.$$

b) $\tilde{\mathcal{J}}_0$ <u>est une classe locale et un espace vectoriel</u>.

<u>Preuve</u>. a) Par construction,

$$[X(h)](h) - X(h) = (h\circ h-h)*\nu^X + (h\circ h-h)*(\mu^X-\nu^X),$$

et $(h\circ h-h)*\nu^X \in \tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ par (4-22), et $(h\circ h-h)*(\mu^X-\nu^X)$ est une martingale locale purement discontinue. On déduit alors le résultat de (4-21).

b) Comme $\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ est locale, la première assertion est évidente. On montre que $X+Y \in \tilde{\mathcal{J}}_0$ si $X, Y \in \tilde{\mathcal{J}}_0$ exactement comme en (4-3), en utilisant (4-21), (4-22), et le fait que $G' \in \tilde{\mathcal{B}}_{loc}$. □

(5-5) PROPOSITION: <u>Si</u> X <u>est une semimartingale de</u> M, <u>on a</u> $X \in \tilde{\mathcal{J}}_0$ <u>et</u> $(F^X(h), G^X, \nu^X)$ <u>sont les caractéristiques de</u> X.

<u>Preuve</u>. C'est simplement la caractérisation "de type martingale" des caractéritiques de X, plus (4-22). □

§b - La classe $\tilde{\mathscr{J}}_g$.

(5-6) LEMME: Soit $Z=U1_{[\![T,\infty[\![}$, avec T temps d'arrêt et U v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable, et supposons que $Z\in\mathcal{H}$. Alors $Z\in\tilde{\mathscr{J}}_g$ avec $B^Z(h)=h*\nu^Z$, $C^Z=0$. De plus la suite $\{\mathrm{Var}(B^{Z,n})_\infty\}_{n\geq 1}$ est bornée dans L^1.

Preuve. a) Soit f bornée, avec $|f|\leq a$ et $f(0)=0$. Si $T\neq T_i^n$ on a $\Delta Z_{T_i^n}=0$, donc $\bar{\rho}_i^{Z,n}=\varepsilon_0$. De plus $\Delta_i^n Z=U1_{\{T_{i-1}^n<T\leq T_i^n\}}$. Donc

$$E[\mathrm{Var}(f*\nu^{Z,n})_\infty]\leq E[\textstyle\sum_{i\geq 1}\tilde{\rho}_i^{Z,n}(|f|)]$$

$$\leq E[\textstyle\sum_{i\geq 1,T_i^n=T}\tilde{\rho}_i^{Z,n}(|f|)+\sum_{i\geq 1,T_i^n\neq T}E_i^n(|f(U)|1_{\{T_{i-1}^n<T<T_i^n\}})]$$

(5-7) $$\leq aE[\textstyle\sum_{i\geq 1,T_i^n=T}1+\sum_{i\geq 1}E_i^n(1_{\{T_{i-i}^n<T<T_i^n\}})]\leq a.$$

En particulier, avec $f=h$ on obtient $E[\mathrm{Var}(B^{Z,n})_\infty]\leq a$.

b) Soit $g_\varepsilon\in\mathcal{C}^+$ avec $0\leq g_\varepsilon\leq 1$, $g_\varepsilon(x)=1$ pour $|x|\geq\varepsilon$. Comme Z vérifie [U-δ], on a

(5-8) $$(g_\varepsilon h)*\nu^{Z,n}\xrightarrow{P-u}(g_\varepsilon h)*\nu^Z.$$

De plus $|(1-g_\varepsilon)h|\leq\varepsilon$ pour ε assez petit, donc (5-7) entraine

(5-9) $$E[\sup_s|(1-g_\varepsilon)h*\nu_s^{Z,n}|]\leq\varepsilon,$$

tandis que $|h|*\nu_\infty^Z<\infty$ (car $E(1*\nu_\infty^Z)=E(1*\mu_\infty^Z)=P(T<\infty)$), et donc $g_\varepsilon h*\nu^Z\to h*\nu^Z$ uniformément quand $\varepsilon\downarrow 0$. On déduit alors de (5-8) et (5-9) que

$$B^{Z,n}=h*\nu^{Z,n}\xrightarrow{P-u}h*\nu^Z;$$

en particulier, on a [U-β] avec $B^Z(h)=h*\nu^Z$.

