SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN

Temps locaux et intégration stochastique pour les processus de Dirichlet

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 191-205

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__191_0>

TEMPS LOCAUX ET INTEGRATION STOCHASTIQUE POUR LES PROCESSUS DE DIRICHLET

Jean BERTOIN(*)

0. INTRODUCTION.

Föllmer ([3]) montre que l'on peut définir une intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} f(X_t)dX_t$ pour f de classe C^1 et X processus de Dirichlet, qui n'est pas une semi-martingale, mais somme d'une martingale et d'un processus à variation quadratique nulle, et il obtient une formule d'Itô.

Une question naturelle se pose : peut-on étendre cette intégration pour les processus de Dirichlet à une classe plus grande de fonctions f, en vue d'obtenir une formule de Tanaka ? L'existence des temps locaux pour les processus de Dirichlet qui en découlerait, serait-elle même intéressante (Geman - Horowitz [4]).

Dans le § 1, on montre l'équivalence de l'existence de la densité d'occupation dans $L^2(\mathbb{R})$ avec l'extension par continuité de l'intégration de Föllmer à f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, et on en déduit une formule de Tanaka presque sûre.

Dans le § 2, en calculant la variation quadratique de $(f(X),X)$ par rapport à une certaine suite de subdivision d'arrêt, on s'aperçoit qu'une condition (M.D.2), portant sur le nombre de montées et de descentes de X entre a et b nous donne l'existence d'une densité $\ell^a(X)$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times da)$ de la mesure d'occupation par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (L.T.2.) . Cette condition nous amène à étendre la notion de processus de Dirichlet forts en X-processus de Dirichlet, que nous étudions.

Dans le § 3, on prouve que l'hypothèse (M.D.2) nous permet de voir l'extension de l'intégration stochastique à $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ comme limite de sommes de Riemann, cette méthode nous donnant également, comme Bouleau - Yor ([2]) une extension de la formule d'Itô.

I. TEMPS LOCAL SANS PROBABILITES.

Föllmer ([3]) établit le résultat suivant :

Si τ_n est une suite de subdivisions de $[0,1]$ dont le pas tend vers zéro, si $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une application continue, telle que la suite de mesures

(*) 19, avenue de Choisy - 75013 PARIS

$\sum_{\tau_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \, \delta_{t_i}$ converge étroitement, vers une mesure que l'on note $d\langle X\rangle_t$ quand n tend vers l'infini (δ_{t_i} désigne la masse de Dirac en t_i), alors la suite $\sum_{\tau_n} f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ converge pour toute f de classe C^2 vers une quantité que l'on note $\int_0^1 f'(X_s)dX_s$, et on a la formule d'Itô :

$$f(X_1) = f(X_0) + \int_0^1 f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(X_s)d\langle X\rangle_s .$$

Sous ces hypothèses, on a alors la :

<u>*Proposition 1.1*</u> : *L'intégrale de Föllmer,* $\int_0^1 g(X_s)dX_s$ *définie pour toute* g *de classe* C^1 *se prolonge en une forme linéaire continue sur* $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ *si et seulement si la mesure d'occupation* μ : $\mu(h) = \int_0^1 h(X_s)d\langle X\rangle_s$ *admet une densité* $\ell_1^a(X)$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$ *par rapport à la mesure de Lebesgue.*

<u>Preuve</u> : a) Si μ admet une densité $\ell_s^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ l'application

$$g' \to \int_0^1 g'(X_s)dX_s = g(X_1) - g(X_0) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g''(a)\ell_1^a(X)da$$

est alors une forme linéaire continue pour la norme de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, et comme l'espace des fonctions de classe C^1 est dense dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, l'intégrale de Föllmer se prolonge donc à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

b) Réciproquement si $g \to \int_0^1 g(X_s)dX_s$ est un prolongement de l'intégrale de Föllmer à $g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, considérons $\phi : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\phi(f) = 2[F(X_1) - F(X_0) - \int_0^1 F'(X_s)dX_s]$$

où $F' = f$. ϕ est alors une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$ et il existe $\ell_1^a(X) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour toute f de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,\ell_1^a(X)da.$$

