SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHENG-DE LIN

L'approximation u.c.p. et la continuité de certaines intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 434-446
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__434_0>

L'APPROXIMATION UCP ET LA CONTINUITE DE CERTAINES INTEGRALES STOCHASTIQUES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

LIN Cheng de

Department of Computer Science
Xiamen University, XIAMEN (AMOY)
FUJIAN, CHINA

Pour certaines intégrales stochastiques, dépendant d'un paramètre dans R^d, du type (d'Itô ou de Stratonovich) :

$$Z_t(\omega,x) = \int_0^t H_s(\omega,x)dX_s(\omega,x)$$

se pose les problèmes d'approximation UCP (i.e. uniformément sur tout compact de $R_+ \times R^d$ en probabilité sur Ω) et de continuité de $Z_t(\omega,x)$ en $(t,x) \in R_+ \times R^d$.

L'étude des intégrales stochastiques sans paramètre nous montre qu'il existe des suites de familles d'intégrales de Riemann dépendant de $\omega \in \Omega$, qui convergent en t sur tout compact de R_+ vers $Z(t,\omega)$ en probabilité. Dans cet article, la même idée nous aidera à traiter des intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre.

Pour commencer, on fixe, une fois pour toute, $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ comme espace probabilisé, filtré, vérifiant les conditions habituelles. Désormais, tous les processus, sauf pour les cas spécialement indiqués, sont considérés sur cet espace.

Définition 1 : On appelle subdivision aléatoire toute suite finie ou infinie $\sigma = \{T_0 = 0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k \leq \dots\}$ de temps d'arrêt. Et on dit qu'une suite $\sigma_n = \{T_0^n \leq T_1^n \leq \dots\}$ de subdivisions aléatoires tend vers l'identité, si

- $R_n = \sup\limits_k T_k^n$ converge p.s. vers l'infini ;
- $|\sigma_n| = \sup\limits_k (T_{k+1}^n - T_k^n)$ converge p.s. vers 0.

Définition 2 : Soient (E,m) et (E',m') deux espaces métriques localement compacts dénombrables à l'infini, $\{f^n\}$ une famille de fonctions définies sur $\Omega \times R_+ \times E$, à valeurs dans E', mesurables en $\omega \in \Omega$ pour tout $(t,x) \in R_+ \times E$ fixé, et continues en $(t,x) \in R_+ \times E$, pour tout $\omega \in \Omega$ fixé. On dit que f^n converge UCP vers la fonction f mesurable sur $\Omega \times R_+ \times E$, à valeurs dans E', si, pour tout compact K de $R_+ \times E$, on a $\sup_{(t,x)\in K} m'(f^n(\omega,t,x),f(\omega,t,x))$ tend vers 0 en probabilité.

Par la suite, on travaille avec $E = R^d$ muni de la norme

$$|x| = \max_{1\leq i\leq d} |x_i| \quad \text{et} \quad E' = R.$$

Lemme 1 : Soient $X(s,x)$, $X^n(s,x)$, $n = 1,2,\ldots$, une suite de fonctions mesurables sur $\Omega \times R_+ \times R^d$, continues en (s,x) pour tout ω fixé. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $X^n(s,x)$ converge UCP vers $X(s,x)$;

b) Il existe une suite $(a_m)_{m\geq 1}$ de constantes positives tendant vers l'infini, et pour tout $x \in R^d$ fixé, une suite croissante $(T_i^x)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires positives telles que :

i) $\forall m$, $\inf_{|x|\leq a_m} T_i^x$ tende vers l'infini en probabilité quand i tend vers l'infini ;

ii) $\forall m$, $\forall i$, $\sup_{|x|\leq a_m} [\sup_{s\in[0,T_i^x]} |X^n(s,x) - X(s,x)|]$ tende vers 0 en probabilité quand n tend vers l'infini.

Démonstration : a) $\to$ b) est évident. On va montrer b) $\to$ a).