c) Le même raisonnement montre que $h^2*\nu^{Z,n}\xrightarrow{P-u}h^2*\nu^Z$. Soit aussi $V_\varepsilon=\{t:|\Delta B_t^Z|>\varepsilon\}$ (où $B^Z=B^Z(h)$). Pour tout temps d'arrêt borné S tel que $[\![S]\!]\subset V_\varepsilon$ on a $\Delta B_S^{Z,n}\xrightarrow{P}\Delta B^Z$, et [U-β] entraine aussi

$$\sup_{s\leq t}|\Delta B_s^{Z,n}|1_{V_\varepsilon^c}(s)\xrightarrow{P}\sup_{s\leq t}|\Delta B_s^Z|1_{V_\varepsilon^c}(s)\leq\varepsilon$$

$$\sum_{s\leq t, s\notin V_\varepsilon} (\Delta B_s^{Z,n})^2 \quad \leq \quad \{\sup_{s\leq t} |\Delta B_s^{Z,n}|\ 1_{V_\varepsilon^c}(s)\}\ \mathrm{Var}(B^{Z,n})_t .$$

D'après (a) il est alors immédiat que

$$\sum_{s\leq .} (\Delta B_s^{Z,n})^2 \xrightarrow{P-u} \sum_{s\leq .} (\Delta B_s^Z)^2,$$

et donc

$$\tilde{C}^{Z,n} = h^2 * \nu^{Z,n} - \sum_{s\leq .} (\Delta B_s^{Z,n})^2 \xrightarrow{P-u} \tilde{C}^Z := h^2 * \nu^Z - \sum_{s\leq .} (\Delta B_s^Z)^2 .$$

Autrement dit on a [U-γ], et (4-3) et (4-4) sont immédiats et donnent $C^Z=0$, d'où le résultat. □

(5-10) LEMME: Soit $X,Z\in\mathcal{M}$ et $Y=X+Z$ (donc $Y\in\mathcal{M}$). Supposons que $Z = \sum_{p\geq 1} U_p\, 1_{[\![T_p,\infty[\![}$ avec T_p croissant vers $+\infty$. On a alors $X\in\tilde{\mathcal{J}}'_g$ (resp. $\tilde{\mathcal{J}}_g$) si et seulement si $Y\in\tilde{\mathcal{J}}'_g$ (resp. $\tilde{\mathcal{J}}_g$) (voir §4-b pour $\tilde{\mathcal{J}}'_g$).

De plus, dans ce cas, si $\{\Delta X\neq 0\}\cap\{\Delta Z\neq 0\} = \emptyset$ on a $\nu^Y = \nu^X+\nu^Z$, $B^Y(h) = B^X(h)+B^Z(h)$ (resp, et aussi $C^Y=C^X$).

Preuve. a) D'après le résultat de localisation (4-11) il suffit de considérer le cas où $Z=U1_{[\![T,\infty[\![}$ n'a qu'un seul saut.

Soit $Z' = \Delta X_T\, 1_{[\![T,\infty[\![}$, $Z'' = Z+Z' = (U+\Delta X_T)1_{[\![T,\infty[\![}$ et $X'=X-Z'$. On a alors $X=X'+Z'$, $Y=X'+Z''$, $\{\Delta X'\neq 0\}\cap\{\Delta Z'\neq 0\}=\emptyset$, $\{\Delta X'\neq 0\}\cap\{\Delta Z''\neq 0\}=\emptyset$. Il suffit donc de montrer le résultat lorsque $\{\Delta X\neq 0\}\cap\{\Delta Z\neq 0\}=\emptyset$. Quitte à modifier T, cela revient à supposer que $\Delta X_T=0$ sur $\{T<\infty\}$.