Or pour toute f continue, $\phi(f) = \int_0^1 f(X_s)d\langle X\rangle_s$ par la formule d'Itô, de sorte que $\ell_1^a(X)$ est bien la densité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si μ admet une densité $\ell_1^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, alors, pour tout $t \leq 1$, la mesure $\mu_t : \mu_t(h) = \int_0^t h(X_s)d\langle X\rangle_s$ est encore absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et admet une densité $\ell_t^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Geman - Horowitz ([4]) montrent que l'on peut choisir une version $(\ell_t^a \; ; \; a \in \mathbb{R} \; ; \; t \in [0,1])$ telle que pour tout a, $t \to \ell_t^a$ est une fonction croissante en t, qui ne croit que sur $\{t : X_t = a\}$.

A ce ℓ_t^a correspond une formule de Tanaka :

<u>*Proposition 1.2*</u> *: Sous les hypothèses précédentes, si g est une fonction réglée positive, à support compact, $\int_{-\infty}^{\infty} g(a)da = 1$ et si $G_n(x) = n\int_{-\infty}^{x} g(na)da$, alors, pour tout t et presque tout b, $\int_0^t G_n(X_s - b)dX_s$ converge vers une quantité que l'on note $\int_0^t 1_{X_s > b}\, dX_s$ et l'on a :*

$$(X_t - b)^+ - (X_0 - b)^+ = \int_0^t 1_{X_s > b}\, dX_s + \frac{1}{2}\ell_t^b(X).$$

<u>Preuve</u> : On montre la proposition pour $g = 1_{]-1/2,1/2[}$: grâce à un théorème de Lebesgue, pour presque tout b dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\ell_t^b(X) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \ell_t^a(X)da = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 1_{[b-\varepsilon,b+\varepsilon]}(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Pour tout n, grâce à l'extension de l'intégrale de Föllmer

$$\hat{G}_n(X_t - b) - \hat{G}_n(X_0 - b) = \int_0^t G_n(X_s - b)dX_s + \frac{n}{2}\int_0^t g(n(X_s - b))d\langle X\rangle_s$$

où $\hat{G}_n$ est la primitive de G_n nulle en $-\infty$.
En faisant tendre n vers l'infini, $\hat{G}_n(X_t - b)$ tend vers $(X_t - b)^+$ et $\frac{n}{2}\int_0^t g(n(X_s - b))d\langle X\rangle_s$ converge vers $\frac{1}{2}\ell_t^b(X)$.

On a la proposition pour $g = 1_{]-1/2,1/2[}$, on en déduit la proposition pour g en escalier, à support compact, et par approximation uniforme, on étend à g réglée

Remarque : Il existe des X telles que μ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si K désigne l'ensemble triadique de Cantor, et X_t la racine carrée de la distance de t à K. On prend pour τ_n la n-ième subdivision triadique. Il est facile de voir que la suite de mesures $\sum\limits_{\tau_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \delta_{t_i}$ a une masse qui tend vers 1. On peut donc extraire une sous-suite étroitement convergente, et on remarque que la mesure limite est de masse 1 et portée par K. X est alors nulle $d\langle X\rangle_s$ presque sûrement, et donc μ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

II. NOMBRE DE MONTEES ET DE DESCENTES ET TEMPS LOCAL.

a) Une condition suffisante d'existence des densités d'occupation :

On considère $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. On se donne $(X_t\ ; 0 \leq t \leq 1)$ un processus continu, nul en zéro, adapté et borné. On note τ_n la subdivision d'arrêt $\tau_n = (T_o^n, \ldots, T_k^n, \ldots)$:

$$T_o^n \equiv 0$$

$$T_{k+1}^n = \inf\{t > T_k^n : |X_t - X_{T_k^n}| = 2^{-n}\} \wedge 1.$$

On suppose que $X = M + A$ où M est une martingale continue de carré intégrable, et A un processus continu nul en zéro tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Q_{\tau_n}(A)] = 0$$

avec $Q_{\tau_n}(A) = \sum\limits_{T_i^n \in \tau_n} (A_{T_{i+1}^n} - A_{T_i^n})^2$.