Pour tout compact de forme $K = [0,b] \times \{|x| \leq a\}$, tout n, tout $x \in R^d$ et toute famille $T = (T^x)_{x\in R^d}$ de v.a. positives, définissons $D_n(x,T)(\omega) = \sup_{s\in[0,T^x(\omega)]} |X^n(s,x,\omega)-X(s,x,\omega)|$,

$$H_n(a,T)(\omega) = \sup_{|x|\leq a} D_n(x,T)(\omega).$$

Notre but final est de montrer $H_n(a,b) \xrightarrow{P} 0$ quand n tend vers l'infini. Puisque, pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, on peut trouver une suite $(x_j(\omega))_j$, qui dépend de ω, dans $\{|x| \leq a\}$ telle que $\lim_j D_n(x_j(\omega),T) = H_n(a,T)(\omega)$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $j_o(\omega)$, donc $x_{j_o}(\omega) = x_{j_o(\omega)}(\omega)$ telle que $H_n(a,T)(\omega)-D_n(x_{j_o}(\omega),T)(\omega) < \varepsilon/2$. Maintenant, on a dans Ω

$$\{H_n(a,b) \geq \varepsilon\} \subset \{D_n(x_{j_o}(\omega),b) \leq \varepsilon/2\} =$$

$$= \{D_n(x_{j_o}(\omega),b) \geq \varepsilon/2\} \cap (\{T_i^{X_{j_o}(\omega)}(\omega) \leq b\} \cup \{T_i^{X_{j_o}(\omega)}(\omega) > b\}) \subset$$

$$\subset \{T_i^{X_{j_o}(\omega)}(\omega) \leq b\} \cup \{D_n(x_{j_o}(\omega),T_i) \geq \varepsilon/2\} \subset$$

$$\subset \{\inf_{|x| \leq a} T_i^X(\omega) \leq b\} \cup \{H_n(a,T_i) \geq \varepsilon/2\}$$

Pour a choisie dans $\{a_m\}_{m \geq 1}$, par b) i) et ii), on sait que

$$P\{\omega : \inf_{|x| \leq a} T_i^X(\omega) \leq b\} \longrightarrow 0, \quad (i \longrightarrow \infty);$$

$$P\{\omega : H_n(a,T_i) \geq \varepsilon/2\} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty);$$

donc, si l'on choisit d'abord i assez petit, et ensuite, pour ce i fixé, on fait tendre n vers l'infini, on a bien

$$P\{\omega : H_n(a,b) > \varepsilon\} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty).$$

On introduit le lemme suivant, qui est une variante du lemme de Kolmogorov, et qui va nous servir comme condition suffisante pour l'approximation UCP sur $\Omega \times R_+ \times R$.

<u>Lemme 2</u> : Soient $G(n,t,x)$, $n = 1,2,\ldots$, une suite de champs aléatoires (i.e. pour tout $(t,x) \in R_+ \times R^d$ fixé, $G(n,t,x)$ est une v.a. sur Ω), continus en (t,x), et $G(t,x)$ un champ aléatoire, tels que :

i) $G(n,0,0) = G(0,0)$,

ii) pour chaque (t,x) fixé, les $G(n,t,x)$ convergent en probabilité vers $G(t,x)$,

iii) pour un certain $p > d+1$, et tout compact K fixé de $R_+ \times R^d$, il existe une constante $C_{p,K}$ telle que

$$E\{|G(n,t,x)-G(n,s,y)|^{2p}\} \leq C_{p,K}(|t-s|^p+|x-y|^p)$$

quels que soient $(t,x),(s,y)$ appartenant à K et $n \in N$.

Alors il existe une version (unique à indistinguabilité près) continue en (t,x) de $G(t,x)$, et $G(n,t,x)$ converge UCP vers $G(t,x)$.

Pour continuer, rappelons que toute semimartingale X continue a une décomposition canonique $X = X^c + \bar{X}$, où X^c est sa partie martingale locale et $\bar{X}$ est sa partie à variation finie, et que X^c et $\bar{X}$ sont toutes les deux continues. Pour une semimartingale avec un paramètre $x \in R^d$, on notera indifféremment $X(.,x)$ et $X.(x)$ les trajectoires qui dépendent de x.

Nous faisons quelques conventions d'écriture pour simplifier la dactylographie et donc la lecture :

$\underline{s}_n$ = la partie entière de $2^n s$, (notée habituellement $[2^n s]$) ;

$1^n_k(s) = 1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}(s)$, (continue à droite) ;

${}^n1_k(s) = 1_{]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(s)$, (continue à gauche) ;

$X(n|k,x) = X(k2^{-n},x)$, où k est entier ;

$X^n(s,x) = \sum_k 1^n_k(s)X(n|k,x)$;

$\delta X^n(s,x) = \sum_k 1^n_k(s)[X(n|k+1,x) - X(n|k,x)]2^n$;

s'il n'y a pas de confusion.