Notons que dans ce cas $\mu^Y=\mu^X+\mu^Z$, donc $\nu^Y=\nu^X+\nu^Z$ est vrai.

b) Soit $f\in\mathcal{L}_a$ avec $f(0)=0$, et

$$\text{(5-11)} \qquad \alpha_i^n(f) = \tilde{\rho}_i^{Y,n}(f) - \tilde{\rho}_i^{X,n}(f) - \tilde{\rho}_i^{Z,n}(f).$$

On va montrer un lemme auxiliaire:

(5-12) LEMME: Sous les hypothèses précédentes, on a:

$$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |\alpha_i^n(f)| \xrightarrow{P} 0.$$

<u>Preuve</u>. Etant donnés (3-18) et $\nu^Y = \nu^X + \nu^Z$, on a

(5-13) $$\bar{\rho}_i^{Y,n} = \bar{\rho}_i^{X,n} + \bar{\rho}_i^{Z,n} - \varepsilon_0.$$

Soit $H(n,i) = \{T_{i-1}^n < T < T_i^n\}$ et $U_i^n = U1_{H(n,i)}$. On a $\Delta_i^n Y = \Delta_i^n X + U_i^n$, donc grâce à (2-5) il découle de (5-11) et (5-13):

$$\begin{aligned}
\alpha_i^n(f) &= \bar{\rho}_i^{X,n} * (\rho_i^{Y,n} - \rho_i^{X,n})(f) + \bar{\rho}_i^{Z,n} * (\rho_i^{Y,n} - \rho_i^{Z,n})(f) - \rho_i^{Y,n}(f) \\
&= \int \bar{\rho}_i^{X,n}(dx) E_i^n[f(x+\Delta_i^n X + U_i^n) - f(x+\Delta_i^n X)] - E_i^n[f(\Delta_i^n X + U_i^n)] \\
&\qquad + \int \bar{\rho}_i^{Z,n}(dx) E_i^n[f(x+\Delta_i^n X + U_i^n) - f(x+U_i^n)] \\
&= \int \bar{\rho}_i^{X,n}(dx) E_i^n[\{f(x+\Delta_i^n + U_i^n) - f(x+\Delta_i^n X) - f(\Delta_i^n X + U_i^n)\} 1_{H(n,i)}] \\
&\qquad + \int \bar{\rho}_i^{Z,n}(dx) E_i^n[f(x+\Delta_i^n X + U_i^n) - f(x+U_i^n) - f(\Delta_i^n X) 1_{H(n,i)^c}]
\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{L}_a$ et $f(0)=0$, on a:

$$|f(x+\Delta_i^n X + U_i^n) - f(x+\Delta_i^n X) - f(\Delta_i^n X + U_i^n)| \leq 3a(1 \wedge |x| + 1 \wedge |\Delta_i^n X|),$$

$$|f(x+\Delta_i^n X + U_i^n) - f(x+U_i^n) - f(\Delta_i^n X) 1_{H(n,i)^c}| \leq \begin{cases} 2a(1 \wedge |\Delta_i^n X|) & \text{sur } H(n,i) \\ 3a(1 \wedge |x| \wedge |\Delta_i^n X|) & \text{sur } H(n,i)^c \end{cases}$$

Par ailleurs $\Delta X_T = 0$ sur $\{T < \infty\}$ par hypothèse, donc sur cet ensemble on a $\Delta_i^n X = X_{(T_i^n)-} - X_T + X_{T-} - X_{T_{i-1}^n}$. En comparant à (3-5), ce qui précède entraine alors

(5-14) $$\begin{aligned} |\alpha_i^n(f)| \leq\ & 10a\ E_i^n(\gamma_{i,T}^{X,n}) + 3a\ \bar{\rho}_i^{X,n}(|x| \wedge 1) \\ & + 3a\ \mathrm{Max}(\bar{\rho}_i^{Z,n}(|x| \wedge 1),\ \rho_i^{X,n}(|x| \wedge 1)). \end{aligned}$$

Remarquons que si $Z' = 1_{[\![T,\infty[\![}$, on a $Z' \in \mathcal{M}$ et $\rho_i^{Z',n}(|x| \wedge 1) = \rho_i^{Z',n}(\{1\}) = E_i^n(1_{H(n,i)})$, donc d'après (3-12-b):