On pose $\ell_n^a(X) = 2^{-n}$ fois la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de X (*) entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1)^{2-n}$ si $k \cdot 2^{-n} \leq a < (k+1)2^{-n}$. On a alors le :

(*) On ne se contente pas du nombre de montées entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1) \cdot 2^{-n}$ pour des raisons qui seront expliquées dans § 3.

<u>*Théorème 2.1*</u> : *Si la suite* $(\ell_n^{\bullet}(X) : n \in \mathbb{N})$ *est équiintégrable dans* $L^1(d\mathbb{P} \times da)$ *alors :*

1°) Elle converge faiblement dans $L^1(d\mathbb{P} \times da)$, *on note* $\ell^{\bullet}(X)$ *cette limite.*

2°) Il existe Λ *ensemble de probabilité* 1 *tel que :*

Pour tout ω *dans* Λ *et pour toute* g *borélienne bornée;*

$$\int_0^1 g(X_s)\,d\langle X\rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a)\ \ell^a(X)\,da\ (\omega).$$

<u>Preuve</u> : Si $\ell_n^a(X)$ est équiintégrable, on peut extraire une sous-suite $p(n)$ telle que pour toute fonction g de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(a)\ \ell_n^a(X)\,da \xrightarrow[(n \to \infty)]{\sigma(L^1(\mathbb{P}),L^{\infty}(\mathbb{P}))} \int_{-\infty}^{\infty} g'(a)\ \ell^a(X)\,da.$$

Or nous savons (*théorème 2.4* de [1]) que pour toute g de classe C^1, $Q_{\tau_n}(g(X),X)$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $\int_0^1 g'(X_s)\,d\langle X\rangle_s$ où

$$Q_{\tau_n}(g(X),X) = \sum_{T_k^n \in \tau_n} [g(X_{T_{k+1}^n}) - g(X_{T_k^n})]\ (X_{T_{k+1}^n} - X_{T_k^n})$$

$$= \sum_{T_{k+1}^n < 1} [g(X_{T_{k+1}^n}) - g(X_{T_k^n})]\ (X_{T_{k+1}^n} - X_{T_k^n}) + O(2^{-n})$$

où $O(2^{-n})$ représente la contribution du dernier terme dans $Q_{\tau_n}(g(X),X)$.

Donc $Q_{\tau_n}(g(X),X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [g((k+1)2^{-n} - g(k\cdot 2^{-n})]\ \ell_n^{k\cdot 2^{-n}}(X) + O(2^{-n})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g'(a)\ \ell_n^a(X)\,da + O(2^{-n}).$$

Par conséquent, pour toute g de classe C^1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(a)\ \ell^a(X)\,da = \int_0^1 g'(X_s)\,d\langle X\rangle_s \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Il existe donc Λ de probabilité 1 tel que, pour tout q rationnel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iq\,a}\, \ell^a(X)da = \int_0^1 e^{iq\,X_s}\, d\langle X\rangle_s \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \Lambda,$$

ce qui prouve que la mesure d'occupation pour la trajectoire $X(\omega)$ a une densité $\ell^a(X)\,(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue da.

Il en découle que $\ell^a(X)$, la limite de $\ell^a_{n(p)}(X)$ ne dépend pas de la suite extraite, et donc, que $\ell^a_n(X)$ converge faiblement vers $\ell^a(X)$.

b) Une extension des processus de Dirichlet : Le *théorème 2.1* nous conduit à donner les :

Définition 2.2 : Soit X processus continu, adapté, nul en zéro. Si S est une subdivision de $\mathbb{R}$: $S = \{a_n : n \in \mathbb{Z}\ ;\ a_{-\infty} = -\infty\ ;\ a_0 = 0\ ;\ a_{+\infty} = +\infty$ et $a_{n-1} < a_n\}$.
On note $\tau(X,S)$ la subdivision d'arrêt $(T_0, T_k, \dots)$: $T_0 \equiv 0$ et

$$T_{k+1} = \inf\{t > T_k : X_t \in S \quad \text{et} \quad X_t \neq X_{T_k}\} \wedge 1.$$

(C'est le premier temps d'atteinte après T_k de l'antécédent ou du suivant dans S du point où l'on est en T_k).

