Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Gérald Mazziotto
Annie Millet

Points, lignes et systèmes d'arrêt flous et problème d'arrêt optimal

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 81-94
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__81_0>

POINTS, LIGNES ET SYSTEMES D'ARRET FLOUS ET PROBLEME D'ARRET OPTIMAL

G. MAZZIOTTO et A. MILLET

1 - INTRODUCTION : Dans le cadre de la théorie classique des processus à un indice réel, la méthode de compactification de l'ensemble des temps d'arrêt, due à Baxter et Chacon /1/, permet d'étudier l'existence de temps d'arrêt maximisant la quantité $E(Y_T)$, quand T parcourt l'ensemble des temps d'arrêt, et quand Y est un processus suffisamment régulier donné. Des résultats de ce type ont été obtenus d'abord par Bismut /2/, puis par Edgar, Millet et Sucheston /8/; cette méthode est aussi exposée dans le cours de N. El Karoui /9/ sur l'arrêt optimal. Le principe en est le suivant. L'ensemble des temps d'arrêt peut être plongé dans un ensemble convexe, appelé ensemble des temps d'arrêt flous, dont l'ensemble des éléments extrémaux coïncide avec l'ensemble des temps d'arrêt. D'autre part, on montre que cet ensemble des temps d'arrêt flous s'identifie à un sous-ensemble fermé de la boule unité du dual d'un espace de Banach muni de sa topologie faible. La trace de cette topologie est appelée la topologie de Baxter et Chacon; c'est de cette façon qu'elle est présentée et étudiée par Meyer /15/, et aussi par Ghoussoub /10/. Finalement, on vérifie que, si le processus Y est régulier (cf. /15/, /2/ ou /8/), alors l'application $T \to E(Y_T)$ définie sur l'ensemble des temps d'arrêt se prolonge par une fonction continue sur l'ensemble des temps d'arrêt flous muni de la topologie de Baxter et Chacon. Pour résoudre le problème de l'existence d'un temps d'arrêt optimal, il ne reste plus qu'à faire appel à un résultat de topologie (cf. /3/, fasc. XV-2.7, Proposition 1) pour montrer que la fonction atteint son maximum en au moins un élément extrémal, c'est à dire sur un temps d'arrêt. Dans le cas où les tribus sont séparables, on peut aussi conclure en utilisant le théorème de représentation de Choquet, comme dans /8/.

Il était bien évidemment tentant d'essayer d'adapter cette méthode pour résoudre le problème de l'arrêt optimal, sur des points d'arrêt, d'un processus à deux indices. Cette idée a été exploitée dans les travaux de Millet /17/, de Dalang /5/ et de Mazziotto et Millet /13/.

Dans la première partie de cette note, on a essayé d'expliquer en quoi l'extension la plus immédiate de cette méthode de compactification ne semble pas permettre de résoudre le problème d'arrêt optimal sur le plan, en dehors du cas facile où on travaille avec une filtration constante (cf. /10/, /5/). Dans la deuxième partie, on présente une nouvelle résolution du problème, qui fait toujours appel aux techniques de compactification, mais qui s'inspire de l'étude faite dans /17/ et /13/. Dans ces références, on introduisait les notions de chemin croissant flou et de tactique floue qui généralisent les définitions de Krengel et Sucheston /11/, de Mandelbaum et Vanderbei /12/ et de Walsh /19/. Elles nécessitent de travailler avec plusieurs relations d'ordre partiel sur le plan. Nous pensons que l'approche adoptée dans cette note est plus naturelle que celle de /17/ et /13/, car elle ne fait appel qu'à la notion de ligne d'arrêt avec l'ordre partiel habituel.

Au préalable, il est indispensable de rappeler quelques définitions et notations classiques (cf. /4/, /20/ ou /16/). Les processus que l'on considère ici sont indexés sur le compactifié d'Alexandrov $\overline{\mathbb{K}}^2 = \mathbb{K}^2 \cup \{\infty\}$ de l'ensemble $\mathbb{K}^2 = \mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{R}_+^2$. L'ordre partiel adopté sur $\overline{\mathbb{K}}^2$ est le suivant :

$$z = (s,t) \leq z' = (s',t') \iff s \leq s' \text{ et } t \leq t' \;; \qquad z \leq \infty .$$