Lemme 3 : Soient $X(s,x),Y(s,x)$ deux champs aléatoires sur $R_+ \times R^d$ tels que

i) pour tout $x \in R^d$ fixé, $X = X^c(.,x) + \bar{X}(.,x)$ est une semimartingale continue avec $d\langle X.(x)\rangle_t+|d\bar{X}_t(x)| \leq dt$, où $\langle X.(x)\rangle_t$ est l'abréviation de $\langle X.(x),X.(x)\rangle_t$; $\frac{\partial}{\partial x} X(s,x)$ existe et, pour tout i et x fixé,

$\frac{\partial}{\partial X_i} X(s,x) = (\frac{\partial}{\partial X_i} X(s,x))^c + \overline{\frac{\partial}{\partial X_i}} X(s,x)$ est une semimartingale continue avec $E[|\langle\frac{\partial}{\partial X_i} X(.,x)\rangle_s|^p]$ et $E[|\int_0^s |d_u \overline{\frac{\partial}{\partial X_i}} X(u,x)|^{2p}]$ uniformément bornés en (s,x) dans tout compact K de $R_+ \times R^d$ pour certain $P > d+1$.

ii) $Y(s,x)$ est borné en (ω,s,x) ; pour tout $x \in R^d$ fixé, $Y(.,x)$ est un processus adapté ; $\frac{\partial}{\partial X} Y(s,x)$ existe, et est borné en (ω,s,x).

Posons $I(n,t,x) = \int_0^t Y^n(s,x)\ \delta X^n(s,x)ds$. Alors, pour tout compact K de $R_+ \times R^d$, on a

$$E[|I(n,t,x) - I(n,s,y)|^{2p}] \leq C_{p,K}(|t-s|^p + |x-y|^p)$$

pour tout $(t,x),(s,y) \in K$, où $C_{p,K}$ ne dépend pas de n.

Note : Pour éviter de surcharger les énoncés et les preuves, on utilise une constante universelle, notée C, ou C_p quand il est nécessaire d'indiquer que C dépend de p.

Démonstration : D'abord $E[|I(n,t,x) - I(n,s,y)|^{2p}] \leq$

$$\leq \{E[|I(n,t,x)-I(n,s,y)|^{2p}]+E[|I(n,s,x)-I(n,s,y)|^{2p}]\}2^{2p-1} .$$

Pour $s < t$ fixés, avec les conventions faites (voir page précédente), définissons :

si $\underline{s}_n<\underline{t}_n$, $H_u^n(x) = \sum_{\underline{s}_n<k<\underline{t}_n} Y(n|k,x)^n1_k(u)+2^nY(n|\underline{t}_n,x)^n1_{\underline{s}_n}(u)*$

$$*(t-\underline{t}_n2^{-n})+2^nY(n|\underline{s}_n,x)((\underline{s}_n+1)2^{-n}-s)\ ^n1_{\underline{s}_n}(u) ;$$

si $\underline{s}_n = \underline{t}_n$, $H_u^n(x) = 2^nY(n|\underline{s}_n,x)(t-s)\ ^n1_{\underline{s}_n}(u)$.

Alors, on a $I(n,t,x)-I(n,s,x) = \int_0^b H_u^n(x)dX_u(x)$, où $b = (\underline{t}_n+1)2^{-n}$. Notons $I_1 = I(n,t,x)-I(n,s,x)$.

Définissons ensuite,

$$\hat{H}_u^n = \sum_{k<\underline{s}_n} [Y(n|k,x)-Y(n|k,y)]\ ^n1_k(u) +$$

$$+ 2^n(s-\underline{s}_n2^{-n})\ [Y(n|\underline{s}_n,x) - Y(n|\underline{s}_n,y)]^n1_{\underline{s}_n}(u).$$

Alors, on a $|I(n,s,x) - I(n,s,y)| =$

$$= |\int_0^s [Y^n(u,x)\delta X^n(u,x)-Y^n(u,y)\delta X^n(u,y)]du| = B$$

$$B = |\int_0^s [Y^n(u,x)-Y^n(u,y)]\ \delta X^n(u,x)du +$$

$$+ \int_0^s Y^n(u,y)\ [\delta X^n(u,x)- \delta X^n(u,y)]du| .$$

Posons $I_2 = \int_0^s [Y^n(u,x)-Y^n(u,y)]\delta X^n(u,y)du$

$$= \int_0^a \hat{H}_u^n\ dX_u(x) \qquad \text{où} \quad a = (\underline{s}_n + 1)2^{-n} ,$$

$$I_3 = \int_0^s Y^n(u,x)\ [\delta X^n(u,x)- \delta X^n(u,y)]du,$$

et $g_i = (y_1,\ldots,y_{i-1}, h_i,x_{i+1},\ldots,x_d)$ $i=1,\ldots,d$,

on a d'abord

$$|Y(n|k,x)-Y(n|k,y)| \leq |\sum_{i\leq d}\int_{y_i}^{x_i}\frac{\partial}{\partial h_i}Y(n|k,g_i)dh_i| \leq C|x-y|$$