Définition 2.3 : On dit que Y est un X-processus de Dirichlet si $Y = M + A$ avec M martingale continue de carré intégrable, et A processus continu, nul en zéro, Y processus borné et

$$\lim_{|S|\downarrow 0} \mathbb{E}[Q_{\tau(X,S)}(A)] = 0.$$

Comme dans [1], on peut montrer que, pour X fixé : D_X, l'ensemble des X-processus de Dirichlet, est un espace de Banach pour la norme

$$\|Y\|_X = \|Y^*\|_\infty + \sup_S\, (\mathbb{E}[Q_{\tau(X,S)}(Y)])^{1/2}.$$

Si f est une fonction de classe C^1, et si X est un X-processus de Dirichlet, $f(X)$ est un X-processus de Dirichlet dont la partie martingale est :

$$\int_0^{\cdot} f'(X_s)dM_s \qquad (\text{si } X = M + A).$$

<u>Définition 2.4</u> : Si S est une subdivision de $\mathbb{R}$, et si $a_i \leq a < a_{i+1}$, on note $\ell_S^a(X)$ $(a_{i+1} - a_i)$ fois le nombre de montées et de descentes de X entre a_i et a_{i+1}. On dit que X vérifie (M.D.2) si $\sup_S \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\ell_S^a(X)^2]da < \infty$.

Le *théorème 2.1* devient alors sous les hypothèses restreintes :

<u>Théorème 2.5</u> : Soit X un X-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2). Alors X vérifie (L.T.2) : Il existe $\ell^a(X) \in L^2(d\mathbb{P} \times da)$, densité d'occupation pour X. De plus $\ell_S^a(X)$ converge dans $\sigma(L^1(d\mathbb{P} \times da))$, quand le pas de S tend vers zéro, vers $\ell^a(X)$.

c) <u>Exemples et propriétés générales</u> :

La propriété (M.D.2) se vérifie facilement pour les semi-martingales réelles et certaines transformées de semi-martingales grâce au :

<u>Lemme 2.6</u> : Soit $X = M + V$ semi-martingale réelle, continue, nulle en zéro, avec $\mathbb{E}[M_1^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2] < \infty$. Soit $a < b$ deux réels et $m_a^b(X)$ $(b-a)$ fois le nombre de montées de X de a à b. Alors :

$$\mathbb{E}[(m_a^b(X))^2] \leq 8\,\mathbb{E}[M_1^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2].$$

<u>Preuve</u> : Soit $T_0 \equiv 0$, $T_{2n+1} = \inf\{t > T_{2n} : X_t = b\} \wedge 1$

$$T_{2n+2} = \inf\{t > T_{2n+1} : X_t = a\} \wedge 1 \qquad \text{et} \qquad \Omega_n = \{T_n < 1\}.$$

$$(X_{T_{2n+1}} - X_{T_{2n}})1_{\Omega_{2n+1}} = (b-a)\ 1_{\Omega_{2n+1}}$$

$$= (X_{T_{2n+1}} - X_{T_{2n}})\ 1_{\Omega_{2n}} - (X_{T_{2n+1}} - X_{T_{2n}})\ 1_{\Omega_{2n} \setminus \Omega_{2n+1}}.$$

Les ensembles $\Omega_{2n} \setminus \Omega_{2n+1}$ étant deux à deux disjoints

$$m_a^b(X) \leq \int_0^1 P_{n_s}\, dX_s + (X_1 - a)^-$$

où P_n est le processus prévisible indicatrice de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]\!]T_{2n}, T_{2n+1}]\!]$ et donc

$$\mathbb{E}[(\int_0^1 P_{n_s}\, dX_s)^2] \le 2\,\mathbb{E}[M_1^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2].$$

Remarque : On vient de voir que toutes les semi-martingales continues (à un changement équivalent de probabilité et à une localisation près) vérifient les hypothèses de 2.5.