(5-15) $$\sup_{i \geq 1, T_i^n \leq t} E_i^n(1_{H(n,i)}) \xrightarrow{P} 0.$$

Ensuite, on a

$$E_i^n[\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} E_i^n(1_{H(n,i)})] \;\leq\; \sum_{i\geq 1} E[1_{\{T_{i-1}^n\leq t\}} E_i^n(1_{H(n,i)})]$$

$$(5\text{-}16) \qquad = \sum_{i\geq 1} P(T_{i-1}^n<T<T_i^n) \;\leq\; 1.$$

De plus, si $p(t,\varepsilon)$ est le nombre (aléatoire fini) de points $s\leq t$ tels que $\nu^X(\{s\}\times(|x|\wedge 1)) \geq \varepsilon$ (où $\varepsilon>0$), (3-18) montre que $T_i^n\leq t$ et $\bar{\rho}_i^{X,n}(|x|\wedge 1)\geq\varepsilon$ pour au plus $p(t,\varepsilon)$ valeurs de i. Donc

$$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \bar{\rho}_i^{X,n}(|x|\wedge 1)\, E_i^n(1_{H(n,i)}) \;\leq\; \varepsilon \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} E_i^n(1_{H(n,i)})$$
$$+\; p(t,\varepsilon)\, \sup_{i\geq 1, T_i^n\leq t} E_i^n(1_{H(n,i)}),$$

et comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on déduit de (5-15) et (5-16) que

$$(5\text{-}17) \qquad \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \bar{\rho}_i^{X,n}(|x|\wedge 1)\, E_i^n(1_{H(n,i)}) \xrightarrow{P} 0.$$

D'autre part le processus croissant $A=(|x|\wedge 1)*\nu^{Z,d}$ est à valeurs finies, car Z est à variation finie. Si $A^\varepsilon = \sum_{s\leq .} \Delta A_s\, 1_{\{\Delta A_s<\varepsilon\}}$, (3-18) entraine que

$$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \mathrm{Max}(\bar{\rho}_i^{Z,n}(|x|\wedge 1), \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1))$$
$$\leq\; A_t^\varepsilon + \frac{A_t}{\varepsilon}\, (\sup_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1)).$$

D'après (3-12-b) et le fait que $A_t^\varepsilon\downarrow 0$ quand $\varepsilon\downarrow 0$, on obtient donc:

$$(5\text{-}18) \qquad \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \mathrm{Max}(\bar{\rho}_i^{Z,n}(|x|\wedge 1), \rho_i^{X,n}(|x|\wedge 1)) \xrightarrow{P} 0.$$

Etant donné (5-14), le résultat découle alors de (3-6), (5-17) et (5-18). □

Fin de la preuve de (5-10). c) On peut supposer que $h\in\mathcal{L}_1$. Par (3-2),

$$(5\text{-}19) \qquad B^{Y,n}(h) - B^{X,n}(h) - B^{Z,n}(h) \;=\; \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq .} \alpha_i^n(h).$$

Donc X vérifie [U-β] si et seulement si Y vérifie [U-β], d'après le lemme précédent, et alors $B^Y(h) = B^X(h)+B^Z(h)$.

d) D'après (5-19) et (3-2),

$$\tilde{C}^{Y,n}(h)_t - \tilde{C}^{X,n}(h)_t - \tilde{C}^{Z,n}(h)_t + 2\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \Delta B^{X,n}(h)_{T_i^n}\,\Delta B^{Z,n}(h)_{T_i^n}$$

$$= \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} [\alpha_i^n(h^2) - \alpha_i^n(h)^2 - 2\alpha_i^n(h)(\Delta B^{X,n}(h)_{T_i^n} + \Delta B^{Z,n}(h)_{T_i^n})].$$

Comme $h\in\mathcal{L}_1$ et donc $h^2\in\mathcal{L}_2$ et $|\Delta B^{X,n}(h)|\leq 1$, $|\Delta B^{Z,n}(h)|\leq 1$, (5-12) implique (en négligeant de mentionner h!):

$$\text{(5-20)}\qquad \sup_{s\leq t} |\tilde{C}_s^{Y,n} - \tilde{C}_s^{X,n} - \tilde{C}_s^{Z,n} + 2\sum_{r\leq s} \Delta B_r^{X,n}\,\Delta B_r^{Z,n}| \xrightarrow{P} 0.$$

