SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 341-374
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__341_0>

TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION ET POINTS MULTIPLES DES PROCESSUS DE LEVY

Jean-François LE GALL(*)

0. INTRODUCTION.

La notion de temps local d'intersection du mouvement brownien a été introduite et étudiée récemment par divers auteurs : voir en particulier Wolpert [34], Dynkin [4,5], Rosen [25] et Yor [35]. Entre autres applications, les temps locaux d'intersection permettent de construire des mesures canoniques portées par l'ensemble des points multiples du processus considéré. L'étude des mesures ainsi obtenues conduit à des renseignements assez précis sur les propriétés fines des points multiples du mouvement brownien, par exemple la mesure de Hausdorff de l'ensemble des points multiples [17], ou la structure de l'ensemble des temps auxquels est atteint un point de multiplicité infinie [16]. Récemment, Rosen (voir aussi Dynkin [4] pour un point de vue différent) a étendu la notion de temps local d'intersection à des classes de processus plus générales, comme les "bonnes" diffusions elliptiques [26] ou les processus stables multidimensionnels [27]. L'objet du présent travail est d'utiliser l'idée de temps local d'intersection, ou plus exactement de mesures portées par les points multiples, pour étudier les propriétés fines des points multiples des processus de Lévy, et en particulier répondre à certaines questions posées par Taylor dans un article récent ([31], conjectures B,C et D). Nous n'avons pas recherché ici la plus grande généralité : dans les sections 2 et 3,nous nous restreignons à une classe assez particulière de processus de Lévy, suffisante cependant pour nos applications, et dans les sections 4 et 5, qui sont indépendantes des précédentes,nous nous intéressons à des processus particuliers, le processus de Cauchy unidimensionnel dans la section 4, et le mouvement brownien dans la section 5. Ce choix a été motivé par notre objectif principal qui était de démontrer les résultats conjecturés par Taylor [31]. Rappelons ces résultats, sous la forme qui figure dans [31]. Pour toute fonction ϕ convenable on note ϕ-m la mesure de Hausdorff associée à ϕ, et ϕ-p la mesure de packing (voir [32]) associée à ϕ.

Conjecture B. Soient X un processus de Cauchy symétrique sur la droite, et K un sous-ensemble compact d'intérieur vide de $\mathbb{R}$. Il existe P-p.s. un point x tel que $X^{-1}(x)$ ait même structure d'ordre que K.

Conjecture C. Soient B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ et, pour tout $k \geq 1$, M_k l'ensemble des points de multiplicité k de la trajectoire de B. Alors P-p.s.

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu - Tour 56 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

(i) si $d = 2$,

$$x^2(\log 1/x)^\alpha - p(M_k) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \geq k, \\ 0 & \text{si } \alpha < k\ ; \end{cases}$$

(ii) si $d = 3$,

$$x(\log 1/x)^\alpha - p(M_k) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \geq 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

<u>Conjecture D</u>. Soit M_k l'ensemble des points de multiplicité k de la trajectoire d'un processus stable sphériquement symétrique d'indice α dans $\mathbb{R}^d$. Supposons $\alpha < d$ et $\gamma = k\alpha - d(k-1) > 0$. Alors, P-p.s.,

(i) $$x^\gamma(\log 1/x)^\beta - m(M_k) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0, \\ 0 & \text{si } \beta \leq 0\ ; \end{cases}$$

(ii) $$x^\gamma(\log 1/x)^\beta - p(M_k) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta \geq -k/2, \\ 0 & \text{si } \beta < -k/2. \end{cases}$$

Dans la partie 2, nous donnons une construction simple du temps local d'intersection de p processus de Lévy indépendants dans $\mathbb{R}^d$, sous certaines hypothèses sur la loi commune à ces processus. Notre point de vue est assez différent de celui adopté dans les références indiquées plus haut : alors que les auteurs précités conçoivent le temps local d'intersection comme une mesure sur les p-uplets de temps $(t_1,\dots,t_p)$ tels que $X^1(t_1) = \dots = X^p(t_p)$, où $X^1,\dots,X^p$ sont les p processus considérés, nous construisons ici directement une mesure portée par les points d'intersection des trajectoires de $X^1,\dots,X^p$. Décrivons brièvement notre construction, qui a été inspirée par les résultats de [14] dans le cas brownien. On introduit, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i = 1,\dots,p$, la "saucisse" de rayon ε associée à X^i :

$$S^i_\varepsilon = \bigcup_{s\geq 0} (X^i_s + B(0,\varepsilon))$$

où $B(0,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans $\mathbb{R}^d$.

Notons $c(\varepsilon)$ la capacité, relative au processus X^i, de la boule $B(0,\varepsilon)$ et, pour tout sous-ensemble borélien borné A de $\mathbb{R}^d$, posons

$$\mu_\varepsilon(A) = c(\varepsilon)^{-p}\, m(S^1_\varepsilon \cap \dots \cap S^p_\varepsilon \cap A),$$

où m désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

On peut alors montrer (théorème 2.1) la convergence de la suite de mesures μ_ε vers une mesure μ portée par les points communs aux trajectoires de $X^1,\dots,X^p$. On obtient même une expression explicite des moments de $\mu(A)$, pour tout ensemble A. Les techniques de cette section sont largement inspirées du travail de Hawkes [10].

Cependant nous allons un peu plus loin que Hawkes, dans le sens où nous ne nous contentons pas d'établir l'existence de points d'intersection, mais nous construisons une mesure portée par ces points.

Dans la partie 3, nous utilisons les résultats de la partie 2 pour obtenir certains renseignements sur la mesure de Hausdorff de l'ensemble des points multiples d'un processus de Lévy. Nous établissons à la fois un théorème de majoration (théorème 3.1) et un théorème de minoration (théorème 3.2) pour la mesure de Hausdorff. Evidemment, ces résultats sont d'autant plus intéressants que la fonction intervenant dans la majoration est proche de celle qui intervient dans la minoration, c'est le cas pour les processus stables symétriques, pour lesquels nous démontrons, en le précisant un peu, un résultat conjecturé par Taylor (partie (i) de la conjecture D).

La partie 4 est consacrée à la preuve de la conjecture B de [31]. Ce résultat est l'analogue d'un théorème relatif au mouvement brownien plan établi dans [16]. En fait les arguments de [16] peuvent être adaptés sans modification essentielle pour le processus de Cauchy. Nous commençons par décrire brièvement, en nous inspirant de Rosen [27], une construction du temps local d'intersection de p processus de Cauchy indépendants. A la différence des sections 2 et 3, nous avons ici besoin du temps local d'intersection usuel, vu comme mesure sur les p-uplets de temps $(t_1,\dots,t_p)$ tels que $t_1 <\dots< t_p$ et $X(t_1) =\dots= X(t_p)$. Nous énonçons ensuite la proposition-clé (proposition 4.3) qui permet d'analyser le comportement du processus entre les instants où il passe par un point multiple, et conduit aisément à l'existence de points de multiplicité infinie. Une fois ces résultats établis, le reste de la preuve est très semblable aux arguments de [16] : nous nous sommes contentés d'indiquer, dans un cas particulier, le schéma général de la démonstration.

Enfin, la partie 5 contient certains résultats sur la mesure de packing des points multiples du mouvement brownien (voir conjecture C ci-dessus). La notion de mesure de packing a été introduite par Taylor et Tricot [32]. Au même titre que la notion de mesure de Hausdorff, elle constitue un outil pour mesurer la taille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle. Nous donnons d'abord un test qui permet de décider pour quelles fonctions ϕ la ϕ-mesure de packing de l'ensemble des points de multiplicité k de la trajectoire d'un mouvement brownien plan est nulle ou infinie. Ce résultat généralise un théorème établi en [21] concernant le cas $k = 1$. Nous nous intéressons ensuite à la mesure de packing de l'ensemble M_2 des points doubles de la trajectoire d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Les résultats obtenus sont ici moins précis que dans le cas du plan : nous montrons l'existence de constantes $\alpha,\beta > 0$ telles que, P-p.s.,

$$x\ (\log 1/x)^{-\alpha} - p\ (M_2) = \infty,$$

$$x\ (\log 1/x)^{-\beta} - p\ (M_2) = 0,$$

où $\phi\text{-}p(M_2)$ désigne la mesure de packing de M_2 relativement à la fonction ϕ.

Finalement la partie 6 contient diverses remarques sur les résultats qui précèdent, ainsi qu'une discussion des prolongements possibles.

Remerciements. Je tiens ici à remercier le professeur S.J. Taylor pour avoir suggéré les problèmes traités dans ce travail.

2. UNE CONSTRUCTION SIMPLE DU TEMPS LOCAL D'INTERSECTION DE PLUSIEURS PROCESSUS DE LEVY.

Dans toute cette partie, nous considérons un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, noté $X = (X_t, t \geq 0)$. Nous supposerons toujours que X est sphériquement symétrique, transient, et possède la propriété de Feller forte. D'après Hawkes [9], cette dernière propriété entraîne l'existence d'une famille canonique $(p_t(x)\ ;\ t > 0, x \in \mathbb{R}^d)$ de densités de transition de X, et le noyau potentiel de X est alors simplement donné par :

$$u(x) = \int_0^\infty p_t(x)dt \qquad (x \in \mathbb{R}^d,\ x \neq 0).$$

L'hypothèse de symétrie sphérique entraîne que $u(x)$ est seulement fonction de $|x|$. A l'instar de Hawkes [10], nous supposerons que $u(x)$ est une fonction décroissante de $|x|$. Enfin, dans le cas $d = 1$, nous supposerons que les points sont polaires pour X (cette hypothèse est toujours réalisée si $d \geq 2$, voir Kesten [12]).

Soit $p \geq 1$ un entier. D'après Hawkes [10], l'hypothèse

$$\text{(H)} \qquad \int_{|x|\leq 1} u(x)^p\, dx < \infty,$$

suffit à entraîner l'existence de points de multiplicité p pour la trajectoire de X (voir [7] ou [19] pour des extensions de ce résultat à des processus de Lévy plus généraux). Nous nous proposons dans cette partie de construire, sous l'hypothèse (H), une mesure "canonique" portée par les points de multiplicité p de X. Plus précisément nous montrerons comment construire une mesure portée par les points d'intersection de p copies indépendantes de X. En considérant la trajectoire de X sur p intervalles disjoints, il serait ensuite facile d'obtenir une mesure portée par les points de multiplicité p de X.

Nous considérons donc p copies indépendantes de X, notées $X^1,\dots,X^p$, issues respectivement de $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{R}^d$. Soit $\varepsilon > 0$, à chaque processus X^i, $i = 1,\dots,p$, on associe la "saucisse" S^i_ε de rayon ε, définie par :

$$S^i_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d\ ;\ \inf\{|X^i_t - y|\ ;\ t < \infty\} < \varepsilon\}.$$

Remarquons que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$:

$$P[y \in S^i_\varepsilon] = P[T^i_\varepsilon(y) < \infty],$$

où $T^i_\varepsilon(y) = \inf\{t \; ; \; |X^i_t - y| < \varepsilon\}$. D'après des résultats classiques du théorie du potentiel (voir par exemple [2], p. 285), il existe une mesure μ_ε portée par la boule fermée de centre 0 de rayon ε, telle que :

$$(2.a) \qquad P[T^i_\varepsilon(y) < \infty] = \int u(y+x-x_i)\, \mu_\varepsilon(dx)$$

La masse totale de μ_ε, notée $c(\varepsilon)$, est la capacité de la boule de centre 0 de rayon ε. L'hypothèse de polarité des points entraîne que $c(\varepsilon)$ décroît vers 0 quand ε tend vers 0. L'objectif principal de cette partie est de montrer le théorème suivant. On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

<u>*Théorème 2.1*</u> : *Sous l'hypothèse (H) il existe P-p.s. une mesure μ portée par l'ensemble I des points communs aux trajectoires de $X^1,\dots,X^p$, ne chargeant pas les points, et telle que pour toute partie borélienne bornée A de $\mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)^{-p}\, m(S^1_\varepsilon \cap S^2_\varepsilon \cap \dots \cap S^p_\varepsilon \cap A) = \mu(A),$$

où la convergence a lieu dans $L^k(P)$ pour tout $k < \infty$. De plus, pour tout entier $k \geq 1$,

$$E[(\mu(A))^k] = \int_{A^k} dy_1 \dots dy_k \prod_{j=1}^{p} \Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_k} u(y_{\sigma(1)} - x_j) \prod_{i=2}^{k} u(y_{\sigma(i)} - y_{\sigma(i-1)})\Big),$$

où Σ_k désigne l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,k\}$.