Proposition 2.7 : Si $X = M + V$ vérifie les hypothèses du lemme 2.6, et si f est une fonction réelle monotone par morceaux, admettant presque sûrement une dérivée f' dans $L^3(\mathbb{R})$, alors $f(X)$ vérifie (M.D.2).

Preuve : On se ramène au cas f croissante.

Soit $S = \{a_n : n \in \mathbb{Z},\ a_0 = 0 \text{ et } a_{n-1} < a_n\}$. Pour $a_i \le a < a_{i+1}$, on a :

$$\ell_{f(S)}^{f(a_i)}(f(X)) = 2\,\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}\, m_{a_i}^{a_{i+1}}(X) + O(|S|)$$

et

$$\sum_{a_i\in S} [\ell_{f(S)}^{f(a_i)}(f(X))]^2\, [f(a_{i+1}) - f(a_i)] =$$

$$4 \sum_{a_i \in S} \left[\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}\right]^3 [m_{a_i}^{a_{i+1}}(X)]^2\, (a_{i+1} - a_i) + O(|S|)$$

et donc $4\int_{-\infty}^{\infty} f'^3(a)da \cdot 8\,\mathbb{E}[M_1^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2] + O(|S|)$ majore l'espérance du premier terme.

On a également :

Proposition 2.8 : Soit $X = M + A$ vérifiant les conditions du lemme 2.6. Alors, pour toute f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, $f(X)$ est un X-processus de Dirichlet dont la partie martingale est $\int_0^{\cdot} f'(X_s)dM_s$.

Preuve : Pour toute subdivision S de $\mathbb{R}$ et toute g de classe C^2

$$Q_{\tau(X,S)}(g(X)) = \sum_{T_i \in \tau(X,S)} (g(X_{T_{i+1}}) - g(X_{T_i}))^2$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} g'(a)^2\, \ell_S^a(X)da$$

et grâce au *lemme 2.6* $\mathbb{E}[Q_{\tau(X,S)}(g(X))] \leq C(X) \int_{\mathbb{R}} g'(a)^2 \, da$ où $C(X)$ est une constante indépendante de S.

On peut approcher toute fonction f de $H^1(\mathbb{R})$ par une suite f_n de fonctions de classe C^2, et comme D_X est un espace de Banach pour $\|\cdot\|_X$, $f_n(X)$ converge dans D_X vers $f(X)$.

Remarques : 1°) En particulier, si $X = M + V$ vérifie les conditions de *2.6* alors pour toute fonction f monotone par morceaux, admettant presque sûrement une dérivée f' dans $L^3(\mathbb{R})$, $Y \equiv f(X)$ est un X-processus de Dirichlet, donc un Y-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2) et donc (T.L.2). On peut étendre ceci par localisation à $f' \in L^3_{loc}(\mathbb{R})$.

2°) De même, on montre que si X est un X-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2) alors :

i) Pour toute f admettant une dérivée f' dans $L^4(\mathbb{R})$, $f(X) \in D_X$.

ii) Pour toute f lipschitzienne, monotone par morceaux, $f(X)$ est un $f(X)$-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2).

Dans ces deux cas la partie martingale est $\int_0^{\cdot} f'(X_s) dM_s$.

3°) Enfin, de façon analogue, on montre que si $X = M + V$ est une semi-martingale dans $\mathbb{R}^d$ avec : $\mathbb{E}[\|M_1\|^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2] < \infty$, et f fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout a réel, $f^{-1}(]-\infty,a])$ est convexe (respectivement concave) alors $f(X)$ est un $f(X)$-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2).

c) Cas du mouvement Brownien réel :

Si B est un mouvement Brownien réel, on a une réciproque de *2.8* :

Proposition 2.9 : Soit f fonction réelle telle que $f(B)$ soit un B-processus de Dirichlet local. Alors f admet presque partout une dérivée f' dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