Supposons que X et Y vérifient [U-β]. On sait par (5-6) que Z vérifie [U-β] et [U-γ] et que $\{\mathrm{Var}(B^{Z,n})_\infty\}_{n\geq 1}$ est borné dans L^1. Donc la même démonstration qu'à la fin de celle de (5-6) (avec $V_\varepsilon=\{t:\ |\Delta B_t^X|>\varepsilon\}$) montre que

$$\text{(5-21)}\qquad \sum_{r\leq .} \Delta B_r^{X,n}\,\Delta B_r^{Z,n} \xrightarrow{P-u} \sum_{r\leq .} \Delta B_r^X\,\Delta B_r^Z = \int_0^{.} \Delta B_s^X\, dB_s^Z.$$

Comme $\tilde{C}^{Z,n} \xrightarrow{P-u} \tilde{C}^Z$, (5-20) et (5-21) montrent que X vérifie [U-γ] si et seulement si Y vérifie [U-γ], et alors

$$\text{(5-22)}\qquad \tilde{C}^Y = \tilde{C}^X + \tilde{C}^Z - 2\int_0^{.} \Delta B_s^X\, dB_s^Z.$$

Enfin un calcul élémentaire, basé sur le fait que $\nu^Y=\nu^X+\nu^Z$, montre que ν^X et $B^X(h)$ vérifient (4-3) et (4-4) si et seulement si ν^Y et $B^Y(h)$ vérifient (4-3) et (4-4), et dans ce cas (5-22) entraine que $C^Y=C^X+C^Z=C^X$ (car $C^Z=0$ par (5-6)).

Grâce à (4-6), le résultat découle alors de (c) et (d). □

(5-23) COROLLAIRE: <u>Soit</u> $X\in\mathcal{X}$. <u>On a</u> $X\in\tilde{\mathcal{J}}'_g$ <u>(resp.</u> $\tilde{\mathcal{J}}_g$) <u>si et seulement si</u> $X(h)\in\tilde{\mathcal{J}}'_g$ <u>(resp.</u> $\tilde{\mathcal{J}}_g$), <u>et alors</u>

$$\text{(5-24)}\qquad B^{X(h)}(h) = B^X(h) + (h\circ h-h)*\nu^X$$

<u>(resp. et de plus</u>

$$(5\text{-}25) \qquad C^{X(h)} = C^{X} \quad).$$

Preuve. Soit $a>0$ tel que $h(x)=x$ pour $|x|\leq a$. Soit $T_0=0,\ldots,$ $T_{p+1} = \inf(t>T_p : |\Delta X_t|>a)$. On a $\lim_p\uparrow T_p = \infty$. Soit aussi

$$U = \sum_{p\geq 1} \Delta X_{T_p} 1_{[\![T_p,\infty[\![},$$

$$V = \sum_{p\geq 1} h(\Delta X_{T_p})1_{[\![T_p,\infty[\![} = \sum_{p\geq 1} \Delta X(h)_{T_p} 1_{[\![T_p,\infty[\![},$$

et $Y=X-U$. On a alors $X=Y+U$ et $X(h)=Y+V$, et $\{\Delta Y\neq 0\}\cap\{\Delta U\neq 0\} = \emptyset$, et $\{\Delta Y\neq 0\}\cap\{\Delta V\neq 0\} = \emptyset$. Enfin $Y,U,V\in\mathcal{M}$. L'équivalence cherchée découle alors de (5-10), ainsi que (5-25) dans le cas où $X\in\tilde{\mathcal{J}}_g$. De plus

$$B^{X(h)}(h) = B^{Y}(h) + B^{V}(h) = B^{X}(h) + B^{V}(h) - B^{U}(h).$$

Enfin (5-6) implique $B^V(h)=h*\nu^V$, $B^U(h)=h*\nu^U$. Mais un calcul simple montre que $h*\mu^V-h*\mu^U = (h\circ h-h)*\mu^X$, et par suite on a (5-24). □

6 - DEMONSTRATION DES THEOREMES

Notre premier objectif est de montrer que les trois classes $\tilde{\mathcal{J}}_g$, $\tilde{\mathcal{J}}'_g$ et $\tilde{\mathcal{J}}_0$ coïncident. Commençons par étudier les processus bornés.