(par hypothèse $\frac{\partial}{\partial X}Y(t,x)$ est borné), d'où $|\hat{H}_u^n| \leq C|x-y|$.

Ensuite, $I_3 = \int_o^s 2^n \sum_k Y(n|k,y)\{[X(n|k+1,x)-X(n|k+1,y)]-$

$$-[X(n|k,x)-X(n|k,y)]\} \quad 1_k^n(u)du =$$

$$= \sum_{k<s_n} Y(n|k,y)\ \{\sum_{i\leq d}\int_{y_i}^{x_i}[\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|\underline{s}_n+1,g_i)-\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|\underline{s}_n,g_i)]dh_i\}+$$

$$+(2^n s-[2^n s])Y(n|\underline{s}_n,y)\{\sum_{i\leq d}\int_{y_i}^{x_i}[\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|\underline{s}_n+1,g_i)-\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|\underline{s}_n,g_i)]dh_i\}$$

$$= \sum_{i\leq d}\int_{y_i}^{x_i}\{\sum_{k\leq s} Y(n|k,y)[\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|k+1,g_i)-\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|k,g_i)\ +$$

$$+(2^n s-[2^n s])Y(n|\underline{s}_n,y)[\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|\underline{s}_n+1,g_i)-\frac{\partial}{\partial h_i}X(n|\underline{s}_n,g_i)]\}dh_i \quad =$$

$$= \sum_{i\leq d}\int_{y_i}^{x_i}[\int_o^a Z(u,y)d_u(\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i))]dh_i \qquad \text{où}$$

$$Z(u,y) = \sum_{k<\underline{s}_n} Y(n|k,y)\ {}^n1_k(u) + (2^n s-[2^n s])Y(n|\underline{s}_n,y)\ {}^n1_{\underline{s}_n}(u),$$

et $E[|I_3|^{2p}] \leq C_p \sum_{i\leq d} E[|\int_{y_i}^{x_i}[\int_o^a Z(u,y)d_u(\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i))]dh_i|^{2p}] \leq$

$$\leq C_p \sum_{i\leq d} E[|x_i-y_i|^{2p-1}\int_{y_i}^{x_i}|\int_o^a Z(u,y)d_u(\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i))|^{2p}dh_i]=$$

$$= C_p \sum_{i\leq d}|x_i-y_i|^{2p-1}\int_{y_i}^{x_i}E[|\int_o^a Z(u,y)d_u(\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i))|^{2p}]dh_i$$

(en supposant $x_i \geq y_i$).

Si l'on suppose que $\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i)$ est une martingale locale, on a :

$$E[|\int_o^a Z(u,y)d_u(\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i))|^{2p}] \leq$$

$$\leq C_p\ E[|\int_o^a |Z(u,y)|^2\ d<\frac{\partial}{\partial h_i}X(\cdot,g_i)>_u|^p] \leq B$$

$$B \leq C_p\, E[|\int_o^a d <\frac{\partial}{\partial h_i}X(.,g_i)>_u|^p] \qquad (Z(u,y) \text{ est borné})$$

$$= C_p\, E[|<\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i)>_a|^p] \leq C_{p,k} \quad ;$$

pour le cas où $\frac{\partial}{\partial h_i}X(u,g_i)$ est un processus à variation finie, on a le même résultat grâce à l'hypothèse i). Donc, on a

$$E[|I_3|^{2p}] \leq C_{p,k} \sum_{i\leq d} |x_i-y_i|^{2p} \leq C_{p,k}|x-y|^p .$$

De même, on peut montrer

$$E[|I_1|^{2p}] \leq C_p|t-s|^p \quad \text{et} \quad E[|I_2|^{2p}] \leq C_{p,k}|x-y|^p \quad .$$

Nous allons montrer le résultat principal :