Preuve : Si il existe T_p suite croissante de temps d'arrêt, $T_p \uparrow 1$ p.s. et $f(B^{T_p})$ est un B-processus de Dirichlet, alors pour tout p entier

$$Q_{\tau_n}(f(B^{T_p})) = \sum_k [f((k+1)\cdot 2^{-n}) - f(k\cdot 2^{-n})]^2 \; 2^n \, \ell_n^{k\cdot 2^{-n}}(B^{T_p})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_n f(a))^2 \, \ell_n^a(B^{T_p})da$$

où $\nabla_n f(a) = \dfrac{f((k+1)2^{-n}) - f(k\cdot 2^{-n})}{2^{-n}}$ si $k\cdot 2^{-n} \leq a < (k+1)\cdot 2^{-n}$.

Or il est facile de voir que pour tout $A > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ et p_0 tels que

$\mathbb{E}[\ell_n^a(B^{T_{p_0}})] > \varepsilon$ si $|a| < A$ & $n \geq p_0$.

De sorte que $\nabla_n f(a)$ est borné dans $L^2([-A,A])$.

Comme dans [1] on en déduit que $\nabla_n f(a)$ converge faiblement dans $L^2([-A,A])$ vers f' qui est presque partout la dérivée de f.

Corollaire 2.10 : *Il existe des B-processus de Dirichlet qui ne vérifient pas (M.D.2).*

Preuve : Soit $f(x) = |x|^{0,6}$ $g(x) = |x|^{0,8}$, $X = f(B_\cdot)$ est alors un B-processus de Dirichlet local. Si X vérifiait (M.D.2) localement grâce à la remarque qui suit *2.8*, $g(X)$ serait un B-processus de Dirichlet local, donc $(g\circ f)(x) = |x|^{0,48}$ serait dans $\mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas le cas.

III. INTEGRATION STOCHASTIQUE POUR LES PROCESSUS DE DIRICHLET VERIFIANT (M.D.2).

a) Formule d'Itô - Tanaka : Soit X un X-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2). Grâce au *théorème 2.5*, X vérifie (T.L.2), et donc, grâce à *1.1* l'intégration de Föllmer s'étend pour presque toutes les trajectoires à toute f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$. On va voir directement ici comment on peut définir $\int_0^1 f(X_s)dX_s$ comme limite des sommes de Riemann pour f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

Théorème 3.1 : *Soit X un X-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2) et f admettant une dérivée f' dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$. Alors si on pose :*

$$I_n(f'(X)) \overset{(\text{déf})}{=} \sum_{T_{i+1}<1\;;\;T_i\in\tau_n} f'(X_{T_i})(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) \quad \text{où} \quad \tau_n = \tau(X,S_n)$$

et S_n est la n-ième subdivision dyadique, $I_n(f'(X))$ converge quand n tend *vers* $+\infty$ *dans* $L^1(\mathbb{P})$ *vers ce que l'on note* $\int_0^1 f'(X_s)dX_s$ *et on a la formule d'Itô - Tanaka :*

$$f(X_1) - f(X_0) = \int_0^1 f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f''(a)\ \ell^a(X)da.$$

Preuve : Si l'on note $m_k^n(X)$, 2^{-n} fois le nombre de montées de X entre $k\cdot 2^{-n}$ et $(k+1)2^{-n}$, et $d_k^n(X)$, 2^{-n} fois le nombre de descentes de X entre $k\cdot 2^{-n}$ et $(k+1)2^{-n}$, alors :

$$I_n(f'(X)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(k\cdot 2^{-n})(m_k^n(X) - d_k^n(X))$$

or $$m_k^n(X) = \frac{1}{2}\{\ell_n^{k\cdot 2^{-n}}(X) + 2^{-n}\,1_{(X_0 \leqq k\cdot 2^{-n} < (k+1)\cdot 2^{-n} < X_1)} - 2^{-n}\,1_{(X_1 \leqq k\cdot 2^{-n} < (k+1)\cdot 2^{-n} < X_0)}\}$$