On notera aussi dans le dernier paragraphe :

$$z = (s,t) \curlywedge z' = (s',t') \iff s \leq s' \text{ et } t \geq t' .$$

Sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty, \mathbb{P})$, on considère une filtration à deux indices $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_{s,t} \;;\; (s,t) \in \mathbb{K}^2)$, c'est à dire une famille croissante (pour l'ordre partiel) de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}_\infty$, telle que $\underline{\underline{F}}_{0,0}$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\underline{\underline{F}}_\infty$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$, on suppose de plus que la filtration est continue à droite (cad), i.e. : $\forall\, s,t \in \mathbb{K} : \underline{\underline{F}}_{s,t} = \bigcap \{\underline{\underline{F}}_{s+u,t+v} \;;\; u,v > 0\}$. De plus on supposera que la tribu $\underline{\underline{F}}_\infty$ est séparable. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire ici de considérer la condition d'indépendance conditionnelle classiquement notée F4 (cf.e.g. /16/), et que les propriétés de la filtration sont conservées par un changement de probabilité équivalente.

Un point d'arrêt (p.a.) est une variable aléatoire (v.a.), (S,T), à valeurs dans $\overline{\mathbb{K}}^2$, telle que $\{(S,T) \leq (s,t)\} \in \underline{\underline{F}}_{s,t}$, $\forall\, (s,t) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble des points d'arrêt est noté $\underline{\underline{T}}$. Si (S,T) est un point d'arrêt, on pose $\underline{\underline{F}}_{S,T} = \{A \in \underline{\underline{F}}_\infty : A \cap \{(S,T) \leq (s,t)\} \in \underline{\underline{F}}_{s,t}$, $\forall\, (s,t) \in \mathbb{K}^2\}$. On vérifie aisément que (S,T) est une v.a. mesurable par rapport à la tribu $\underline{\underline{F}}_{S,T}$.

Une ligne d'arrêt (l.a.) est définie comme le début d'un ensemble aléatoire dans $\Omega \times \overline{\mathbb{K}}^2$, fermé et progressivement mesurable (cf. /14/ et /16/). L'ensemble des lignes d'arrêt est noté $\underline{\underline{L}}$. Remarquons que si L est une ligne d'arrêt, alors $\{(s,t) \geq L\} \in \underline{\underline{F}}_{s,t}$, $\forall\, (s,t) \in \mathbb{K}^2$; on définit aussi une tribu en posant : $\underline{\underline{F}}_L = \{A \in \underline{\underline{F}}_\infty : A \cap \{L \leq (s,t)\} \in \underline{\underline{F}}_{s,t}$, $\forall\, (s,t)\}$.

2 - POINTS D'ARRET FLOUS : Cette notion est l'extension la plus naturelle de celle des temps d'arrêt flous selon /1/ et /15/.

Définition 1 : Un point d'arrêt flou est un processus $A = (A_z \,;\, z \in \bar{\mathbb{K}}^2)$ positif, adapté, continu à droite et admettant des limites dans les trois autres quadrants (cf. /16/ pour cette notion), tel que

i) $A_\infty = 1$, $A_{\overline{0,0}} = 0$,

ii) $\forall\, s,s',t,t' \in \mathbb{K}$ tels que $(s,t) \leq (s',t')$:

$A_{s,t} + A_{s',t'} - A_{s,t'} - A_{s',t} \geq 0$.

On note $\underline{\underline{T}}_f$ l'ensemble des points d'arrêt flous. Un point d'arrêt flou peut être considéré comme étant la fonction de répartition d'une probabilité aléatoire sur $\bar{\mathbb{K}}^2$. On montre aisément que $\underline{\underline{T}}_f$ est convexe et qu'il y a une correspondance biunivoque entre les points d'arrêt $Z \in \underline{\underline{T}}$ et les points d'arrêt flous $A \in \underline{\underline{T}}_f$ tels que $\forall\, z$: $A_z \in \{0,1\}$ p.s.; il suffit de poser $A_z = \mathbb{1}_{\{z \geq Z\}}$. De plus on peut munir $\underline{\underline{T}}_f$ d'une topologie le rendant compact, en l'identifiant avec un sous-ensemble du dual faible de l'ensemble de Banach $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2)$ des processus X continus sur $\bar{\mathbb{K}}^2$, muni de la norme $\|X\| = E(\sup_z |X_z|)$. Tous ces résultats, établis par Ghoussoub /10/, sont analogues à ceux de la théorie classique, obtenus dans /1/ ou /15/. De plus, si la filtration $\underline{\underline{F}}$ est constante, alors l'ensemble des éléments extrémaux du convexe $\underline{\underline{T}}_f$ s'identifie exactement avec l'ensemble des v.a. sur $\bar{\mathbb{K}}^2$ (cf. /10/, Proposition I.2). En revanche la généralisation à une filtration quelconque annoncée par Dalang /5/ nous semble pour le moins rapide. En effet, l'exemple suivant montre qu'il existe des situations où l'ensemble des éléments extrémaux de $\underline{\underline{T}}_f$ contient strictement $\underline{\underline{T}}$.