La preuve du théorème 2.1 utilisera deux résultats préliminaires que nous énonçons sous forme de lemmes.

<u>*Lemme 2.2*</u> : *Sous l'hypothèse (H) on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^d\, c(\varepsilon)^{-p} = 0.$$

<u>Preuve</u> : Ce lemme est déjà établi par Hawkes [10]. Pour la commodité du lecteur, nous en redonnons ici la démonstration. Partons de l'identité (2.a) et remarquons que, si $|y-x_i| < \varepsilon$, on a bien sûr : $P[T^i_\varepsilon(y) < \infty] = 1$. En intégrant sur la boule de centre x_i de rayon ε on trouve ainsi :

$$c_d\, \varepsilon^d = \int_{(|y|\leq\varepsilon)} dy \int u(y-x)\, \mu_\varepsilon(dx)$$

où c_d est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

On en déduit aussitôt :

$$c(\varepsilon) \geq c_d\, \varepsilon^d \Big(\int_{(|y|\leq 2\varepsilon)} u(y)\,dy\Big)^{-1}.$$

Or, l'hypothèse (H) entraîne : $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^d\, u(\varepsilon)^p = 0$, d'où aussi :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{d/p-d} \int_{(|y|\leq 2\varepsilon)} u(y)dy = 0.$$

Le résultat du lemme en découle aisément. □

Lemme 2.3 : *Soit $k \geq 1$ un entier et soient $y_1,\ldots,y_k$ k points distincts de $\mathbb{R}^d - \{x_i\}$. Alors, sauf éventuellement pour un ensemble de k-uplets $(y_1,\ldots,y_k)$ de mesure de Lebesgue nulle, pour tout $i = 1,\ldots,p$*

$$\lim_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\to 0} (c(\varepsilon_1)\ldots c(\varepsilon_k))^{-1} P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leq \ldots \leq T^i_{\varepsilon_k}(y_k) < \infty]$$

$$= u(y_1-x_i) \prod_{j=2}^{k} u(y_j-y_{j-1}).$$

De plus, si $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k > 0$ sont tels que $|y_1-x_i| \geq 2\varepsilon_1$ et, pour $j = 2,\ldots,k$, $|y_j-y_{j-1}| \geq 2(\varepsilon_j+\varepsilon_{j-1})$ on a :

$$(c(\varepsilon_1)\ldots c(\varepsilon_k))^{-1} P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leq \ldots \leq T^i_{\varepsilon_k}(y_k) < \infty]$$

$$\leq u\left(\frac{y_1-x_i}{2}\right) \prod_{j=2}^{k} u\left(\frac{y_j-y_{j-1}}{2}\right).$$

Preuve : On montre d'abord la seconde assertion. On procède par récurrence sur k. Pour $k=1$, le résultat recherché découle immédiatement de la formule $(2.a)$ et de la monotonie de u. Si $k \geq 2$, on applique la propriété de Markov au temps $T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1})$ ce qui montre que :

$$P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leq \ldots \leq T^i_{\varepsilon_k}(y_k) < \infty] \leq P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leq \ldots \leq T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1}) < \infty]$$

$$\times \sup\{P_x[T^i_{\varepsilon_k}(y_k) < \infty] \ ; \ |x-y_{k-1}| \leq \varepsilon_{k-1}\}.$$

A nouveau en utilisant $(2.a)$, ainsi que l'hypothèse $|y_k-y_{k-1}| \geq 2(\varepsilon_{k-1}+\varepsilon_k)$, on obtient :

$$\sup\{P_x[T^i_{\varepsilon_k}(y_k) < \infty] \ ; \ |x-y_{k-1}| \leq \varepsilon_{k-1}\} \leq c(\varepsilon_k)u\left(\frac{y_k-y_{k-1}}{2}\right)$$

d'où la majoration voulue.

Passons maintenant à la preuve de la première assertion. Quitte à écarter un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, on peut supposer que u est continue en y_1-x_i, et de même en y_j-y_{j-1} pour $j = 2,\ldots,k$. Il découle alors immédiatement de $(2.a)$ que

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0} c(\varepsilon_1)^{-1} P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) < \infty] = u(y_1-x_i).$$

On raisonne par récurrence sur k. Pour $k \geqq 2$,

$$(2.b)\qquad P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leqq \ldots \leqq T^i_{\varepsilon_k}(y_k) < \infty]$$

$$= P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leqq \ldots \leqq T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1})\ ;\ y_k \in S^i_{\varepsilon_k}(T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1}),\infty)]$$

$$- P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leqq \ldots \leqq T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1})\ ;\ y_k \in S^i_{\varepsilon_k}(0,T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1})) \cap S^i_{\varepsilon_k}(T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1}),\infty)]$$

où on a noté $S^i_\varepsilon(a,b)$ la saucisse de rayon ε associée à X^i sur $[a;b]$. En utilisant la propriété de Markov au temps $T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1})$, ainsi que $(2.a)$, on trouve

$$\lim_{\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_k \to 0} (c(\varepsilon_1)\ldots c(\varepsilon_k))^{-1}\ P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leqq \ldots \leqq T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1}); y_k \in S^i_{\varepsilon_k}(T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1}),\infty)]$$

$$= u(y_k - y_{k-1}) \lim_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{k-1}\to 0} (c(\varepsilon_1)\ldots c(\varepsilon_{k-1}))^{-1}\ P[T^i_{\varepsilon_1}(y_1) \leqq \ldots \leqq T^i_{\varepsilon_{k-1}}(y_{k-1}) < \infty]$$

$$= u(y_1 - x_i) \prod_{j=2}^{k} u(y_j - y_{j-1})$$

grâce à l'hypothèse de récurrence. Pour conclure, il reste à montrer que le second terme du membre de droite de $(2.b)$ est négligeable. Or cela découle aisément des majorations qui précèdent et du fait que $c(\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. □

Preuve du théorème 2.1 : Pour simplifier les notations on écrit

$$\mu_\varepsilon(A) = c(\varepsilon)^{-p}\ m(S^1_\varepsilon \cap S^2_\varepsilon \cap \ldots \cap S^p_\varepsilon \cap A)$$

On commence par montrer que :

$$(2.c)\qquad \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0} E[\mu_\varepsilon(A)\mu_{\varepsilon'}(A)] = \int_{A^2} dy_1\, dy_2 \prod_{j=1}^{p} (u(y_1 - x_j)u(y_2 - y_1) + u(y_2 - x_j)\, u(y_1 - y_2)).$$

En utilisant l'indépendance des X^j et le théorème de Fubini, on écrit :

$$(2.d)\qquad E[\mu_\varepsilon(A)\mu_{\varepsilon'}(A)] = \int_{A^2} dy_1 dy_2 \prod_{j=1}^{p} (c(\varepsilon)c(\varepsilon'))^{-1}\ P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty, T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty].$$

On remarque que

$$P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty\ ;\ T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty]$$

$$= P[T^j_\varepsilon(y_1) \leqq T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty] + P[T^j_{\varepsilon'}(y_2) < T^j_\varepsilon(y_1) < \infty],$$

d'où, d'après le lemme 2.3, sauf pour (y_1,y_2) appartenant à un ensemble de mesure nulle,

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0} (c(\varepsilon)c(\varepsilon'))^{-1} P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty \; ; \; T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty] = u(y_1-x_j)u(y_2-y_1)+u(y_2-x_j)u(y_1-y_2)$$

En revenant à (2.d), on voit qu'on aura démontré (2.c) si on sait justifier le passage à la limite sous le signe somme. Pour cela on raisonne comme suit. On remarque d'abord que sur l'ensemble

$$A^2(\varepsilon,\varepsilon') = \{(y_1,y_2) \in A^2 \; ; \; |y_2-y_1| \geq 2(\varepsilon+\varepsilon'),\ |y_1-x_j| \geq 2\varepsilon,\ |y_2-x_j| \geq 2\varepsilon'\},$$

les majorations du lemme 2.3 montrent :

$$(c(\varepsilon)c(\varepsilon'))^{-1} P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty \; ; \; T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty]$$

$$\leq u(\frac{y_1-x_j}{2}) u(\frac{y_2-y_1}{2}) + u(\frac{y_2-x_j}{2}) u(\frac{y_1-y_2}{2})$$

et donc le passage à la limite sous le signe somme est justifié par le théorème de convergence dominée, grâce à l'hypothèse (H). Il reste à montrer que l'intégrale sur $A^2 - A^2(\varepsilon,\varepsilon')$ tend vers 0. En utilisant l'inégalité de Hölder, on se ramène à majorer

$$(c(\varepsilon)c(\varepsilon'))^{-p} \int_{A^2-A^2(\varepsilon,\varepsilon')} dy_1\, dy_2\, P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty \; ; \; T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty]^p.$$

Considérons l'intégrale sur l'ensemble $\{|y_2-y_1| < 2(\varepsilon+\varepsilon')\}$ et supposons par exemple $\varepsilon < \varepsilon'$: on majore alors simplement

$$(c(\varepsilon)c(\varepsilon'))^{-p} \int_{A\cap\{|y_2-y_1|<2(\varepsilon+\varepsilon')\}} dy_1\, dy_2\, P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty \; ; \; T^j_{\varepsilon'}(y_2) < \infty]^p$$

$$\leq c(\varepsilon)^{-p} \int_A dy_1\, P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty]^p \cdot c_d(4\varepsilon')^d\, c(\varepsilon')^{-p}.$$

Ensuite, d'une part le lemme 2.1 montre que :

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} \varepsilon'^d \; c(\varepsilon')^{-p} = 0,$$

d'autre part, on a :

$$c(\varepsilon)^{-p} \int_A dy_1\, P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty]^p$$

$$\leq c(\varepsilon)^{-p}\; c_d(2\varepsilon)^d + c(\varepsilon)^{-p} \int_{A\cap\{|y_1-x_j|>2\varepsilon\}} dy_1\, P[T^j_\varepsilon(y_1) < \infty]^p \leq C,$$

pour une certaine constante C, d'après le lemme 2.1, la partie majoration du lemme 2.2 et l'hypothèse (H). On traite de même (plus facilement) les cas $\{|y_1-x_j| < 2\varepsilon\}$ et $\{|y_2-x_j| < 2\varepsilon'\}$. Cela termine la preuve de (2.c).

On déduit immédiatement de (2.c) que la famille $(\mu_\varepsilon(A))$ est de Cauchy donc converge dans L^2. Notons $\tilde{\mu}(A)$ sa limite. Les majorations du lemme 2.2 montrent que la famille $(\mu_\varepsilon(A))$ est bornée dans L^k pour tout entier $k \geq 1$. La convergence de $\mu_\varepsilon(A)$ vers $\tilde{\mu}(A)$ a donc aussi lieu dans L^k pour tout k. De plus, en raisonnant comme pour (2.c), on trouve :

$$E[\tilde{\mu}(A)^k] = \lim_{\varepsilon\to 0} E[\mu_\varepsilon(A)^k]$$

$$= \int_{A^k} dy_1\ldots dy_k \prod_{j=1}^{p} \Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_k} u(y_{\sigma(1)}-x_j) \prod_{i=2}^{k} u(y_{\sigma(i)}-y_{\sigma(i-1)})\Big).$$

Il reste à montrer que P-p.s. il existe une <u>mesure</u> de Radon $\mu(\cdot)$ telle que pour toute partie borélienne bornée A,

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A) \qquad \text{P-p.s.}$$

Appelons pavé à coordonnées rationnelles tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la forme $\prod_{i=1}^{d} I_i$ où les I_i sont des intervalles à bornes rationnelles.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des réunions finies de pavés à coordonnées rationnelles. On peut supposer que les deux propriétés suivantes sont satisfaites avec probabilité 1 :

(i) pour tout $R \in \mathcal{R}$, $\tilde{\mu}(R) \geq 0$

(ii) si $R,R' \in \mathcal{R}$ sont disjoints, $\tilde{\mu}(R \cup R') = \tilde{\mu}(R) + \tilde{\mu}(R')$.