(6-1) LEMME: Soit $X\in\tilde{\mathcal{J}}'_g$ avec $|X|\leq K$, et h une fonction de troncation continue telle que $h(x)=x$ pour $|x|\leq 4K$. Alors $X\in\tilde{\mathcal{J}}_0$ et $F^X(h)=B^X(h)$.

Preuve. La preuve ressemble à celle de (4-20). En vertu de (4-11) et (5-2) on peut localiser, et donc supposer que $|B^X(h)|\leq K'$ pour une constante K'.

Soit $T_n = \inf(t: |B^{X,n}(h)_t|\geq 2K')$ et $a=\sup|h|$. Alors $|B^{X,n}(h)_{t\wedge T_n}| \leq 2K'+a$ et avec les notations (4-15) la $\mathbb{F}^n$-martingale $(M^n_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ est bornée par une constante b, uniformément en ω,n,t (remarquer que T_n est un $\mathbb{F}^n$-temps d'arrêt).

On déduit de $B^{X,n}(h) \xrightarrow{P-u} B^X(h)$ que $T_n \xrightarrow{P} \infty$, donc $B^{X,n}(h)_{t\wedge T_n} \xrightarrow{P} B^X(h)_t$ pour tout t. Exactement comme dans la preuve de (4-20), on a $\bar{X}^n_t \to X_t$ p.s., et à cause de la bornitude on déduit:

(6-2) $$M^n_{t\wedge T_n} \xrightarrow{L^1} M_t \;:=\; X_t - B^X(h)_t .$$

Soit alors s<t et $H\in\bar{\mathcal{F}}^{n_0}_s$ pour un $n_0\in\mathbb{N}^*$, donc aussi $H\in\bar{\mathcal{F}}^n_s$ pour tout $n\geq n_0$. D'après (4-16) et (6-2) il vient

$$E[1_H(M_t - M_s)] \;=\; \lim_n E[1_H(M^n_{t\wedge T_n} - M^n_{s\wedge T_n})] \;=\; 0.$$

Donc $E[1_H(M_t-M_s)] = 0$ pour tout $H\in\bigvee_n\bar{\mathcal{F}}^n_s$. Mais $\mathcal{F}_{s-} \subset \bigvee_n\bar{\mathcal{F}}^n_s \subset \mathcal{F}_s$, donc par un argument classique M est une $\mathbb{F}$-martingale.

Comme X=X(h), il reste à prouver que $B:=B^X(h)$ appartient à $\tilde{\mathcal{B}}$. D'abord, si T est un temps prévisible fini tel que $[\![T]\!]\cap D = \emptyset$, on a $\Delta X_T=0$ p.s. (car $X\in\mathcal{K}$), donc $\Delta M_T=-\Delta B_T$ p.s. et comme B est prévisible et M est une martingale ce n'est possible que si $\Delta B_T=0$ p.s.: donc $B\in\mathcal{K}$. De plus, d'après la prévisibilité de T^n_i et $|X|\leq K$,

$$\tilde{\rho}^{X,n}_i(h) \;=\; E^n_i(\Delta^n_i X) + E(\Delta X_{T^n_i}|\mathcal{F}_{(T^n_i)-}) \;=\; E^n_i(\Delta^n_i B) + \Delta B_{T^n_i}.$$

Donc [U-β] pour X entraine que B vérifie (2-11), d'où le résultat.□

(6-3) LEMME: <u>Sous les hypothèses de (6-1), si de plus $X\in\tilde{\mathcal{J}}_g$, on a $C^X=G^X$.</u>

<u>Preuve</u>. On reprend la démonstration précédente: on peut supposer de plus que $\tilde{C}^X(h)\leq K'$; on prend $T_n=\inf(t: |B^{X,n}(h)_t|\geq 2K'$ ou $\tilde{C}^{X,n}(h)_t\geq 2K')$, donc $\tilde{C}^{X,n}(h)_{t\wedge T_n}\leq 2K'+a^2$. Donc les martingales $(N^n_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ sont aussi uniformément bornées. [U-β] et [U-γ] entrainent $T_n \xrightarrow{P} \infty$, donc on a aussi $\tilde{C}^{X,n}(h)_{t\wedge T_n} \xrightarrow{P} \tilde{C}^X(h)_t$, et on a donc en plus de (6-2):