<u>Théorème 1</u> : Soient $X(s,x)$, $Y(s,x)$ deux champs aléatoires, continus en (s,x) sur $R_+ \times R^d$ tels que

i) pour tout $x \in R^d$ fixé, $X(.,x) = X^c(.,x) + \bar{X}(.,x)$ soit une semimartingale avec $d<X(.,x)>_t+|d\bar{X}_t(x)| \leq dA_t$, où (A_t) est un processus croissant, continu, $(\underline{\underline{F}}_t)$-adapté et indépendant de x, et que $\frac{\partial}{\partial x}X(s,x)$ existe, et pour tout i et x fixé, $\frac{\partial}{\partial x_i}X(s,x) = (\frac{\partial}{\partial x_i}X(s,x))^c + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}}X(s,x)$ soit une semimartingale continue avec $E[|<\frac{\partial}{\partial x_i}X(.,x)>_s|^p]$ et $E[|\int_o^s |d_u \overline{\frac{\partial}{\partial X_i}}X(u,x)||^{2p}]$ uniformément bornés en (s,x) dans tout compact K de $R_+ \times R^d$ pour certain $p > d+1$.

ii) pour tout $x \in R^d$ fixé, $Y(.,x)$ soit un processus adapté, et que $\frac{\partial}{\partial x}Y(s,x)$ existe, et soit continu en (s,x).

Alors, il existe une suite (σ_n) de subdivisions aléatoires, où $\sigma_n = \{T_o^n < T_1^n < \dots < T_k^n < \dots\}$, les T_k^n étant des temps d'arrêt, tendant vers l'identité, et telle que, si l'on pose

$$\Delta X^n(s,x) = \sum_k (X_{T^n_{k+1}}(x) - X_{T^n_k}(x))(T^n_{k+1}-T^n_k)^{-1}\, 1_{[T^n_k,T^n_{k+1}[}(s)$$

$$Y^n(s,x) = \sum_k Y(T^n_k,x) 1_{[T^n_k,T^n_{k+1}[}(s)$$

$$I(n,t,x) = \int_0^t Y^n(s,x)\Delta X^n(s,x)ds \quad ,$$

alors, $I(n,t,x)$ converge UCP vers $\int_0^t Y(s,x)dX_s(x)$ et cette intégrale a une version continue en (t,x).

Démonstration : Nous introduisons un changement de temps :

$$T_t = \inf\{s : A_s + s > t\} .$$

Il est évident que $t \to T_t$ est bijective, continu, et qu'on a $|T_t - T_s| \leq |t - s|$ pour tout s,t. On change de filtration : notons

$$\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_{T_t} , \quad W_t = X_{T_t}(x) , \quad W^c_t = X^c_{T_t}(x) \text{ et } \bar{W}_t = \bar{X}_{T_t}(x)$$

en omettant tous les paramètres x dans W_t, W^c_t et $\bar{W}_t$. Il est bien connu que, pour tout x fixé, W est une $\underline{\underline{G}}_t$-semimartingale continue avec la décomposition canonique $W = W^c + \bar{W}$. Si l'on pose $U(t,x) = Y(T_t,x)$, alors, $U(t,x)$ est continu en (t,x), et, pour tout $x \in R^d$ fixé, $U(.,x)$ est adapté par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$.

Pour tout $n \in N$ fixé, on constitue une subdivision aléatoire : $\sigma_n = \{T^n_o < T^n_1 < \ldots\}$, avec la suite de $\underline{\underline{F}}_t$-temps d'arrêt suivants : $T^n_k = \inf\{s : A_s + s > k2^{-n}\}$.

Posons $\Delta X^n(s,x)$ et $Y^n(s,x)$ comme dans l'énoncé, et

$$J(n,t,x) = \int_0^{T_t} Y^n(s,x)\ \Delta X^n(s,x)ds$$

$$W_{n,k} = W_{k2^{-n}} , \quad \delta W^n(s) = \sum_k 1^n_k(s)(W_{n,k+1}-W_{n,k})2^n \quad ,$$

alors, on a $\qquad J(n,t,x) =$

$$= \int_0^{T_t} \sum_k Y(T^n_k,x)(X_{T^n_{k+1}}(x)-X_{T^n_k}(x))(T^n_{k+1}-T^n_k)\ 1_{[T^n_k,T^n_{k+1}[}(s)ds$$

$$= \int_o^t \sum_k U(n|k,x)(W_{n,k+1} - W_{n,k})2^n \, 1_k^n(s)ds +$$

$$+ [(T_t - T^n_{\underline{t}_n})(T^n_{\underline{t}_n+1} - T^n_{\underline{t}_n}) - (2^n t - \underline{t}_n)]U(n|\underline{t}_n, x)(W_{n,\underline{t}_n+1} - W_{n,t_n}) =$$

$$= \int_o^t U^n(s,x)\delta W^n(s)ds + G(n,t,x).$$

Il est facile de voir qu'on a $d\langle W\rangle_t + |d\bar{W}_t| \leq dt$, et que $\frac{\partial}{\partial x} U(s,x)$ existe et est continu en (s,x).