A partir de maintenant, on se place sur l'ensemble de probabilité 1 sur lequel (i) et (ii) sont satisfaites. On cherche à montrer que l'application $R \to \tilde{\mu}(R)$ peut être prolongée en une mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$. D'après des arguments classiques (voir par exemple Neveu [22], p. 25-29), il suffit de vérifier la propriété d'approximation suivante :

(2.e) pour tout $R \in \mathcal{R}$, $\tilde{\mu}(R) = \sup\{\tilde{\mu}(R')\ ;\ R' \in \mathcal{R}, R' \subset R,\ R'$ compact$\}$.

Afin de vérifier (2.e), fixons un entier $K > 0$ et introduisons les ensembles suivants :

$$A_{n,k} = [k2^{-n}\ ;\ (k+1)2^{-n}] \times \prod_{i=2}^{d} [-K\ ;\ K].$$

On va montrer que :

(2.f) $\quad \sup\{\tilde{\mu}(A_{n,k}) \; ; \; |k| \leq K2^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad$ p.s.

Il découle aisément de (2.f) (et des énoncés analogues où on ferait jouer à la i^e coordonnée le rôle de la première) que la propriété (2.e) est satisfaite. Pour montrer (2.f), remarquons que :

$$E[(\sup\{\tilde{\mu}(A_{n,k}), |k| \leq K2^n\})^2] \leq E[\sum_{|k|\leq K2^n} \tilde{\mu}(A_{n,k})^2]$$

$$= \int_{\bigcup_k (A_{n,k})^2} dy_1\, dy_2 \prod_{j=1}^{p} (u(y_1-x_j))u(y_2-y_1) + u(y_2-x_j)u(y_1-y_2)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puisque $\bigcup_k (A_{n,k})^2$ décroît, quand n tend vers l'infini, vers un ensemble de mesure nulle. La propriété (2.f) en découle, quitte à exclure un nouvel ensemble de probabilité nulle. On conclut à l'existence d'une mesure positive, notée $\mu(\cdot)$, telle que, pour tout $R \in \mathcal{R}$, $\tilde{\mu}(R) = \mu(R)$ p.s. Il reste à vérifier qu'on a aussi, pour toute partie borélienne bornée A, $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ p.s. Cela découle d'un argument de classe monotone.

Pour compléter la preuve du théorème 2.1 il faut encore voir que μ ne charge pas les points et est portée par I. La première assertion découle de (2.f) (plus généralement on obtient que μ ne charge pas les hyperplans de la forme $\{x_i = a\}$). Pour la seconde assertion on remarque que, par construction, pour tout $\varepsilon > 0$, μ est portée par :

$$I_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{p} \overline{S^i_\varepsilon}.$$

où $\overline{S^i_\varepsilon}$ désigne l'adhérence de S^i_ε. Donc μ est aussi portée par :

$$\bigcap_{\varepsilon>0} I_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{p} \overline{X^i(0,\infty)}$$

où on note $X^i(0,\infty) = \{X^i_s \; ; \; s \geq 0\}$. Comme μ ne charge pas les points et chaque X^i a au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité on conclut que μ est portée par I. □

Remarques : (i) Le théorème 2.1 peut aussi être appliqué à certains processus X récurrents : il suffit dans ce cas de considérer le processus X tué à un temps exponentiel indépendant, et de vérifier que ce nouveau processus satisfait les hypothèses plus haut (nous avons implicitement supposé que X était défini sur $[0,\infty[$, mais il est clair que notre construction s'appliquerait aussi bien à un processus tué).

(ii) Les hypothèses de symétrie sphérique et de monotonie du noyau potentiel simplifient de manière significative les estimations de la preuve du théorème 2.1, et seront vérifiées dans les applications que nous avons en vue. Il est cependant très probable qu'on puisse étendre le théorème 2.1 à une situation beaucoup moins restrictive. Nous nous contenterons de renvoyer le lecteur à [19] pour un exemple de résultats obtenus dans un cadre plus général.

(iii) La preuve du théorème 2.1 repose en grande partie sur les estimations du lemme 2.3 concernant la probabilité pour le processus de visiter plusieurs petites boules. La preuve de ces estimations est ici facile grâce à la formule explicite *(2.a)*. Il est intéressant de noter que des estimations du même type ont été obtenues par Sznitman [28] pour des diffusions elliptiques dans $\mathbb{R}^d$.

3. APPLICATION A LA MESURE DE HAUSDORFF DE L'ENSEMBLE DES POINTS MULTIPLES.

Nous reprenons dans cette partie les notations et hypothèses de la partie 2. Nous nous proposons d'utiliser le théorème 2.1 pour obtenir certains renseignements sur l'ensemble I des points communs aux trajectoires de $X^1,\dots,X^p$.

Théorème 3.1 : Pour tout $\varepsilon > 0$, *soient*

$$\phi(\varepsilon) = \varepsilon^d\, c(\varepsilon)^{-p}$$

$$\phi^*(\varepsilon) = \sup\{\phi(\eta)\ ;\ \eta \leq \varepsilon\}.$$

Alors, presque sûrement pour tout compact K *de* $\mathbb{R}^d$, *on a :*

$$\phi^* - m(I \cap K) < \infty,$$

où $\phi^* - m$ *désigne la mesure de Hausdorff associée à* ϕ^*.

Preuve : Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\mathcal{C}(\varepsilon)$ l'ensemble des cubes de $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$A = \prod_{i=1}^{d} [k_i\varepsilon\ ;\ (k_i+1)\varepsilon], \qquad k_i \in \mathbb{Z}\,.$$

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre de cubes de $\mathcal{C}(\varepsilon)$ qui rencontrent $I \cap K$. Remarquons que

$$N(\varepsilon)\varepsilon^d \leq m((I \cap K)_{\varepsilon d^{1/2}}) \leq m(S^1_{\varepsilon d^{1/2}} \cap \dots \cap S^p_{\varepsilon d^{1/2}} \cap K_{\varepsilon d^{1/2}})$$

où $(I \cap K)_\varepsilon$, resp. K_ε, désigne le voisinage ouvert d'ordre ε de $I \cap K$, resp. K.

On déduit aisément du théorème 2.1 que

$$E[m(S^1_{\varepsilon d^{1/2}} \cap \dots \cap S^p_{\varepsilon d^{1/2}} \cap K_{\varepsilon d^{1/2}})] \leq C \cdot c(\varepsilon\, d^{1/2})^p,$$

pour une certaine constante C dépendant de K. On conclut que :

$$(3.a) \qquad E\,[N(\varepsilon)] \leq C\,\varepsilon^{-d}\, c(\varepsilon\, d^{1/2})^p.$$

D'autre part, en revenant à la définition d'une mesure de Hausdorff, on a :

$$(3.b) \qquad \phi^* - m(I \cap K) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0}(N(\varepsilon)\, \phi^*(\varepsilon d^{1/2})).$$

Or, en se restreignant à une suite (ε_k) tendant vers 0 telle que $\phi(\varepsilon_k) \geq \frac{1}{2}\, \phi^*(\varepsilon_k)$, on déduit de (3.*a*) et du lemme de Fatou que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0}(N(\varepsilon)\phi^*(\varepsilon d^{1/2})) < \infty \qquad \text{p.s.}$$

Compte-tenu de (3.*b*), ceci termine la preuve du théorème. □

<u>*Théorème 3.2*</u> : *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *soient*

$$\psi(\varepsilon) = \int_{(|x|<\varepsilon)} u(x)^p\, dx, \quad \psi^*(\varepsilon) = \psi(\varepsilon)(\log \log \tfrac{1}{\varepsilon})^p.$$

Supposons ψ^* *croissante au voisinage de* 0. *Alors, presque sûrement pour toute partie borélienne* A *de* $\mathbb{R}^d$,

$$\psi^* - m(I \cap A) \geq C \cdot \mu(A).$$

où $C > 0$ *est une constante dépendant seulement de* d,p *et de la loi de* X.

<u>Preuve</u> : Pour $y \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$, notons $B(y,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre y de rayon ε. On commence par montrer, pour $\lambda > 0$ assez petit et pour toute partie borélienne bornée A de $\mathbb{R}^d$, l'existence d'une constante $C_1 = C_1(A)$ telle que, pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$,

$$(3.c) \qquad E\left[\int_A \mu(dy)\, \exp\left(\left(\frac{\lambda\mu(B(y,\varepsilon))}{\psi(\varepsilon)}\right)^{1/p}\right)\right] \leq C_1,$$

où la mesure μ est définie dans le théorème 2.1.

On peut supposer A ouvert. Pour tout entier $n \geq 1$ on a alors, avec les notations de la preuve du théorème 2.1,

$$E\left[\int_A \mu(dy)\, \mu(B(y,\varepsilon))^n\right] \leq \liminf_{\delta \to 0} E\left[\int_A \mu_\delta(dy)\, \mu_\delta(B(y,\varepsilon))^n\right]$$

$$= \liminf_{\delta \to 0} c(\delta)^{-(n+1)p} \int_{A \times (\mathbb{R}^d)^n} dy_0 \ldots dy_n$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} 1_{(|y_i - y_0| < \varepsilon)} \prod_{j=1}^{p} P\left[\bigcap_{i=0}^{n} \{y_i \in S_\delta^j\}\right]$$

$$= \int_{A \times (\mathbb{R}^d)^n} dy_0 \ldots dy_n \prod_{i=1}^{n} 1_{(|y_i - y_0| < \varepsilon)}$$

$$\times \prod_{j=1}^{p} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_n^0} u(y_{\sigma(0)} - x_j) \prod_{i=1}^{n} u(y_{\sigma(i)} - y_{\sigma(i-1)})\right)$$

où Σ_n^o désigne l'ensemble des permutations de $\{0,1,\dots,n\}$, et, pour passer à la dernière égalité, on a utilisé les estimations du lemme 2.3. En développant le produit sur j et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient la majoration :

$$E[\int_A \mu(dy)\ \mu(B(y,\varepsilon))^n]$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{((n+1)!)^p \int_{A_\varepsilon \times (\mathbb{R}^d)^n} dy_o\dots dy_n$$

$$\times\ u(y_o-x)^p \prod_{i=1}^{n} (1_{(|y_i-y_{i-1}|<2\varepsilon)} u(y_i-y_{i-1})^p)\}$$

$$\leq C\ ((n+1)!)^p\ \psi(2\varepsilon)^n,$$

pour une constante $C > 0$ dépendant seulement de A.
La majoration (3.c) est maintenant très facilement établie en développant l'exponentielle en série et en remarquant que $\psi(2\varepsilon) \leq 2^d\ \psi(\varepsilon)$.

On fixe ensuite $K > 0$ et, pour tout entier $k \geq 1$, on pose :

$$A_k = \{y \in A\ ;\ \mu(B(y,2^{-k})) \geq K(\log k)^p\ \psi(2^{-k})\}.$$

Remarquons que :

$$\int_A \mu(dy)\ \exp((\frac{\lambda\mu(B(y,2^{-k}))}{\psi(2^{-k})})^{1/p}) \geq \mu(A_k)\ k^{(\lambda K)^{1/p}}$$

d'où, en utilisant (3.c),

$$E[\mu(A_k)] \leq C_1\ k^{-(\lambda K)^{1/p}}.$$

En particulier, si K est choisi assez grand, on trouve que :

$$\text{P-p.s., } \mu(dy) \text{ p.s., } \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k}(y) < \infty,$$

ce qui entraîne aussitôt :

$$\text{(3.d)} \qquad \text{P-p.s., } \mu(dy) \text{ p.s., } \limsup_{\varepsilon\to 0} (\frac{\mu(B(y,\varepsilon))}{\psi^*(\varepsilon)}) \leq C_2$$

pour une constante C_2 ne dépendant que de p et de la loi des X^i (en fait de u seulement).
Le théorème découle maintenant de (3.d) en utilisant les théorèmes de densité pour les mesures de Hausdorff établis par Rogers et Taylor ([24], lemma 3). □

Remarque : On peut comparer les fonctions ϕ^* et ψ^* qui interviennent dans les énoncés des théorèmes 3.1 et 3.2. En reprenant les idées de la preuve du lemme 2.2 on obtient aisément que :

$$\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{d}\, c(\varepsilon)^{-p} \simeq \varepsilon^{-(p-1)d} \left(\int_{(|y|\leq\varepsilon)} u(y)dy\right)^{p}$$

où la notation $f \simeq g$ signifie qu'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que $K_1 f \leq g \leq K_2 f$. D'autre part l'inégalité de Hölder entraîne :

$$\varepsilon^{-(p-1)d} \left(\int_{(|y|\leq\varepsilon)} u(y)dy\right)^{p} \leq c_d \int_{(|y|\leq\varepsilon)} u(y)^{p}\, dy = c_d\, \psi(\varepsilon).$$

A titre d'application des résultats qui précèdent, nous allons établir le corollaire suivant, qui vérifie et précise la partie (i) de la conjecture D de Taylor [31]. Pour $0 < \alpha \leq 2$ et $d \geq 1$, on note $X^{\alpha,d}$ le processus stable symétrique d'indice α dans $\mathbb{R}^d$. D'après Taylor [29], la condition $p\alpha-d(p-1) > 0$ est nécessaire et suffisante pour l'existence de points de multiplicité p de la trajectoire de $X^{\alpha,d}$.