(Les deux derniers termes correcteurs expriment le fait qu'il y a une montée de plus que de descentes entre $k\cdot 2^{-n}$ et $(k+1)\cdot 2^{-n}$ si $X_0 \leqq k\cdot 2^{-n} < (k+1)\cdot 2^{-n} < X_1$) et de même

$$d_k^n(X) = \frac{1}{2}\Big[\ell_n^{(k-1)2^{-n}}(X) + 2^{-n}\,1_{(X_1 < (k\ 1)\cdot 2^{-n} < k\cdot 2^{-n} \leqq X_0)} - 2^{-n}\,1_{(X_0 < (k-1)\,2^{-n} < k\cdot 2^{-n} \leqq X_1)}\Big].$$

Par la transformation d'Abel

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(k\cdot 2^{-n})(\ell_n^{k\cdot 2^{-n}}(X) - \ell_n^{(k-1)\cdot 2^{-n}}(X))$$
$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} [f'((k+1)2^{-n}) - f'(k\cdot 2^{-n})]\ell_n^{k\cdot 2^{n}}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f''(a)\ \ell_n^a(X)da.$$

Lemme : $\int_{-\infty}^{\infty} f''(a)\ell_n^a(X)da$ *converge dans* $L^1(\mathbb{P})$ *vers* $\int_{-\infty}^{\infty} f''(a)\ell^a(X)da.$

Preuve : A priori, la convergence a lieu seulement faiblement dans $L^1(\mathbb{P})$. Or, si f_p est une suite de fonctions de classe C^2 telles que f'_p converge dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ vers f' :

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} (f'' - f''_p)(a)\ \ell_n^a(X)da\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f'' - f''_p)^2(a)(da)\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ell_n^a(X)^2\ da\right).$$

Or pour tout p, $Q_{\tau_n}(f'_p(X),X)$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers

$$\int_0^1 f''_p(X_s)d\langle X\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} f''_p(a)\ell^a(X)da,$$

puisque $f'_p(X)$ est un X-processus de Dirichlet, dont la partie martingale est $\int_0^{\cdot} f''_p(X_s)dM_s$ (si M est la partie martingale de X).

Grâce à l'inégalité précédente, la convergence est uniforme en p, et on en déduit le lemme.

Comme d'autre part

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(k\ 2^{-n}).2^{-n}(1_{X_o \leq k.2^{-n} < (k+1)2^{-n} < X_s} - 1_{X_1 \leq k\ 2^{-n} < (k+2)2^{-n} < X_o})$$

converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $f(X_1) - f(X_o)$, $I_n(f'(X))$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers ce que l'on note $\int_0^1 f'(X_s)dX_s$ et l'on a :

$$f(X_1) - f(X_o) = \int_0^1 f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f''(a)\ \ell^a(X)da.$$

b) *<u>Une extension de la formule d'Itô</u>* :

Bouleau et Yor ([2]) prouvent que l'application définie sur les fonctions en escalier $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i\ 1_{]a_i,a_{i+1}]}(t)$ qui à f associe $\sum_{i=1}^n f_i(L^{a_{i+1}}(X)-L^{a_i}(X))$

(où $L^a(X)$ est le temps local en a d'une semi-martingale X) se prolonge de façon unique en une mesure vectorielle sur la tribu borélienne, on note $\int f(a)d_a\ L^a(X)$ l'intégrale de f par rapport à cette mesure, alors

$$F(X_1) = F(X_o) + \int_0^1 f(X_t)dX_t - \frac{1}{2}\int f(a)d_a\ L^a(X).$$

Le calcul du a) peut être repris quand X est une martingale de carré intégrable, pour donner une autre approche de $\int f(a)d_a\ L^a(X)$ et étendre cette intégrale à f dans $L^2(\mathbb{R})$:

Si f est dans $L^2(\mathbb{R})$, posons $f_n(t) = 2^n \int_{k\cdot 2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(u)du$ pour $k\cdot 2^{-n} \leqq t < (k+1)2^{-n}$.