(6-4) $$N^n_{t\wedge T_n} \xrightarrow{L^1} N_t \;:=\; (M_t)^2 - \tilde{C}^X(h)_t .$$

On montre alors comme ci-dessus que N est une martingale, ce qui entraine $\tilde{C}^X(h)=\langle M,M\rangle$; donc d'après (4-6), $\tilde{C}^X(h)=C^X+A$ où A est donné par (4-4), avec $B=B^X(h)=F^X(h)$. Par ailleurs (4-2) entraine aussi $\langle M,M\rangle=\langle M^c,M^c\rangle+A$, donc $G^X=\langle M^c,M^c\rangle=C^X$. □

(6-5) LEMME: <u>Si</u> $X\in\tilde{\mathcal{X}}_0$ <u>vérifie</u> $|X|\le K$, <u>on a</u> $X\in\tilde{\mathcal{X}}_g$.

<u>Preuve</u>. a) Soit h telle que $h(x)=x$ pour $|x|\le 4K$. On a $X(h)=X=F+M$, avec $F\in\tilde{\mathcal{B}}_{loc}$ et M martingale locale. Quitte à localiser (cf. (4-11) et (5-2)), on peut supposer que $F\in\tilde{\mathcal{B}}$ et que $\tilde{G}:=\langle M,M\rangle$ est borné. En particulier, M est une martingale. Donc, d'après (4-18) et comme les T_i^n sont prévisibles, on a (en omettant de mentionner h)

$$\begin{aligned} B_t^{X,n} &= \sum_{i\ge 1,T_i^n\le t} [E(\Delta X_{T_i^n}|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}) + E_i^n(\Delta_i^n X)] \\ &= \sum_{i\ge 1,T_i^n\le t} [\Delta F_{T_i^n} + E_i^n(\Delta_i^n F)]. \end{aligned}$$

(2-11) appliqué à F montre alors que X vérifie [U-β] avec $B^X=F$.

b) Appliquons encore (4-18):

$$\begin{aligned} (6\text{-}6)\quad \tilde{\rho}_i^{X,n}(h^2) - \tilde{\rho}_i^{X,n}(h)^2 &= \bar{\rho}_i^{X,n}(h^2) + \rho_i^{X,n}(h^2) + 2\,\bar{\rho}_i^{X,n}(h)\,\rho_i^{X,n}(h) \\ &\quad - \bar{\rho}_i^{X,n}(h)^2 - \rho_i^{X,n}(h)^2 - 2\,\bar{\rho}_i^{X,n}(h)\,\rho_i^{X,n}(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6\text{-}7)\quad \bar{\rho}_i^{X,n}(h^2) - \bar{\rho}_i^{X,n}(h)^2 &= E[\{\Delta F_{T_i^n} + \Delta M_{T_i^n}\}^2|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}] - (\Delta F_{T_i^n})^2 \\ &= E[(\Delta M_{T_i^n})^2|\mathcal{F}_{(T_i^n)-}) = \Delta\tilde{G}_{T_i^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6\text{-}8)\quad \rho_i^{X,n}(h^2) - \rho_i^{X,n}(h)^2 &= E_i^n[(\Delta_i^n F + \Delta_i^n M)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2 \\ &= E_i^n[(\Delta_i^n M)^2] + 2\,E_i^n(\Delta_i^n F\,\Delta_i^n M) + E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2 \\ &= E_i^n(\Delta_i^n\tilde{G}) + 2\,E_i^n(\Delta_i^n F\,\Delta_i^n M) + E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2. \end{aligned}$$

Soit $K'=\sup|F|$ et h' une fonction de troncation telle que $h'(x)=x$ si $|x|\le 4K'$. Comme F est prévisible, $\bar{\rho}_i^{F,n} = \varepsilon_{\Delta F_{T_i^n}}$, donc (4-18) entraine

$$\tilde{\rho}_i^{F,n}(h'^2) - \tilde{\rho}_i^{F,n}(h')^2 = \rho_i^{F,n}(h'^2) - \rho_i^{F,n}(h')^2$$

$$= E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2.$$

Par ailleurs d'après (4-20) $\tilde{C}^{F,n} \xrightarrow{P-u} 0$, donc

(6-9) $$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} \{E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2\} \xrightarrow{P} 0.$$