__Corollaire 3.3__ : *Supposons $\alpha < d$ et $\gamma = p\alpha - d(p-1) > 0$, et notons M_p l'ensemble des points de multiplicité p de la trajectoire de $X^{\alpha,d}$. Pour tout $x > 0$, soient :*

$$\phi_1(x) = x^{\gamma}$$

$$\phi_2(x) = x^{\gamma}\left(\log\log \frac{1}{x}\right)^{p}.$$

Alors, P-p.s.

(i) $\phi_1 - m(M_p) = 0$

(ii) $\phi_2 - m(M_p) = +\infty.$

__Preuve__ : Soient $X^1,\ldots,X^p$ p copies indépendantes de $X^{\alpha,d}$, avec des points de départ arbitraires, et soit I l'ensemble des points communs aux trajectoires de $X^1,\ldots,X^p$. Il suffit de montrer :

(i)' $\phi_1 - m(I) = 0$, P-p.s.,

(ii)' $P[\phi_2 - m(I) > 0] > 0$.

Comme $\alpha < d$, on sait que X est transient et que son noyau potentiel est de la forme :

$$u(x) = C\, |x|^{\alpha-d}$$

pour une certaine constante $C > 0$. On peut alors appliquer le théorème 3.2 à $X^1,\ldots,X^p$; avec les notations de ce théorème, on a :

$$\psi(\varepsilon) = \int_{|y|\leq\varepsilon} u(y)^{p}\, dy = C'\, \varepsilon^{\gamma},$$

d'où $\psi^* = C'\phi_2$, et donc le théorème 3.2 montre que :

$$\phi_2 - m(I) \geq C'' \mu(I),$$

pour une certaine constante $C'' > 0$. Comme $P[\mu(I) > 0] > 0$, on obtient (ii)'.

En vue de montrer (i)' on pourrait de même essayer d'appliquer le théorème 3.1. Comme on a ici $c(\varepsilon) = C\,\varepsilon^{d-\alpha}$, ce théorème entraîne, pour toute partie borélienne bornée B,

$$(3.e) \qquad \phi_1 - m(I \cap B) < \infty.$$

Comme nous avons besoin d'un peu plus que (3.e) nous allons procéder directement, en utilisant le résultat suivant dû à Taylor [30] : si $f_1(x) = x^\alpha \log\log 1/x$, on a, pour tout $t > 0$,

$$(3.f) \qquad f_1 - m(X^1(0,t)) < \infty, \quad \text{p.s.}$$

où, comme plus haut, on note $X^1(0,t) = \{X^1_s\ ;\ 0 \leq s \leq t\}$.

Posons $f_p(x) = x^{d-p(d-\alpha)} \log\log 1/x$. Nous allons montrer, pour tous $t \geq 0$, $r > 0$,

$$(3.g) \qquad f_p - m(X^1(0,t) \cap X^2(r,\infty) \cap \ldots \cap X^p(r,\infty)) < \infty, \quad \text{p.s.}$$

L'assertion (i)' découle ensuite aisément de (3.g), en faisant tendre t vers ∞ et r vers 0.

Afin de montrer (3.g) partons de (3.f) qui, par définition d'une mesure de Hausdorff, entraîne pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un recouvrement $(B^\varepsilon_i, i \in \mathbb{N})$ de $X^1(0,t)$ par des boules de diamètre inférieur à ε, tel que

$$(3.h) \qquad \sum_i f_1(\mathrm{diam}(B^\varepsilon_i)) \leq K,$$

où $K = K(\varepsilon)$ peut dépendre de ω, mais non de ε. On peut supposer que K et le recouvrement (B^ε_i) sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}^1$ engendrée par X^1. En appliquant la propriété de Markov au temps $r > 0$, et en remarquant que la densité de la loi de X^j_r est bornée par une constante, on obtient à l'aide de (2.a) que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j = 2,\ldots,p$,

$$(3.i) \qquad P[B^\varepsilon_i \cap X^j(r,\infty) \neq \emptyset \,/\, \mathcal{F}^1] \leq C_r(\mathrm{diam}(B^\varepsilon_i))^{\alpha-d},$$

pour une constante C_r dépendant de r. En combinant (3.h) et (3.i) on trouve :

$$E[\sum_i f_p(\mathrm{diam}(B^\varepsilon_i))1_{(B^\varepsilon_i \cap X^2(r,\infty)\cap\ldots\cap X^p(r,\infty)\neq\emptyset)} \,/\, \mathcal{F}^1] \leq K\, C^p_r$$

d'où, à l'aide du lemme de Fatou, P-p.s.,

$$(3.j) \qquad \liminf_{\varepsilon \to 0} \sum_i f_p(\mathrm{diam}(B^\varepsilon_i))\, 1_{(B^\varepsilon_i \cap X^2(r,\infty)\cap\ldots\cap X^p(r,\infty)\neq\emptyset)} < \infty.$$

Comme les B_i^ε tels que $B_i^\varepsilon \cap X^2(r,\infty) \cap \ldots \cap X^p(r,\infty) \neq \emptyset$ forment un recouvrement de $X^1(0,t) \cap X^2(r,\infty) \cap \ldots \cap X^p(r,\infty)$, (3.*j*) entraîne (3.*g*). Ceci termine la preuve du corollaire 3.3. □

Lorsque $\alpha > d$, cas qui ne peut se produire que si $d = 1$, le processus $X^{\alpha,d}$ visite tout point de $\mathbb{R}$ une infinité de fois. Il reste donc à étudier le cas $\alpha = d$ qui correspond au mouvement brownien plan $(d = 2)$ et au processus de Cauchy symétrique sur la droite $(d = 1)$. Le cas du mouvement brownien plan est traité en détail dans [17], où l'on montre que $f(x) = x^2(\log 1/x \log\log\log 1/x)^p$ est la (une) bonne fonction de mesure pour M_p, au sens où M_p est réunion dénombrable d'ensembles de f-mesure strictement positive et finie.

<u>Corollaire 3.4</u> : *Pour tout $p \geq 1$, soit M_p l'ensemble des points de multiplicité p de la trajectoire de $X^{1,1}$. Soient :*

$$\phi_1(x) = x(\log 1/x)^p \ (\log\log\log 1/x)^p$$

$$\phi_2(x) = x(\log 1/x)^p \ (\log\log 1/x)^p.$$

Alors, P-p.s.,

(i) M_p est réunion dénombrable d'ensembles de ϕ_1-mesure de Hausdorff finie,

(ii) $\phi_2 - m(M_p) = +\infty$.

<u>Preuve</u> : La première assertion est une conséquence facile du résultat analogue pour le mouvement brownien plan, rappelé ci-dessus, et du fait qu'on retrouve une trajectoire de processus de Cauchy symétrique en observant un mouvement brownien plan aux instants où il se trouve sur une droite fixée.

Pour montrer (ii) on applique le théorème 3.2 au processus $X^{1,1}$ tué à un temps exponentiel indépendant de paramètre λ. Le noyau potentiel du processus tué s'écrit :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{t}{t^2+x^2}\,dt \underset{|x|\to 0}{\sim} \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{|x|},$$

d'où, à l'aide du théorème 3.2, le résultat voulu. □

4. <u>POINTS DE MULTIPLICITE INFINIE DU PROCESSUS DE CAUCHY.</u>

Notre but dans cette partie est d'adapter les techniques de [16] pour résoudre la conjecture B de Taylor [31] concernant les points de multiplicité infinie du processus de Cauchy. Nous considérons un processus de Cauchy, i.e. un processus stable symétrique d'indice 1 à valeurs réelles, noté $(X_t, t \geq 0)$. Taylor [29] a montré que la trajectoire de X possède presque sûrement des points de multiplicité $\mathfrak{c}$, où $\mathfrak{c}$ désigne la puissance du continu. Nous cherchons ici à préciser la structure de l'ensemble des temps qui est l'image réciproque d'un point de multiplicité infinie.

Soient $p \geq 1$ un entier et $X^1,\ldots,X^p$ p copies indépendantes de X, avec des points de départ arbitraires. Notre premier objectif est de construire le temps local d'intersection de $X^1,\ldots,X^p$ vu comme une mesure, non plus sur les points d'intersection des trajectoires, mais sur l'ensemble des p-uplets $(t_1,\ldots,t_p)$ tels que $X^1_{t_1} =\ldots= X^p_{t_p}$. Formellement, nous cherchons à introduire la mesure

$$\beta(0,ds_1\ldots ds_p) = \delta_{(0)}(X^1_{s_1}-X^2_{s_2},\ldots,X^{p-1}_{s_{p-1}}-X^p_{s_p})ds_1\ldots ds_p, \tag{4.a}$$

où $\delta_{(0)}$ désigne la mesure de Dirac au point 0 de $\mathbb{R}^{p-1}$. La construction de β_p est possible au moyen des techniques employées par Geman, Horowitz, Rosen [8], dans le cas du mouvement brownien ou par Rosen [27] dans le cas de processus stables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

<u>*Théorème 4.1*</u> : *Il existe P-p.s. une unique famille $(\beta(x,\cdot), x \in \mathbb{R}^{p-1})$ de mesures de Radon sur $\mathbb{R}^p_+$ qui satisfait les deux propriétés suivantes :*

(i) l'application $x \to \beta(x,\cdot)$ est continue au sens de la topologie vague ;

(ii) pour toute partie borélienne B de $\mathbb{R}^p_+$ et toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}_+$,

$$\int_B f(X^1_{s_1}-X^2_{s_2},\ldots,X^{p-1}_{s_{p-1}}-X^p_{s_p})ds_1\ldots ds_p = \int_{\mathbb{R}^{p-1}} f(x)\ \beta(x,B)dx.$$

La mesure $\beta(0,\cdot)$ est diffuse et portée par $\{(t_1,\ldots,t_p)\ ;\ X^1_{t_1} =\ldots= X^p_{t_p}\}$.