En utilisant les trois lemmes précédents, on a la convergence UCP de $\int_o^t U^n(s,x) \; \delta W^n(s)ds$ vers

$$\int_o^t U(s,x)dW_s = \int_o^{T_t} Y(s,x)dX_s.$$

Pour $G(n,t,x)$, grâce au lemme 1, on peut supposer que $Y(s,x)$ est borné, ainsi donc que $U(s,x)$, d'où

$$|G(n,t,x)| \leq 2b|W_{n,\underline{t}_n+1} - W_{n,\underline{t}_n}| = 2b|X_{T^n_{\underline{t}_n+1}}(x) - X_{T^n_{\underline{t}_n}}(x)| \leq$$

$$\leq 2b \sup_{t\in[0,c],|h|\leq 2^{-n}} |X_{t+h}(x) - X_t(x)| \;,$$

où b est la borne de $U(s,x)$. Comme X est un champ p.s. continu en (t,x), alors, $G(n,t,x)$ converge UCP en (t,x) vers 0. Et par conséquent, $J(n,t,x)$ converge UCP vers $\int_o^{T_t} Y(s,x)dX_s(x)$. Enfin, pour tout K compact de R^d, tout $c,q \in R$, on a

$$P\{\omega : \sup_{x\in K} [\sup_{t\in[0,c]} |I(n,t,x) - \int_o^t Y(s,x)dX_s(x)|] > \varepsilon\} \leq$$

$$\leq P\{\omega : \sup_{x\in K} [\sup_{t\in[0,q]} |J(n,t,x) - \int_o^{T_t} Y(s,x)dX_s(x)|] > \varepsilon\} + P\{\omega : T_q < c\}$$

pour le dernier terme, on prend q assez grand tel que la probabilité soit assez petite, et pour ce q fixé, on fait tendre n vers l'infini dans le premier terme à droite ; alors $I(n,t,x)$ converge UCP vers $\int_o^t Y(s,x)dX_s(x)$ vient immédiatement de la convergence UCP de $I(n,t,x)$.

<u>Remarque</u> : Avec la technique précédente, sous la même hypothèse sur la famille de semimartingales $\{Y(t,x)\}_x$ que sur $\{X(t,x)\}_x$

[c'est-à-dire, $d\langle Y.(x)\rangle_t + |d\bar{Y}_t(x)| \le dB_t$, et certaine bornité uniforme sur $E[|\langle\frac{\partial}{\partial X_i}Y(.,x)\rangle_t|^p]$ et sur $E[|\int_o^s |d_u \frac{\partial}{\partial X_i}Y(u,x)||^{2p}]$], on sait que

$$\int_o^t \Delta Y^n(s,x)\Delta X^n(s,x)(T^n_{k+1}-T^n_k)1_{[T^n_k,T^n_{k+1}[}(s)ds \quad \text{converge UCP}$$

vers $\langle X.(x),Y.(x)\rangle_t$, où "$\Delta X^n$" et "$\Delta Y^n$" correspondent à une subdivision aléatoire $\{T^n_k\}_k$ donnée par les temps d'arrêt

$$T^n_k(\omega) = \inf\{\ s : A_s + B_s + s > k/2^n\}.$$

Par conséquent, pour les deux familles de semimartingales $\{X(.,x)\}$ et $\{Y(.,x)\}$ citées au-dessus, nous pouvons aussi avoir l'approximation UCP de l'intégrale stochastique de Stratonovich $S(t,x) = \int_o^t Y(s,x)*dX_s(x)$ par une suite de familles d'intégrales au sens de Riemann. La continuité de $S(t,x)$ en (t,x) s'en suit. Ici, nous omettons les détails.

Pour finir, nous considérons un cas particulier où $X(t,x)$ est la solution d'une équation différentielle stochastique.