Exemple: Soient $\mathbb{K} = \mathbb{N}$, $\Omega = [0,1[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Posons

$$\underline{\underline{F}}_{0,0} = \underline{\underline{F}}_{1,0} = \underline{\underline{F}}_{0,1} = \{\emptyset, \Omega\} ,$$

$$\underline{\underline{F}}_{0,2} = \sigma([0,1/3[) , \quad \underline{\underline{F}}_{1,1} = \sigma([1/3,2/3[) , \quad \underline{\underline{F}}_{2,0} = \sigma([2/3,1[)$$

$$\underline{\underline{F}}_{i,j} = \bigvee_{z \leq (i,j)} \underline{\underline{F}}_z \quad \text{si} \quad i+j \geq 3 .$$

Posons

$$a_{0,2} = 1/2 \, \mathbb{1}_{[1/3,1[} , \quad a_{1,1} = 1/2 \, \mathbb{1}_{[0,1/3[\cup[2/3,1[}$$

$$a_{2,0} = 1/2 \, \mathbb{1}_{[0,2/3[} \quad \text{et} \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si } i+j \neq 2 .$$

Pour tout $z \in \bar{\mathbb{N}}^2$, soit $A_z = \sum_{z' \leq z} a_{z'}$.

Alors $(A_z \,;\, z \in \bar{\mathbb{K}}^2)$ est un point d'arrêt flou pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_z \,;\, z \in \bar{\mathbb{K}}^2)$.

Montrons que c'est un élément extrémal. Pour cela, supposons qu'il existe des points d'arrêt flous (A'_z ; $z \in \bar{\mathbb{K}}^2$) et (A''_z ; $z \in \bar{\mathbb{K}}^2$) et $\lambda \in \,]0,1[$ tels que $A = \lambda A' + (1-\lambda)A''$.
Alors, pour $z=(s,t)$ tel que $s+t < 2$: $A'_z = A''_z = 0$, et pour $z \geq (2,2)$: $A'_z = A''_z = 1$. Comme A' et A" sont adaptés, il existe des constantes α , $\bar{\alpha}$, β, $\bar{\beta}$, γ et $\bar{\gamma}$ telles que $A'_{0,2} = \alpha \mathbb{1}_{[1/3,1[} + \bar{\alpha}\mathbb{1}_{[0,1/3[}$,

$$A'_{1,1} = \beta\mathbb{1}_{[0,1/3[\,\cup\,[2/3,1[} + \bar{\beta}\mathbb{1}_{[1/3,2/3[}\ ,\ A'_{2,0} = \gamma\mathbb{1}_{[0,2/3[} + \bar{\gamma}\mathbb{1}_{[2/3,1[}$$

Puisque la probabilité engendrée par A' est nécessairement absolument continue par rapport à celle engendrée par A, on a $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0$.
D'autre part comme $A'_{2,2}$ vaut 1, on a $1 = \alpha + \beta$ sur $[2/3,1[$, $1 = \beta + \gamma$ sur $[0,1/3[$ et $1 = \alpha + \gamma$ sur $[1/3,2/3[$. On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$.
Finalement $A = A' = A''$, ce qui signifie que A est extrémal.

3 - LIGNES D'ARRET FLOUES : Etant donnée une ligne de séparation (resp. une ligne d'arrêt) L, le processus A défini par $A_z = \mathbb{1}_{\{z \geq L\}}$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{K}}^2$, est croissant pour l'ordre sur $\bar{\mathbb{K}}^2$ (i.e. $z' \geq z$ entraîne $A_{z'} \geq A_z$ p.s.), à valeurs 0 ou 1, continu à droite et mesurable (resp. adapté). Cette remarque suggère la définition suivante.

> Définition 2 : On appelle ligne de séparation floue (resp. ligne d'arrêt floue) un processus A mesurable (resp. adapté) qui est croissant pour l'ordre, continu à droite et à valeurs dans $[0,1]$.