De plus dans le cas particulier où $X^1,\ldots,X^p$ sont issus du même point on a :

$$\text{P-p.s., pour tout } \varepsilon > 0,\quad \beta(0,[0;\varepsilon]^p) > 0.$$

<u>Preuve</u> : Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la démonstration, et renvoyons le lecteur à [8] ou [27] pour les détails dans des situations très voisines. Nous cherchons à construire une mesure $\beta(x,\cdot)$ définie formellement par :

$$\beta(x,B) = \int_B \delta_{(x)}\ (X^1_{s_1}-X^2_{s_2},\ldots,X^{p-1}_{s_{p-1}}-X^p_{s_p})ds_1\ldots ds_p. \tag{4.b}$$

Une idée naturelle est de remplacer la mesure de Dirac $\delta_{(x)}$ par une approximation. Il est commode d'utiliser pour l'approximation la densité de transition du processus X : pour $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$,

$$p_t(y) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+y^2}.$$

On écrit donc, à la place de (4.b), pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(4.c) \qquad \beta_\varepsilon(x,B) = \int_B \prod_{i=1}^{p-1} p_\varepsilon(X^i_{s_i} - X^{i+1}_{s_{i+1}} - x_i)ds_1 \ldots ds_p,$$

où on a noté $x = (x_1,\ldots,x_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$. On se limite provisoirement à des pavés de $(\mathbb{R}_+)^p$, i.e. des sous-ensembles de la forme :

$$B = \prod_{i=1}^{p} [a_i \,;\, b_i]$$

où $0 \leq a_i \leq b_i < \infty$ $(i = 1,\ldots,p)$. Si B,B' sont deux pavés on définit la distance entre B et B' par :

$$d(B,B') = \sum_{i=1}^{p} (|a_i - a'_i| + |b_i - b'_i|).$$

<u>Lemme 4.2</u> : *On peut choisir $\gamma > 0$ assez petit de façon que, pour tout entier $k \geq 1$, pour tous $x,x' \in \mathbb{R}^{p-1}, \varepsilon,\varepsilon' \in]0\,;\,1[$ et tous pavés B,B'*

$$E[(\beta_\varepsilon(x,B) - \beta_{\varepsilon'}(x',B'))^{2k}] \leq C_{k,\gamma}(|\varepsilon-\varepsilon'| + |x-x'| + d(B,B'))^{\gamma k}$$

où la constante $C_{k,\gamma}$ dépend seulement de k et γ.

La preuve du lemme 4.2 sera laissée au lecteur. Une manière simple de procéder consiste à écrire $\beta_\varepsilon(x,B)$, resp. $\beta_{\varepsilon'}(x',B')$, comme la transformée de Fourier inverse de sa transformée de Fourier et ensuite à appliquer le théorème de Fubini. A nouveau des exemples de telles majorations peuvent être trouvés en [8] ou [27].

Le lemme 4.2 étant admis il est facile de compléter la preuve du théorème. La version multidimensionnelle du lemme de Kolmogorov permet d'abord de conclure à l'existence d'une version continue, et même höldérienne d'ordre $\gamma' < \gamma$, de

$$(\varepsilon,x,B) \to \beta_\varepsilon(x,B).$$

En particulier on peut définir sur un ensemble de probabilité 1, pour tous x,B,

$$\beta(x,B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon(x,B).$$

et $\beta(x,B)$ est fonction continue du couple (x,B). Ceci permet d'abord de prolonger pour tout $x \in \mathbb{R}^{p-1}$, l'application $B \to \beta(x,B)$ en une mesure sur $\mathbb{R}^p_+$. La propriété (i) découle ensuite de la continuité de l'application $x \to \beta(x,B)$ (B pavé). Pour (ii) on remarque d'abord qu'on peut se limiter au cas f continue bornée, B pavé, et on écrit :

$$\int_B f(X^1_{s_1} - X^2_{s_2}, \ldots, X^{p-1}_{s_{p-1}} - X^p_{s_p})ds_1 \ldots ds_p$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int f * p_\varepsilon(X^1_{s_1} - X^2_{s_2}, \dots, X^{p-1}_{s_{p-1}} - X^p_{s_p}) ds_1 \dots ds_p$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int dx\ f(x)\ \beta_\varepsilon(x,B)$$

$$= \int dx\ f(x)\ \beta(x,B).$$

La continuité de $B \to \beta(x,B)$ (B pavé) entraîne que $\beta(x,\cdot)$ est diffuse. La propriété de support découle aisément de (ii) et de la continuité de $x \to \beta(x,B)$. Enfin la dernière assertion est aisément établie à l'aide de la loi du tout ou rien. □

Pour alléger l'écriture, on note simplement $\beta(ds_1 \dots ds_p) = \beta(0, ds_1 \dots ds_p)$. Revenons maintenant à notre processus X de départ. Nous cherchons à définir un temps local d'intersection à l'ordre p de X avec lui-même, c'est-à-dire une mesure $\alpha_p(\cdot)$ sur $\mathcal{C}_p = \{(s_1,\dots,s_p) ; 0 \le s_1 < s_2 < \dots < s_p\}$, définie formellement par

$$\alpha_p(ds_1 \dots ds_p) = \delta_{(0)}(X_{s_1} - X_{s_2}, \dots, X_{s_{p-1}} - X_{s_p}) ds_1 \dots ds_p.$$

Considérons d'abord un sous-ensemble J de $\mathcal{C}_p$ de la forme

$$J = \prod_{i=1}^p [a_i ; b_i],$$

où $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_p < b_p$, et posons

$$\vec{J} = \prod_{i=1}^p [0 ; b_i - a_i]$$

On remarque alors que la loi de :

$$(X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_p} ; (s_1,\dots,s_p) \in J)$$

est équivalente à celle de

$$(X^1_{s_1-a_1}, X^2_{s_2-a_2}, \dots, X^p_{s_p-a_p} ; (s_1,\dots,s_p) \in J),$$

dès que $X^1,\dots,X^p$ sont p processus de Cauchy indépendants tels que, pour tout i, la loi de X^i_o ait une densité strictement positive par rapport à la mesure de Lebesgue. Or, le théorème 4.1 permet de donner un sens à la mesure sur $\vec{J}$ définie par

$$\beta^J(ds_1 \dots ds_p) = \delta_{(0)}(X^1_{s_1} - X^2_{s_2}, \dots, X^{p-1}_{s_{p-1}} - X^p_{s_p}) ds_1 \dots ds_p$$

et donc, par équivalence de loi, à la mesure sur J :

$$\alpha^J_p(ds_1 \dots ds_p) = \delta_{(0)}(X_{s_1} - X_{s_2}, \dots, X_{s_{p-1}} - X_{s_p}) ds_1 \dots ds_p.$$

Pour compléter la construction, on remarque qu'on peut écrire $\mathcal{C}_p$ comme la réunion d'une famille dénombrable $\{J\ ;\ J \in \mathcal{J}\}$ d'ensembles J de la forme ci-dessus, disjoints deux à deux, et on pose :

$$\alpha_p = \sum_{J \in \mathcal{J}} \alpha_p^J .$$

Avant d'énoncer la prochaine proposition, nous introduisons quelques notations. Soit C_1 l'espace des fonctions continues à droite limitées à gauche de $[0\ ;\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $0 \leqq u \leqq v \leqq 1$, on note ${}_uX_v$, resp. ${}_vX_u$, l'élément de C_1 défini par :

$${}_uX_v(t) = \begin{cases} X(u+t) & \text{si} \quad t < v-u \\ X(v) & \text{si} \quad t \geqq v-u, \end{cases}$$

resp.
$${}_vX_u(t) = \begin{cases} X(v-t) & \text{si} \quad t < v-u \\ X(u) & \text{si} \quad t \geqq v-u. \end{cases}$$

Pour $0 < a \leqq 1$, on appelle pont de Cauchy, de longueur a, un processus de Cauchy issu de 0 conditionné à valoir 0 à l'instant a, et arrêté à cet instant.

<u>*Proposition 4.3*</u> : *Pour toute partie borélienne B de $\mathcal{C}_p$ et toute fonction borélienne Φ de C_1^{p+1} dans $\mathbb{R}_+$,*

$$(4.e) \qquad E\left[\int_B \Phi({}_0X_{s_1}, {}_{s_1}X_{s_2}, \ldots, {}_{s_{p-1}}X_{s_p}, {}_{s_p}X_1)\, \alpha_p(ds_1 \ldots ds_p)\right]$$

$$= \int_B \frac{ds_1 \ldots ds_p}{\pi^{p-1}(s_2-s_1)\ldots(s_p-s_{p-1})} E[\Phi(U^{s_1}, L_1^{(s_2-s_1)}, \ldots, L_{p-1}^{(s_p-s_{p-1})}, V^{1-s_p})]$$

où U,V sont deux processus de Cauchy issus de 0, $L_i^{(s_{i+1}-s_i)}$ désigne, pour $i = 1,\ldots,p-1$, un pont de Cauchy de longueur $s_{i+1}-s_i$, les processus U,V, $L_i^{(s_{i+1}-s_i)}$ sont indépendants, enfin la notation U^a désigne le processus U arrêté au temps a :

$$U^a(t) = \begin{cases} U(t) & si \quad t \leqq a, \\ U(a) & si \quad t > a. \end{cases}$$

En particulier, si Γ est une partie de C_1^{p+1} telle que, $ds_1 \ldots ds_p$ p.s.,

$$(U^{s_1}, L_1^{(s_2-s_1)}, \ldots, L_{p-1}^{(s_p-s_{p-1})}, V^{1-s_p}) \in \Gamma, \qquad P\text{-p.s.}$$

on a : $\quad P$-p.s., $\alpha_p(ds_1 \ldots ds_p)$ p.s.,

$$({}_0X_{s_1}, {}_{s_1}X_{s_2}, \ldots, {}_{s_p}X_1) \in \Gamma.$$

<u>Preuve</u> : Une preuve formelle de la formule $(4.e)$ est obtenue en remplaçant $\alpha_p(ds_1 \ldots ds_p)$ par sa définition formelle $(4.d)$ et en appliquant, de manière abusive,

le théorème de Fubini. Pour une preuve rigoureuse, on remplace α_p par une approximation du type décrit plus haut et on passe à la limite. Nous renvoyons le lecteur à [16] pour les détails dans le cas brownien. La deuxième assertion de la proposition est obtenue en prenant $\Phi = 1_{\Gamma^c}$. □

Les résultats correspondant à la proposition 4.3 dans le cas brownien (théorème 2.2 et corollaire 2.3 de [16]) constituent l'outil essentiel de la preuve de l'existence de points de multiplicité infinie tels que l'ensemble des temps correspondants ait une structure d'ordre donnée. De même il est ici facile, à partir de la proposition 4.3, d'établir le résultat suivant :

<u>*Théorème 4.4*</u> : *Soit K une partie compacte totalement discontinue de $\mathbb{R}_+$. Il existe P-p.s. un point y de $\mathbb{R}$ tel que $X^{-1}(y)$ ait même structure d'ordre que K, au sens où l'on passe de l'un à l'autre par un homéomorphisme croissant.*

Nous ne détaillerons pas les arguments qui conduisent au théorème 4.4, car ce serait pour l'essentiel recopier la preuve du théorème 5.1 de [16] (notons cependant que les arguments de [16] utilisent, à un endroit précis, la continuité des trajectoires ; il est facile de voir qu'on peut remplacer cette propriété par le fait que les trajectoires sont continues sauf sur un ensemble dénombrable). Indiquons seulement, <u>de manière informelle</u>, le schéma de la preuve du théorème 4.4 dans le cas particulier où K est un ensemble de Cantor, i.e. compact, totalement discontinu, sans point isolé. L'idée est de construire, pour tout entier $n \geq 0$ une famille

$$(s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \ldots, s_{2^n}^{(n)}) \in \mathcal{C}_{2^n} \cap [0\ ;\ 1]^n$$

et un nombre $\varepsilon_n > 0$, de façon que les trois propriétés suivantes soient vérifiées : pour tout $n \geq 1$,

(i) pour tout $i = 1,\ldots,2^n$,

$$s_i^{(n)} - \varepsilon_n < s_{2i-1}^{(n+1)} < s_i^{(n)} < s_{2i}^{(n+1)} < s_i^{(n)} + \varepsilon_n\ ;$$

(ii) $\varepsilon_n < \frac{1}{3} \inf\{s_{i+1}^{(n)} - s_i^{(n)}\ ;\ 1 \leq i \leq 2^n - 1\}$;

(iii) $X(s_1^{(n)}) = X(s_2^{(n)}) = \ldots = X(s_{2^n}^{(n)}) = z_n$.

On part avec $s_1^{(0)} = 1/2$, $\varepsilon_0 = 1/2$. Supposons qu'on ait construit la famille $(s_i^{(n)})$ et ε_n, pour un $n \geq 0$. Grâce à la proposition 4.3 on peut alors procéder comme si les 2^{n+1} processus

$$_{s_i^{(n)}}X_{s_i^{(n)}-\varepsilon_n}\ ,\ _{s_i^{(n)}}X_{s_i^{(n)}+\varepsilon_n} \qquad (i = 1,\ldots,2^n)$$

étaient des processus de Cauchy indépendants issus de 0. En utilisant la dernière assertion du théorème 4.1 on trouve ainsi un point commun, autre que 0, aux trajectoires de ces processus, ce qui conduit à l'existence d'une famille $(s_i^{(n+1)}\ ;\ i = 1,\dots,2^{n+1})$ avec les propriétés voulues. On choisit ensuite ε_{n+1} pour que la propriété (ii) soit vérifiée et on continue.