Soit $X^x_t = x + \int_o^t f(X^x_s)dZ_s$, où $x \in R$, (Z_s) est une semimartingale continue, f appartient à $C^2(R)$, et f', la dérivée de f, est bornée.

Pour le cas multidimensionnel où l'on suppose $x \in R^d$, (Z_s) à valeurs dans $R^{d'}$, f appartenant à $C^2(R^d;R^d \times R^{d'})$ et $\frac{\partial}{\partial X_i} f$, $i \le d$, bornés tous les raisonnements à venir resteront valides, mais pour la simplicité des notations et de la preuve, on se contente de traiter le cas unidimensionnel.

On sait, d'abord, que la solution de l'équation ci-dessus X^x_t a une version continue en (t,x), que, pour tout $x \in R$ fixé, $X^x_.$ est une semimartingale continue, et que la dérivée de $X^x_.$ par rapport à x existe,

$$\frac{\partial}{\partial X} X^x_t = 1 + \int_o^t \frac{\partial}{\partial X} X^x_s[f'(X^x_s)]dZ_s =$$

$$= \exp\{\int_o^t f'(X^x_s)dZ_s - 2^{-1}\int_o^t |f'(X^x_s)|^2\, d\langle Z\rangle_s\} ;$$

en plus, elle admet une version continue en (t,x).

(cf. A. Uppman [4] ou, pour le cas où Z est un mouvement brownien, H. Kunita [1]).

Théorème 2 : Soient X_t^x la solution de l'équation ci-dessus, avec la décomposition canonique $X_t^x = X_t^{x,c} + \bar{X}_t^x$, et $Y(t,x)$ un champ aléatoire, continue en (t,x) tel que, pour tout $x \in R$ fixé, $Y(.,x)$ soit un processus adapté, et que $\frac{\partial}{\partial X} Y(t,x)$ existe, et soit continu en (t,x). Alors, l'intégrale stochastique $I(t,x) = \int_o^t Y(s,x)dX_s^x$ a les propriétés suivantes :

i) Pour tout K compact de R, on a une suite d'intégrales au sens ordinaire (de Riemann) $\{I_K(n,t,x)\}$ définies sur $R_+ \times K \times \Omega$, qui converge UCP vers $I(t,x)$.

ii) $I(t,x)$ a une version presque sûrement continue en (t,x) sur $R_+ \times R$.

Démonstration : i) Tout ce qui apparaît dans cette partie de démonstration dépend de K, le compact fixé de R, mais pour être bref, on supprime tous les K dans les notations adoptées ci-dessous.

Prenons $T_i = \inf\{ s : \sup_{x \in K} |X_s^x| \geq i\}$, $i=1,2,\dots$. On voit facilement que $(T_i)_i$ est une suite de temps d'arrêt tendant vers l'infini et que l'on a $|X_s^x| \leq i$ sur $[0,T_i] \times K$. Pour i fixé, si l'on pose $V_i = \sup_{|x| \leq i} |f(x)| \vee 1$, alors pour tout $x \in K$, on a $d\langle X^x_.\rangle_{t \wedge T_i} \leq V_i^2 \, d\langle Z\rangle_{t\wedge T_i}$ et $|d\bar{X}^x_{t\wedge T_i}| \leq V_i |d\bar{Z}_{t\wedge T_i}|$.

Posons ensuite,

$$D_u = \sum_i V_i^2 \, 1_{[T_{i-1},T_i[}(u) \quad , \quad H_u = \sum_i V_i \, 1_{[T_{i-1},T_i[}(u)$$

et
$$S_t = \inf\{ s : \int_o^s D_u d\langle Z\rangle_u + \int_o^s H_u |d\bar{Z}_u| + s \geq t\}.$$

Ce changement de temps est continu, donc, si l'on prend $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_{S_t}$ et $Q_t^x = X_{S_t}^x$, on sait que la $\underline{\underline{G}}_t$-décomposition de Q_t^x est juste $X_{S_t}^{x,c} + \bar{X}_{S_t}^x = Q_t^{x,c} + \bar{Q}_t^x$.

Pour tout $x \in K$, $s < t$, par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, on a bien :

$$<Q^x_\cdot>_s^t + \underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}\,(\bar{Q}^x_\cdot) = <X^x_\cdot>_{S_s}^{S_t} + \int_{S_s}^{S_t} |d\bar{X}^x_u| \leq$$

$$\leq \int_{S_s}^{S_t} D_u d<Z>_u + \int_{S_s}^{S_t} H_u |d\bar{Z}_u| \leq t - s \ ;$$

donc, $d<Q^x_\cdot>_t + |d\bar{Q}^x_t| \leq dt$ et $d<Z>_{S_t} + |d\bar{Z}_{S_t}| \leq dt$.