En second lieu, $\tilde{G}\in\tilde{\mathcal{B}}$ par (4-22) et la bornitude de $\tilde{G}$. Donc

(6-10) $$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} [\Delta\tilde{G}_{T_i^n} + E_i^n(\Delta_i^n\tilde{G})] \xrightarrow{P} \tilde{G}.$$

Enfin, en utilisant encore $E_i^n(\Delta_i^n M)=0$ et Hölder:

$$\begin{aligned} |E_i^n(\Delta_i^n F\ \Delta_i^n M)| &= |E_i^n[\{\Delta_i^n F - E_i^n(\Delta_i^n F)\}\ \Delta_i^n M]| \\ &\leq \{E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2\}^{1/2}\ \{E_i^n[(\Delta_i^n M)^2]\}^{1/2} \\ &= \{E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2\}^{1/2}\ \{E_i^n(\Delta_i^n\tilde{G})\}^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |E_i^n(\Delta_i^n F\ \Delta_i^n M)| \\ &\quad \leq \{\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |E_i^n[(\Delta_i^n F)^2] - E_i^n(\Delta_i^n F)^2\}^{1/2}\ \{\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} E_i^n(\Delta_i^n\tilde{G})\}^{1/2}. \end{aligned}$$

On déduit alors de (6-9) et (6-10) que

(6-11) $$\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} |E_i^n(\Delta_i^n F\ \Delta_i^n M)| \xrightarrow{P} 0.$$

D'après (3-2), et (6-6), (6-7), (6-8), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t^{X,n} = &\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} [\Delta\tilde{G}_{T_i^n} + E_i^n(\Delta_i^n\tilde{G})] + 2\sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} E_i^n(\Delta_i^n F\ \Delta_i^n M) \\ &+ \sum_{i\geq 1, T_i^n\leq t} [E_i^n((\Delta_i^n F)^2) - E_i^n(\Delta_i^n F)^2]. \end{aligned}$$

Donc (6-9), (6-10) et (6-11) entrainent $\tilde{C}^{X,n} \xrightarrow{P-u} \tilde{G}$. Autrement dit, X vérifie [U-γ] avec $\tilde{C}^X(h)=\tilde{G}$. Il suffit alors d'appliquer (4-2) et (4-6) pour obtenir que $X\in\tilde{\mathcal{J}}_g$. □

(6-12) COROLLAIRE: <u>On a</u> $\tilde{\mathcal{J}}_g = \tilde{\mathcal{J}}'_g = \tilde{\mathcal{J}}_0$, <u>et si</u> X <u>appartient à ces ensem-</u>

bles on a $B^X(h)=F^X(h)$ et $C^X=G^X$.

Preuve. Il suffit d'appliquer les deux lemmes précédents, et (5-2) et (5-23). □

Preuve de (2-13). Etant donné (6-12), les premières assertions proviennent de (5-2-b), et la fin de (5-5). □

Preuve de (2-14). C'est (4-21) et (4-22). □

Preuve de (2-15). Etant donné (6-12), cela provient des définitions de $F^X(h)$ et de G^X, ainsi que de (3-3). □

Preuve de (2-19). La partie (b) provient de $\tilde{\mathcal{J}}'_g = \tilde{\mathcal{J}}_g$. La condition nécessaire et la dernière assertion de (a) proviennent de $\tilde{\mathcal{J}}_g = \tilde{\mathcal{J}}_0$. La condition suffisante de (a) provient de (2-13). □

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER: Probabilités et potentiel I (1976), II (1982), Hermann: Paris.

[2] J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, Springer Verlag (1979).

[3] J. JACOD: Processus à accroissements indépendants: une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi. Z. für Wahr. 63 (1983), 109-136.

[4] J. JACOD: Une généralisation des semimartingales: les processus admettant un processus à accroissements indépendants tangent. Sém. Proba. XVIII, Lect. Notes in Math. 1059, 91-118, Springer Verlag (1984).

[5] S. KWAPIEN, W.A. WOYCZYNSKI: Semimartingale integrals via decoupling inequalities and tangent processes. Preprint (1986).

[6] L. SLOMINSKI: Approximation of predictable characteristics of processes with filtrations. Dans ce volume.