Une fois qu'on a construit $(s_i^{(n)}\ ;\ n \geq 0, i = 1,\dots,2^n)$ on pose simplement

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{p=n}^{\infty} \{s_i^{(p)}\ ;\ i = 1,\dots,2^p\}} \right)$$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

où $\overline{F}$ désigne l'adhérence de F. Par construction, K est un ensemble de Cantor, et d'autre part X prend en tout point t de K la valeur z (notons que K ne peut pas contenir d'instant de discontinuité : avec probabilité 1, le processus ne visite pas un point de la forme $X(t-)$, t instant de discontinuité). On conclut donc que $X^{-1}(z)$ contient K. Avec un peu plus de travail, on aurait pu s'arranger pour que $X^{-1}(z)$ soit égal à K, et même traiter le cas d'un compact général. A nouveau nous renvoyons le lecteur à [16] pour les détails.

5. *LA MESURE DE PACKING DES POINTS MULTIPLES DU MOUVEMENT BROWNIEN.*

(5.1) Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et, pour tout entier $p \geq 1$, soit M_p l'ensemble des points de multiplicité p de la trajectoire de B. Notre objectif est, pour des fonctions $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bien choisies, de calculer la ϕ-mesure de packing de l'ensemble M_p. Nous renvoyons à Taylor-Tricot [32] pour la définition et les propriétés importantes des mesures de packing.

<u>Théorème 5.1</u> : *Soit $f :]0\ ;\ \infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante telle que $t \to t^p f(t)$ soit croissante, au moins pour t assez grand. Posons :*

$$\phi(t) = t^2 (\log \tfrac{1}{t})^p f(\log \tfrac{1}{t})$$

Alors, P-p.s.,

$$\phi - p(M_p) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \quad \text{selon que} \quad \sum_{n\geq 1} f(2^n) \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases}$$

où $\phi - p(M_p)$ désigne la ϕ-mesure de packing de M_p.

<u>Remarque</u> : Le cas $p = 1$ du théorème 5.1 (conjecture A de [31]) est établi dans [21]. La partie (i) de la conjecture C découle immédiatement du théorème 5.1.

<u>Preuve</u> : Commençons par traiter le cas $\sum_n f(2^n) = \infty$. Nous allons utiliser certains

des résultats de [17] et nous reprenons les notations de ce travail. On note ainsi α_p le temps local d'intersection à l'ordre p de B avec lui-même, c'est la mesure sur les p-uplets de temps $(s_1,\ldots,s_p)$ avec $s_1 < s_2 < \ldots < s_p$, définie formellement par

$$\alpha_p(A) = \int_A ds_1\ldots ds_p\ \delta_{(0)}(B_{s_2}-B_{s_1},\ldots,B_{s_p}-B_{s_{p-1}}).$$

Soit aussi ℓ_p l'image de la restriction de α_p à $[1\ ;\ 2]\times\ldots\times[2p-1\ ;\ 2p]$ par l'application $(s_1,\ldots,s_p)\to B_{s_1}$. La mesure ℓ_p est une mesure positive finie portée par M_p. On vérifie de plus que

$$E[\ell_p(\mathbb{R}^2)] = E[\alpha_p([1\ ;\ 2]\times\ldots\times[2p-1\ ;\ 2p])] > 0.$$

Nous allons montrer que, sous l'hypothèse $\Sigma f(2^n) = \infty$,

(5.*a*) $$\text{P-p.s.},\ \ell_p(dy)\ \text{p.s.},\quad \liminf_{a\to 0} \frac{\ell_p(B(y,a))}{\phi(a)} = 0,$$

où $B(y,a)$ désigne, comme plus haut, la boule de centre y de rayon a. Il découle de (5.*a*) et des théorèmes de densité pour les mesures de packing établis par Taylor Tricot [32] qu'on a :

$$\phi - p(M_p) = \infty \quad \text{sur l'ensemble} \quad \{\ell_p(M_p) > 0\},$$

d'où aisément : $\phi - p(M_p) = \infty$ p.s.

Montrons (5.*a*). On va d'abord remplacer (5.*a*) par un énoncé équivalent qui sera plus facile à vérifier. On considère p mouvements browniens indépendants $B^1,\ldots,B^p$, définis sur l'intervalle de temps $[-1,1]$ et valant 0 à l'instant 0 (de manière précise, on prend par exemple B'^1, B''^1, deux mouvements browniens indépendants issus de 0, et on pose $B^1_t = B'^1_t$ si $t \geq 0$, B''^1_{-t} si $t \leq 0$). Soit β_p le temps local d'intersection de $B^1,\ldots,B^p$: c'est la mesure sur $[-1,1]^p$ définie par :

$$\beta_p(A) = \int_A ds_1\ldots ds_p\ \delta_{(0)}(B^2_{s_2}-B^1_{s_1},\ldots,B^p_{s_p}-B^{p-1}_{s_{p-1}})$$

et soit λ_p l'image de β_p par l'application $(s_1,\ldots,s_p)\to B^1_{s_1}$. On va montrer :

(5.*b*) $$\liminf_{a\to 0} \frac{\lambda_p(B(0,a))}{\phi(a)} = 0,\quad \text{P-p.s.}$$

Compte-tenu des résultats de [16] (voir les arguments développés en [17] dans une situation comparable) les énoncés (5.*a*) et (5.*b*) sont équivalents. Pour montrer (5.*b*), nous utilisons le lemme suivant, qui est essentiellement une conséquence des résultats de [17].

<u>Lemme 5.2</u> : *Il existe une constante* $C > 0$, *et* p *carrés de processus de Bessel de dimension quatre, indépendants, notés* $U^1,\dots,U^p$, *tels que* :

$$\lim_{a\to 0} \frac{a^{-2}\,\lambda_p(B(0,a))}{U^1(\log \frac{1}{a})\dots U^p(\log \frac{1}{a})} = C, \quad p.s.$$

<u>Preuve</u> : Choisissons $\eta > 1$ et pour tout $n \geq 0$ posons $a_n = \eta^{-n}$. Pour tout $n \geq 1$ et pour $i = 1,\dots,p$, notons aussi N_n^i le nombre de montées du processus $|B^i|$ le long de $[a_n\,;\,a_{n-1}]$, sur l'intervalle de temps $[-1,1]$. Il découle du lemme 7 de [17] que, pour une certaine constante $A_p > 0$ et pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$(5.c) \qquad \lim_{n\to\infty} (\log \frac{1}{a_n})^{-p(1-\varepsilon)}(a_n^{-2}\,\lambda_p(B(0,a_n)) - A_p\,N_n^1 \dots N_n^p) = 0$$

avec convergence presque sûre. Pour tout $a > 0$ et pour $i = 1,\dots,p$, posons

$$V^i(a) = \int_{-1}^{1} 1_{(|B_s^i|\leq a)}\,ds.$$

D'après (5.c) appliqué avec $p = 1$ (ou bien Ray [23 , p. 441]) on a aussi :

$$(5.c') \qquad \lim_{n\to\infty} (\log \frac{1}{a_n})^{-(1-\varepsilon)}(a_n^{-2}\,V^i(a_n) - A_1\,N_n^i) = 0, \quad p.s.$$

D'autre part, il découle aisément de la proposition 1.1 de [13] (voir aussi le lemme 2 de [21]) que, pour $i = 1,\dots,p$,

$$(5.d) \qquad \lim_{a\to 0} \frac{a^{-2}\,V^i(a)}{U^i(\log \frac{1}{a})} = \frac{1}{2}, \quad p.s.$$

où les U^i, $i = 1,\dots,p$, sont comme dans l'énoncé du lemme ci-dessus. Comme U^i a la loi du carré de la norme d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^4$, on a aussi :

$$(5.e) \qquad \lim_{a\to 0} \frac{(\log \frac{1}{a})^{1-\varepsilon}}{U^i(\log \frac{1}{a})} = 0, \quad p.s. \quad (i = 1,\dots,p).$$

En utilisant à la fois (5.c'), (5.d) et (5.e) on obtient : pour $i = 1,\dots,p$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^i}{U^i(\log \frac{1}{a_n})} = \frac{1}{2A_1}, \quad p.s.$$

d'où, en revenant à (5.c) et en utilisant à nouveau (5.e),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{-2}\,\lambda_p(B(0,a_n))}{U^1(\log \frac{1}{a_n})\dots U^p(\log \frac{1}{a_n})} = \frac{A_p}{(2A_1)^p}, \quad p.s.$$

Il est facile de déduire l'assertion du lemme de ce dernier résultat : on remarque qu'on peut choisir η arbitrairement proche de 1 et on utilise le fait que, pour tout $\rho > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U^i((n+1)\rho)}{U^i(n\rho)} = 1, \quad \text{p.s.} \quad \square$$

Nous revenons maintenant à la preuve de $(5.b)$. Grâce au lemme 5.2 il suffit de montrer que, avec les notations de ce lemme,

$$\liminf_{a\to 0} \frac{U^1(\log 1/a)\ldots U^p(\log 1/a)}{(\log 1/a)^p\, f(\log 1/a)} = 0, \quad \text{p.s.}$$

soit encore :

$$(5.f) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{U^1(t)\ldots U^p(t)}{t^p\, f(t)} = 0, \quad \text{p.s.}$$

Or le test de Dvoretzky-Erdös [3] pour la vitesse de fuite du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ montre que, sous l'hypothèse $\Sigma\, f(2^n) = \infty$,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{U^1(t)}{t\, f(t)} = 0, \quad \text{p.s.}$$

On en déduit immédiatement $(5.f)$.

Passons au cas $\sum_n f(2^n) < \infty$. Ici les arguments sont très proches de ceux utilisés dans [21] pour le cas $p = 1$. On peut remplacer M_p par l'ensemble, noté I, des points d'intersection des trajectoires, sur l'intervalle de temps $[0;1]$, de p mouvements browniens indépendants $B^1,\ldots,B^p$. On peut même supposer, sans perte de généralité, que les lois de $B_0^1,\ldots,B_0^p$ ont une densité bornée par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Fixons $K > 0$ et pour tout entier $n \geqq 1$ soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des carrés semi-dyadiques de côté 2^{-n} contenus dans $[-K;K]^2$. Rappelons qu'on appelle semi-dyadique un carré de la forme :

$$A = \prod_{i=1}^{2} [a_i 2^{-n} \; ; \; (a_i+1)2^{-n}]$$

où $a_i \in \mathbb{Z} \cup (1/2 + \mathbb{Z})$. On note aussi $|A| = 2^{-n}$. Soit $\tilde{\mathcal{C}}_n = \bigcup_{q\geqq n} \mathcal{C}_q$. Nous allons montrer l'existence d'une suite $(\varepsilon_n(\omega))$ convergeant presque sûrement vers 0 et telle que, pour toute sous-famille $\mathcal{A}$ de $\tilde{\mathcal{C}}_n$ formée de carrés disjoints rencontrant I,

$$(5.g) \qquad \sum_{A\in\mathcal{A}} \phi(|A|) \leqq \varepsilon_n(\omega).$$

Les résultats généraux sur les mesures de packing [32] montrent que $(5.g)$ entraîne $\phi\text{-}p(I) = 0$. Il reste donc à établir $(5.g)$. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{C}}_n$ formé de carrés disjoints et qui rencontrent I. Si $A \in \mathcal{A}$ est un carré de côté 2^{-q}, on remplace A par les carrés dyadiques ou semi-dyadiques de côté 2^{-2^k} contenus dans A, où k est choisi tel que $2^{k-1} < q \leq 2^k$. En utilisant le fait que :

$$\phi(2^{-q}) \leq 2^{2(2^k-q)}\, \phi(2^{-2^k}),$$

on obtient ainsi la majoration, si d est la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$,

$$(5.h) \qquad \sum_{A \in \mathcal{A}} \phi(|A|) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{A \in \mathcal{C}_{2^k}} \phi(2^{-2^k}) 1_{(d(A,I) \leq 2^{-2^{k-1}})}$$

où m a été choisi tel que $2^{m-1} < n \leq 2^m$. Il est important de remarquer ici que le terme de droite de $(5.h)$ ne dépend plus de $\mathcal{A}$, mais seulement de m. Notons η_m ce terme de droite et évaluons

$$E[\eta_m] = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{A \in \mathcal{C}_{2^k}} \phi(2^{-2^k})\, P[d(A,I) \leq 2^{-2^{k-1}}] \leq C \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{A \in \mathcal{C}_{2^k}} \phi(2^{-2^k}) 2^{pk}$$

(la majoration simple $P[d(A,I) \leq 2^{-2^{k-1}}] \leq C\, 2^{pk}$ découle de ce que $B_0^1,\dots,B_0^p$ ont une densité bornée, et, par exemple, des résultats de [14]). On obtient :

$$E[\eta_m] \leq C' \sum_{k=m}^{\infty} 2^{2^{k+1}}\, 2^{pk}\, \phi(2^{-2^k})$$

$$= C' (\log 2)^p \sum_{k=m}^{\infty} f(2^k \log 2)$$

L'hypothèse sur f montre que $E[\eta_m] \to 0$. Comme la suite η_m est décroissante on conclut que η_m converge p.s. vers 0 ce qui était le résultat recherché. □

(5.2) Nous passons maintenant à l'étude de la mesure de packing des points doubles du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Nous nous proposons de montrer le théorème suivant, qui infirme la partie (ii) de la conjecture C.