Maintenant, si l'on pose $B(s,x) = Y(S_s,x)$, pour traiter l'intégrale stochastique $\int_o^t B(s,x)dQ^x_s$, on se ramène à vérifier les hypothèses du lemme 3 :

a) $\frac{\partial}{\partial X} Q^x_\cdot$ est une semimartingale continue ;

b) $E[|<\frac{\partial}{\partial X} Q^x_\cdot>_t|^p$ et $E[|\int_o^t |d \frac{\partial}{\partial X} Q^x_u|^{2p}]$ sont uniformément bornés en (t,x) dans tout compact K' de $R_+ \times R$ pour certain $p > 2$.

Comme on l'a dit, a) est vraie ; pour b), on suppose d'abord que $\frac{\partial}{\partial X} Q^x_\cdot$ est une martingale locale continue. Alors, pour tout t,x fixés, on a

$$E[|<\frac{\partial}{\partial X} Q^x_\cdot>_t|^p = E[|1 + \int_o^t \{\frac{\partial}{\partial X} Q^x_u f'(Q)\}^2 d<Z>_{S_u}|^p] \leq$$

$$\leq C_p\{1+E[|\int_o^t |\frac{\partial}{\partial X}Q^x_u|^2 d<Z>_{S_u}|^p]\} \leq C_p\{1+E[|\int_o^t |\frac{\partial}{\partial X}Q^x_u|^2 du|^p]\}$$

$$\leq C_p + C_{p,k'} \int_o^t E[|\frac{\partial}{\partial X}Q^x_\cdot|^{2p}]du \leq C_p + C_{p,k'} \int_o^t E[|<\frac{\partial}{\partial x} Q^x_\cdot>_u|^p]du \ .$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$E[|<\frac{\partial}{\partial x}Q^x_\cdot>_t|^p] \leq C_p \exp(C_{p,k'}t) \leq C_{p,k'} < \infty \ .$$

Pour la partie à variation finie de $\frac{\partial}{\partial X}Q^x_\cdot$, on a le résultat analogue.

Jusqu'à présent, on a démontré que, par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, $J(n,t,x) = \int_o^t B^n(s,x)\delta Q^n(s,x)ds$ (correspondant aux subdivisions dyadiques) converge UCP vers $\int_o^t B(s,x)dQ_s(x)$. Avec la même procédure que celle dans la démonstration du Théorème 1, on a le résultat désiré. En posant $S_{n,i} = S_{i2^n}$, la bonne approximation est écrite explicitement comme

$$I_K(n,t,x) = \int_o^t Y^n(s,x)\Delta X^n(s,x)ds \quad , \quad \text{où}$$

$$Y_n(s,x) = \sum_i Y(S_{n,i},x)\, 1_{[S_{n,i},S_{n,i+1}[}(s) \quad \text{et}$$

$$\Delta X^n(s,x) = \sum_i (X^x_{S_{n,i+1}} - X^x_{S_{n,i}})(S_{n,i+1}-S_{n,i})^{-1}\, 1_{[S_{n,i},S_{n,i+1}[}(s)$$

Quant au résultat annoncé dans ii), il est la conséquence immédiate de i), sachant que toutes les $I_K(n,t,x)$ sont continues en (t,x).

Bibliographie :

[1] H. Kunita : Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. Un cours à l'Ecole d'Eté de probabilités de Saint-Flour XII-1982. Lecture Notes in Mathematics N° 1097. Springer-Verlag 1984.

[2] E. Lenglart : Semi-martingales et intégrales stochastiques en temps continu. Revue de CETHEDEC-Ondes et Signal N° 75 1983.

[3] P.A. Meyer : Flot d'une Equation Différentielle Stochastique. Séminaire de probabilités XV. Lectures Notes in Mathematics N° 850. Springer-Verlag 1981.

[4] A. Uppman : Sur le flot d'une Equation Différentielle Stochastique. Thèse de 3ème cycle - Rouen 1980.

Lin Cheng de
Laboratoire du Calcul des Probabilités et Statistique
Université de Rouen
B.P. 67
76130 MONT SAINT-AIGNAN