Comme $f_n(a)$ converge vers $f(a)$ pour presque tout a, $f_n(X_s)$ converge vers $f(X_s)\, d\langle X\rangle_s$ presque sûrement. Si Mf désigne la fonction maximale de Hardy associée à f, Mf est dans $L^2(\mathbb{R})$, et par convergence dominée $I_n(f_n(X))$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers $\int_0^1 f(X_s)dX_s$.

Enfin on a toujours la convergence de

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_n(k\cdot 2^{-n})2^{-n}\,(1_{X_0\leqq k\cdot 2^{-n}<(k+1)2^{-n}<X_1} - 1_{X_1\leqq k\, 2^{-n}<(k+1)2^{-n}<X_0})$$

vers $F(X_1) - F(X_0)$.

En conséquence $\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_n(k\cdot 2^{-n})(\ell_n^{k\cdot 2^{-n}}(X) - \ell_n^{(k-1)2^{-n}}(X))$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers $\int_0^1 f(X_s)dX_s - F(X_1) + F(X_0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(a)d_a\, \ell^a(X)$.

Appendice : Pour conclure, nous donnons un exemple d'utilisation des temps locaux inspiré par le *théorème 6.3* de Geman - Horowitz [4] :

Proposition : Soit $X = M + A$ un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) qui vérifie (T.L.2). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(a,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$*

- *Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f(\cdot,b)$ est de classe C^1, et $\sup_{a,b} |\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)| < \infty$.*

Alors $Y_t = \int_0^t f(X_t,X_s)d\langle X\rangle_s$ est un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) dont la partie martingale est

$$\int_0^{\cdot} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,b)\,\ell_s^b(X)db\right)dM_s = \int_0^{\cdot} \left(\int_0^s \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,X_u)d\langle X\rangle_u\right)dM_s.$$

Preuve : Au paragraphe I on a introduit la famille de processus croissants $s \to \ell_s^b(X)$. Remarquons, avant de pour suivre, que $\ell_t^a(X) \equiv 0$ si $|a| \geq \sup_b \|X_s\|_{L^\infty}$,

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_t,b)\ \ell_t^b(X)db.$$

Or pour b fixé, d'après [1] (*théorème 2.4*) $f(X_t,b)$ est un processus de Dirichlet fort (respectivement faible), dont la partie martingale est :

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,b)dM_s.$$

De même que dans [1], il est aisé de voir que $f(X_t,b)\ \ell_t^b(X)$ est somme d'un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) et d'un processus de sauts à variations bornées (qui provient des sauts éventuels du processus croissant $\ell_t^b(X)$).

Par un théorème de Fubini stochastique (voir par exemple le *lemme 4.1* du chapitre 3 de Ikeda - Watanabe [5]), on voit que Y_t est somme d'un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) et d'un processus à variations bornées qui peut contenir des sauts. Il suffit de voir que Y est continue pour que le processus à variations bornées soit à variation quadratique nulle. Or

$$|Y_{t'} - Y_t| \le \int_t^{t'} |f(X_{t'},X_s)|d\langle X\rangle_s + \int_0^t d\langle X\rangle_s \int_{X_t}^{X_{t'}} da\ |\frac{\partial f}{\partial x}(a,X_s)|$$

et la continuité de Y résulte de celle de X.

REMERCIEMENT : *Je remercie M. Yor pour ses conseils et son aide à la rédaction de cet article.*

REFERENCES :

[1] J. BERTOIN : "Les processus de Dirichlet en tant qu'espace de Banach". Stochastics - 1986.

[2] N. BOULEAU & M. YOR : "Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales". C.R.A.S. Paris, t. 292 (2 Mars 1981), Série I, p. 491-494.

[3] H. FÖLLMER : "Calcul d'Itô sans probabilités". Séminaire de Probabilités XV, p. 143, L.N. 850, 1981.

[4] D. GEMAN & H. HOROWITZ : "Occupation Densities". Annals of Probability 1980, vol. 8, n° 1, p. 1-67.

[5] N. IKEDA & S. WATANABE : "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes". North Holland 1981, p. 116.