<u>*Théorème 5.3*</u> : *Soient B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$ et M_2 l'ensemble des points doubles de la trajectoire de B. Pour tout $\alpha > 0$ posons :*

$$h_\alpha(x) = x(\log \tfrac{1}{x})^{-\alpha}.$$

Alors,

(i) il existe $\alpha > 0$ tel que

$$h_\alpha - p(M_2) = +\infty, \quad P\text{-p.s.}$$

(ii) pour tout $\alpha > 1$,

$$h_\alpha - p(M_2) = 0, \quad P\text{-p.s.}$$

<u>Preuve</u> : La partie difficile du théorème est (i), aussi commençons-nous par montrer

(ii). Il suffit de montrer que, si B, B' sont deux mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^3$ et si I désigne l'ensemble des points d'intersection de leurs trajectoires sur l'intervalle de temps $[0;1]$, on a, pour tout $\alpha > 1$, P-p.s.,

$$h_\alpha - p(I) = 0.$$

Il est clairement suffisant d'établir que :

$$h_\alpha - p(I \cap \{y \ ; \ |y| \leq 1\}) = 0.$$

Pour tout entier n, notons $(C_p^{(n)}, p = 0,1,2,\ldots)$ la famille (finie) des cubes semi-dyadiques de côté 2^{-n} qui rencontrent la boule unité. Remarquons que :

$$E[\sum_p h_\alpha(\mathrm{diam}(C_p^{(n)}))\, 1_{(C_p^{(n)} \cap I \neq \emptyset)}] \leq C\, 2^{-n}\, n^{-\alpha}\, E[\sum_p 1_{(C_p^{(n)} \cap I \neq \emptyset)}]$$

et d'autre part des estimations faciles (voir par exemple [14]) montrent que :

$$E[\sum_p 1_{(C_p^{(n)} \cap I \neq \emptyset)}] \leq C'\, 2^n.$$

En sommant sur n on conclut que : P-p.s.,

$$\sum_n \sum_p h_\alpha(\mathrm{diam}(C_p^{(n)}))\, 1_{(C_p^{(n)} \cap I \neq \emptyset)} < \infty$$

Revenant aux différentes caractérisations des mesures de packing données dans [32], on obtient que :

$$h_\alpha - p(I \cap \{y \ ; \ |y| \leq 1\}) = 0.$$

Nous passons maintenant à la preuve de (i). Comme en (5.2) on introduit le temps local d'intersection de B avec lui-même, défini formellement par :

$$\alpha_2(A) = \int_A ds\, dt\, \delta_{(0)}(B_s - B_t) \qquad (A \subset \{(s,t) \ ; \ s < t\}).$$

On note ℓ_2 l'image de la restriction de α_2 à $[0;1] \times [1;2]$ par l'application $(s,t) \to B_s$. En utilisant le théorème 5.4 de [32] on se ramène à vérifier que, pour $\alpha > 0$ assez petit,

$$\text{(5.}i\text{)} \qquad \text{P-p.s.}, \ \ell_2(dy) \ \text{p.s.}, \ \liminf_{a \to 0} \frac{\ell_2(B(y,a))}{h_\alpha(a)} = 0.$$

Comme il s'agit là d'un énoncé à vérifier $\ell_2(dy)$ p.s., nous pouvons, comme plus haut dans le cas $d = 2$, nous ramener au problème suivant. Soient W et W' deux mouvements browniens indépendants, définis sur $\mathbb{R}$ tout entier, valant 0 à l'instant 0. Soit β_2 le temps local d'intersection de W et W', i.e. la mesure sur $\mathbb{R}^2$ définie formellement par :

$$\beta_2(A) = \int_A ds\, dt\, \delta_{(0)}(W_s - W'_t).$$

et soit λ_2 l'image de β_2 par l'application $(s,t) \to W_s$. Il suffit pour montrer (5.*i*) de vérifier que :

(5.*j*) $$\text{P-p.s.,} \quad \liminf_{a \to 0} \frac{\lambda_2(B(0,a))}{h_\alpha(a)} = 0.$$

Rappelons maintenant, d'après [17], que P-p.s. il existe une constante C_ω telle que, pour tout $a \leq 1/4$,

(5.*k*) $$\lambda_2(B(0,a)) \leq C_\omega \, a(\log \log \tfrac{1}{a})^2.$$

Nous allons établir que, pour des valeurs de a arbitrairement petites, on a :

(5.*ℓ*) $$\lambda_2(B(0,a)) = \lambda_2(B(0,a(\log \tfrac{1}{a})^{-\beta})),$$

où le choix de $\beta > 0$ sera précisé plus loin. En combinant (5.*k*) et (5.*ℓ*) on obtient que, pour tout $\alpha < \beta$, il existe des valeurs de a arbitrairement petites telles que :

$$\lambda_2(B(0,a)) \leq a(\log \tfrac{1}{a})^{-\alpha}$$

ce qui entraîne (5.*j*). Il ne reste plus maintenant qu'à montrer (5.*ℓ*). Or (5.*ℓ*) découle immédiatement du lemme suivant :

<u>Lemme 5.4</u> : *Soit J l'ensemble des points d'intersection des trajectoires de W et W'. Pour tout $\beta > 0$ assez petit, il existe P-p.s. des valeurs de a arbitrairement petites telles que :*

$$J \cap (B(0,a) - B(0,a(\log \tfrac{1}{a})^{-\beta})) = \emptyset.$$

<u>Preuve</u> : Dans le but d'alléger les notations, nous nous contenterons de montrer une forme affaiblie du lemme 5.4. Nous prendrons pour J non pas l'ensemble des points d'intersection des trajectoires de W et W', mais l'ensemble des points d'intersection de ces trajectoires restreintes à $\mathbb{R}_+$ (rappelons que W, W' sont définis sur $\mathbb{R}$ tout entier). L'énoncé affaibli qu'on obtient ainsi n'est pas suffisant pour nos applications ; cependant il sera clair que notre méthode de démonstration permettrait aussi bien, quitte à changer la valeur de β, d'établir l'énoncé précis du lemme 5.3. Nous commençons par quelques notations. Pour tout entier $k \geq 0$ on pose

$$L_k = \sup\{t \geq 0 \; ; \; |W_t| = 2^{-k}\}$$

$$L'_k = \sup\{t \geq 0 \; ; \; |W'_t| = 2^{-k}\}.$$

On note simplement $L = L_0$, $L' = L'_0$. Rappelons quelques résultats classiques concernant la décomposition en skew-product du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ ([11], p. 270) et le retournement du processus de Bessel de dimension trois ([33]). On a, pour tout $0 \leq t \leq L$, resp. $0 \leq t \leq L'$,

$$W_{L-t} = B_t \cdot \Omega(H_t), \quad W'_{L'-t} = B'_t \cdot \Omega'(H'_t),$$

où B, resp. B', est un mouvement brownien linéaire issu de 1, arrêté au premier instant où il atteint 0, Ω, resp. Ω', est un mouvement brownien sur la sphère S^2 indépendant de B, resp. B', partant avec la loi uniforme sur S^2, et :

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{B_s^2} \quad (0 \leq t < L),$$

$$H'_t = \int_0^t \frac{ds}{{B'_s}^2} \quad (0 \leq t < L').$$

Il découle en particulier de cette représentation que le processus $(W_{L-t}; 0 \leq t < L)$ est markovien. Remarquons que les temps $L-L_k$ $(k \geq 0)$ sont des temps d'arrêt pour la filtration de ce processus retourné. Choisissons maintenant $\alpha \in]0;\pi/2[$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ notons $\mathcal{C}(z)$ le cône de demi-angle α, de sommet 0 et d'axe contenant z:

$$\mathcal{C}(z) = \{y \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (y,z) \geq \cos(\alpha) \ |y| \ |z|\},$$

où (y,z) est le produit scalaire usuel. L'idée de la preuve du lemme est d'étudier pour $m \geq k \geq 1$ la probabilité de l'ensemble

$$A_{k,m} = \{W(L_m,L_k) \subset \mathcal{C}(W_{L_k}) \ ; \ W'(L'_m,L'_k) \subset \mathcal{C}(W'_{L'_k}); \mathcal{C}(W_{L_k}) \cap \mathcal{C}(W'_{L'_k}) = \emptyset\}.$$

Si on applique la propriété de Markov aux processus retournés, on trouve :

$$(5.m) \qquad P[A_{k,m} / \bar{\mathcal{F}}_{L_k} \vee \bar{\mathcal{F}}_{L'_k}] = 1_{\{\mathcal{C}(W_{L_k}) \cap \mathcal{C}(W'_{L'_k}) = \emptyset\}} \times P[W(L_m,L_k) \subset \mathcal{C}(W_{L_k})]^2,$$

où on a noté $\bar{\mathcal{F}}_{L_k}$, resp. $\bar{\mathcal{F}}'_{L'_k}$, la tribu engendrée par $(W_{L-s} \ ; \ 0 \leq s \leq L-L_k)$, resp. $(W'_{L'-s} \ ; \ 0 \leq s \leq L'-L'_k)$. Or, d'une part l'indépendance de B et Ω, resp. B' et Ω', entraîne pour tout $k \geq 1$,

$$(5.n) \qquad P[\mathcal{C}(W_{L_k}) \cap \mathcal{C}(W'_{L'_k}) = \emptyset / \bar{\mathcal{F}}_{L_{k-1}} \vee \bar{\mathcal{F}}'_{L'_{k-1}}] \geq \delta$$

pour une certaine constante $\delta > 0$, d'autre part des minorations faciles montrent l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$(5.o) \qquad P[W(L_m,L_k) \subset \mathcal{C}(W_{L_k})] \geq C^{m-k}.$$

En combinant (5.n) et (5.o) et en revenant à (5.m) on obtient pour tous $m > k \geq 1$,

$$(5.p) \qquad P[A_{k,m} / \bar{\mathcal{F}}_{L_{k-1}} \vee \bar{\mathcal{F}}'_{L'_{k-1}}] \geq \delta\, C^{2(m-k)}.$$

En appliquant (5.p) et la propriété de Markov pour les processus retournés, on obtient que pour tous $k \geq 2$, $h \geq 1$,

$$P[\bigcap_{i=0}^{h-1} (A_{ik+1,(i+1)k})^c] \leq (1 - \delta\, C^{2(k-1)})^h.$$

Prenons maintenant h de la forme $h = M^k$, où l'entier M est choisi tel que $MC^2 > 1$. On trouve :

$$\sum_{k=2}^{\infty} P[\bigcap_{i=0}^{M^k-1} (A_{ik+1,(i+1)k})^c] < \infty .$$

Le lemme de Borel-Cantelli permet donc de conclure que, presque sûrement pour tout k assez grand, il existe un entier n appartenant à $[0;k(M^k-1)]$ et tel que :

$$W(L_{n+k},L_n) \subset \mathcal{C}(W_{L_n}), W'(L'_{n+k-1},L'_n) \subset \mathcal{C}'(W'_{L'_n}) \text{ , } \mathcal{C}(W_{L_n}) \cap \mathcal{C}'(W_{L'_n}) = \emptyset,$$

donc en particulier :

$$W(L_{n+k-1},L_n) \cap W'(L'_{n+k-1},L'_n) = \emptyset.$$

En changeant les notations, on peut encore traduire les considérations précédentes comme suit : il existe une constante $c > 0$ telle que, P-p.s., pour des valeurs de n arbitrairement grandes,

$$(5.q) \qquad W(L_{n+[c \log n]},L_n) \cap W'(L'_{n+[c \log n]},L'_n) = \emptyset$$

($[c \log n]$ désigne la partie entière de $c \log n$). On voit que (5.q) est très proche de l'énoncé recherché, à ceci près que nous aimerions, par exemple, remplacer $W(L_{n+[c \log n]},L_n)$ par :

$$W(0;L) \cap (B(0,2^{-n}) - B(0,2^{-(n+ c[\log n])})),$$

quitte éventuellement à changer c. Ce remplacement ne pose pas de difficultés : soient $E = E(\omega)$ l'ensemble des valeurs de n telles que (5.q) soit vérifié, et $\tilde{E} = \tilde{E}(\omega)$ l'ensemble des valeurs de n telles que

$$W(0;L) \cap W(0;L') \cap (B(0,2^{-n}) - B(0,2^{-(n+ c[\log n]-1)})) = \emptyset$$

En appliquant la propriété de Markov aux processus retournés W_{L-t} et $W'_{L'-t}$, respectivement aux instants $L_{n+[c \log n]}$ et $L'_{n+[c \log n]}$, on trouve que

$$P[n\in \tilde{E}(\omega)/n\in E(\omega)]\geq P[\sup\{|W_s|,s\leq L_{n+[c\log n]}\}\leq 2^{-(n+c[\log n]-1)}]^2 = \frac{1}{4}.$$

Il est ensuite aisé de conclure que puisque $E(\omega)$ contient une infinité de valeurs de n, il doit en être de même pour $\tilde{E}(\omega)$. Ceci termine la preuve du lemme 5.4. □

Remarque : Considérons le processus stable symétrique d'indice α dans $\mathbb{R}^d$, noté $X^{\alpha,d}$ comme dans la partie 3. Soit M_p l'ensemble des points de multiplicité p de la trajectoire de $X^{\alpha,d}$. Supposons $\alpha < d$ et $\gamma = p\alpha - (p-1)d > 0$. Alors la méthode employée pour l'assertion (ii) du théorème 5.2 montre aussi que, si

$$h_{\gamma,\beta}(x) = x^\gamma (\log 1/x)^{-\beta},$$

on a :

$$h_{\gamma,\beta} - p(M_p) = 0 \qquad \text{pour } \beta > 1.$$

6. REMARQUES.

(6.1) Il serait intéressant de pouvoir "localiser" le résultat du théorème 2.1 de la manière suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $j = 1,\dots,p$ considérons la saucisse de rayon ε associée à X^j sur l'intervalle $[0;t]$:

$$S^j_\varepsilon(0;t) = \bigcup_{0\leq s\leq t} (X^j_s + B(0,\varepsilon)).$$

Alors, avec les notations du théorème 2.1, il semble très plausible qu'on ait, pour tous $t_1,\dots,t_p \geq 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)^{-p}\, m(S^1_\varepsilon(0;t_1)\cap\dots\cap S^p_\varepsilon(0;t_p)) = \mu(X^1(0;t_1)\cap\dots\cap X^p(0;t_p)), \tag{6.a}$$

de plus on devrait pouvoir identifier, à une constante multiplicative près, le membre de droite de *(6.a)* avec le temps local d'intersection usuel, (i.e. vu comme une mesure sur les p-uplets de temps) de $X^1,\dots,X^p$ sur le produit $[0;t_1]\times\dots\times[0;t_p]$:

$$\mu(X^1(0;t_1)\cap\dots\cap X^p(0;t_p)) \tag{6.b}$$

$$= C\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_p} ds_1\dots ds_p\, \delta_{(0)}(X^1_{s_1}-X^2_{s_2},\dots,X^{p-1}_{s_{p-1}}-X^p_{s_p}).$$

Nous renvoyons le lecteur à [4] pour une définition du membre de droite de (6.b) (voir aussi [6] pour de nombreuses références). Dans le cas brownien, (6.a) et (6.b) découlent des résultats de [14].

Au moins dans le cas des processus stables symétriques, et sans doute plus généralement pour certains processus de Lévy dont le temps local d'intersection peut être renormalisé, les résultats *(6.a)* et *(6.b)* pourraient permettre d'obtenir des théorèmes de fluctuation pour le volume de la saucisse, du type suivant. Pour fixer les idées, prenons pour X un processus stable symétrique d'indice $\beta > 4/3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (on aura des résultats analogues pour des processus à valeurs réelles). Soit $S_\varepsilon(0;t)$ la saucisse de rayon ε associée à X sur l'intervalle $[0;t]$. Alors, en adaptant les techniques de [18], on devrait pouvoir montrer, à partir de *(6.a)* et *(6.b)* :

(6.c)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)^{-2} \left(m(S_\varepsilon(0,1)) - E(m(S_\varepsilon(0,1)))\right)$$
$$= - C \int_{0\leq s<t\leq 1} ds\, dt\, \left(\delta_{(0)}(X_s-X_t) - E(\delta_{(0)}(X_s-X_t))\right),$$

où le membre de droite est un temps local d'intersection renormalisé défini, dans le cas des processus stables, par Rosen [27]. L'assertion *(6.c)* est d'autant plus plausible que des analogues discrets de ce résultat, concernant le nombre de points visités par une marche aléatoire plane, ont été établis en [15] et [20].

(6.2) Le cas du mouvement brownien plan montre que la bonne fonction de mesure pour l'ensemble des points d'intersection, si elle existe, peut être une fonction intermédiaire entre la fonction ϕ^* du théorème 3.1 et la fonction ψ^* du théorème 3.2. Notons cependant que ψ^* fournit la bonne fonction de mesure dans le cas du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Au vu des résultats de [17] et de ceux de la section 3 il est logique de conjecturer que la bonne fonction de mesure pour l'ensemble des points de mulplicité p du processus $X^{\alpha,d}$ soit :

- si $\alpha < d$, $\gamma = p\alpha - d(p-1) > 0$,

$$h(x) = x^\gamma (\log\log 1/x)^p$$

- si $\alpha = d$,

$$h(x) = x^d (\log 1/x \quad \log\log\log 1/x)^p.$$

(6.3) Il semble également très plausible que les résultats de la partie 4 puissent être étendus à d'autres processus de Lévy, par exemple ceux qui vérifient les hypothèses de la partie 2 et pour lesquels

$$\int_{B(0;1)} u(x)^p\, dx < \infty,$$

pour tout entier $p \geq 0$ (comme nous l'avons vu plus haut, cette condition suffit à assurer l'existence de points de multiplicité p, pour tout entier p).

(6.4) Terminons par quelques remarques sur la mesure de packing de l'ensemble des points doubles du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Il serait très intéressant de pouvoir déterminer l'unique valeur de β telle que

- si $\alpha > \beta$, $h_\alpha - p(M_2) = 0$

- si $\alpha < \beta$, $h_\alpha - p(M_2) = +\infty$,

où on a repris les notations du théorème 5.3. Au vu des arguments développés dans la preuve du lemme 5.4, il semble que la détermination de β soit liée au problème suivant posé à l'auteur par M. Aizenman [1] : étant donnés deux mouvements browniens indépendants W, W' dans $\mathbb{R}^3$, tels que $|W_o - W'_o| = 1$, peut-on trouver un équivalent quand t tend vers l'infini de la probabilité $P[W(0;t) \cap W'(0;t) = \emptyset]$, ou, plus simplement, peut-on calculer

$$\gamma = \limsup_{t \to \infty} \frac{\log P[W(0;t) \cap W'(0;t) = \emptyset]}{\log t} \ ?$$

REFERENCES :

[1] AIZENMAN, M. Communication personnelle.

[2] BLUMENTHAL, R.M. ; GETOOR, R.K. Markov processes and potential theory. Academic Press, New-York, 1968.

[3] DVORETZKY, A. ; ERDÖS, P. Some problems on random walk in space. Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, 1951, p. 353-367.

[4] DYNKIN, E.B. Additive functionals of several time-reversible Markov processes. J. Funct. Anal. 42 (1981), 64-101.

[5] DYNKIN, E.B. Random fields associated with multiple points of the Brownian motion. J. Funct. Anal. 62 (1985), 397-434.

[6] DYNKIN, E.B. Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. A paraître dans Ann. Probab. (1987).

[7] EVANS, S.N. Potential theory for a family of several Markov processes. A paraître aux Ann. Inst. Henri Poincaré (1987).

[8] GEMAN, D. ; HOROWITZ, J. ; ROSEN, J. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Ann. Probab. 12 (1984), 86-107.

[9] HAWKES, J. Potential theory of Lévy processes. Proc. London Math. Soc. (3) (1979), 335-352.

[10] HAWKES, J. Multiple points for symmetric Lévy processes. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 83 (1978), 83-90.

[11] ITÔ, K. ; Mc KEAN, H.P. Diffusion processes and their sample paths. Second Printing. Springer - Verlag, Berlin, 1974.

[12] KESTEN, H. Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments. Mem. Amer.Math. Soc. 93 (1969).

[13] LE GALL, J.F. Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. Séminaire de Probabilités XIX. Lect. Notes in Math. 1123. Springer - Verlag, Berlin, 1985, p. 297-313.

[14] LE GALL, J.F. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Ann. Probab. 14 (1986).

[15] LE GALL, J.F. Propriétés d'intersection des marches aléatoires, I. Comm. Math. Phys. 104 (1986), 471-507.

[16] LE GALL, J.F. Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. J. Funct. Anal. 70 (1987).

[17] LE GALL, J.F. The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points. A paraître dans le Seminar on Stochastic Processes 1986. Birkhäuser.

[18] LE GALL, J.F. Fluctuation results for the Wiener sausage. Preprint (1986), soumis à Ann. Probab.

[19] LE GALL, J.F. ; ROSEN, J. ; SHIEH, N.R. Multiple points for Lévy processes. Preprint (1986).

[20] LE GALL, J.F. ; ROSEN, J. Limit theorems for random walks in the domain of attraction of a stable law. Article en préparation.

[21] LE GALL, J.F. ; TAYLOR, S.J. The packing measure of planar Brownian motion. A paraître dans le Seminar on Stochastic Processes 1986. Birkhäuser.

[22] NEVEU, J. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson, Paris 1970.

[23] RAY, D. Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 436-444.

[24] ROGERS, C.A. ; TAYLOR, S.J. Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure. Mathematika 8 (1961), 1-31.

[25] ROSEN, J. A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. Comm. Math. Phys. 88 (1983), 327-338.

[26] ROSEN, J. Joint continuity of the intersection local times of Markov processes. A paraître dans Ann. Probab. (1987).

[27] ROSEN, J. Continuity and singularity of the intersection local time of stable processes in $\mathbb{R}^2$. Preprint (1985).

[28] SZNITMAN, A.S. Some bounds and limiting results for the measure of Wiener sausage of small radius associated to elliptic diffusions. Preprint (1986).

[29] TAYLOR, S.J. Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. Z. Wahrsch. verw. Gebiete 5 (1966), 247-264.

[30] TAYLOR, S.J. Sample path properties of a transient stable process. J. Math. Mech. 16 (1967), 1229-1246.

[31] TAYLOR, S.J. The measure theory of random fractals. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1986), 383-406.

[32] TAYLOR, S.J. ; TRICOT, C. Packing measure and its evaluation for a Brownian path. Trans. Amer. Math. Soc. 288 (1985), 679-699.

[33] WILLIAMS, D. Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, I. Proc. London Math. Soc (3) 28 (1974), 738-768.

[34] WOLPERT, R. Wiener path intersections and local time. J. Funct. Anal. 30 (1978), 329-340.

[35] YOR, M. Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Séminaire de Probabilités XX. Lect. Notes in Math. 1204. Springer - Verlag, Berlin, 1986, p. 532-542.