On note $\underline{\underline{L}}_f$ (resp. $\underline{\underline{L}}_{fb}$ (b pour "brut")) l'ensemble des lignes d'arrêt (resp. des lignes de séparation) floues. Evidemment $\underline{\underline{L}} \subset \underline{\underline{L}}_f \subset \underline{\underline{L}}_{fb}$.
Avec cette définition, il est facile de vérifier que l'ensemble des lignes de séparation floues et l'ensemble des lignes d'arrêt floues sont convexes. De plus on a le résultat suivant.

> Proposition 1 : L'ensemble des éléments extrémaux de l'ensemble des lignes de séparation floues (resp. des lignes d'arrêt floues) coïncide avec l'ensemble des lignes de séparation (resp. des lignes d'arrêt).

Démonstration : Elle est analogue à celle de la théorie classique pour les v.a. ou les t.a. sur $\bar{\mathbb{K}}$. On montre qu'une ligne de séparation (resp. d'arrêt) floue A qui ne vaut pas p.s. 0 ou 1 peut s'écrire comme combinaison convexe de deux autres lignes de séparation (resp. d'arrêt) floues A' et A" distinctes de A. En effet s'il existe un point $(s,t) = z$ tel que $\mathbb{P}(\{0 < A_z < 1\}) > 0$, on peut choisir $\lambda \in \,]0,1[$ tel que les processus A' et A" définis par :

$$\forall z \in \bar{\mathbb{K}}^2 : \quad A'_z = (A_z \wedge \lambda)/\lambda \qquad \text{et} \quad A''_z = ((A_z - \lambda) \vee 0)/(1-\lambda)$$

soient distincts et vérifient $A = \lambda A' + (1-\lambda)A''$. De plus, les processus A' et A'' sont mesurables (resp. adaptés), croissants et continus à droite. On en déduit que les éléments extrémaux A de $\underline{\underline{L}}_{fb}$ (resp. $\underline{\underline{L}}_f$) prennent p.s. les valeurs 0 ou 1. Or nécessairement : $A_z = \mathbb{1}_{\{A_z = 1\}} = \mathbb{1}_{\{z \geq L\}}$, où L est le début de l'ensemble $\{A = 1\}$ qui est mesurable (resp. progressif). Donc L est une ligne de séparation (resp. d'arrêt). La réciproque est immédiate.

Dans le reste de cette note, on convient que $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$; le cas discret est analogue, en plus simple. Notons $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$. De façon évidente, on peut paramétrer par $\bar{\mathbb{R}}$ une ligne de séparation L grâce à l'intersection L_a de L et de la droite Δ_a d'équation: $s - t = a$, lorsque a parcourt $\mathbb{R}$, et en représentant le point à l'infini de $\bar{\mathbb{K}}^2$ par $a = \infty$. De manière identique, une ligne de séparation floue A définit pour toute droite Δ_a une probabilité aléatoire μ_a sur $\bar{\mathbb{R}}_+$, et un processus croissant continu à droite (à un indice) A^a, obtenus par:

$$\forall u < v \in \bar{\mathbb{R}}_+ : \mu_a(]u,v]) = A^a_v - A^a_u \quad ,$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : A^a_u = A_{a+u,u} \, \mathbb{1}_{\{u \geq -a\}} \, , \; A^a_\infty = A_\infty = 1 \quad ,$$

$$\text{et} \quad A^\infty = \mathbb{1}_{\{\infty\}} \quad .$$

Du fait que le processus A est croissant pour l'ordre sur $\mathbb{K}^2$, on a nécessairement les inégalités suivantes :

$$\forall a \leq b \in \mathbb{R} : \forall u \in \mathbb{R}_+ : A^a_u \leq A^b_u \quad \text{et} \quad A^b_u \leq A^a_{b-a+u} \quad .$$

Inversement, une famille de processus croissants à un indice , soit $(A^a = (A^a_u \, ; \, u \in \bar{\mathbb{R}}_+) \, ; \, a \in \bar{\mathbb{R}})$ qui vérifie les inégalités précédentes détermine une et une seule ligne de séparation floue A.

Le résultat suivant montre qu'une ligne de séparation floue définit une application linéaire continue de l'espace de Banach des processus continus à indice dans $\bar{\mathbb{K}}^2$, $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2)$, dans celui des processus continus à (un) indice dans $\bar{\mathbb{R}}$, $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{R}})$.

<u>Proposition 2</u> : Soit A une ligne de séparation floue représentée par la famille des processus croissants $(A^a = (A^a_u \, ; \, u \in \bar{\mathbb{R}}_+) \, ; \, a \in \bar{\mathbb{R}})$. Pour tout processus $X = (X_{s,t} \, ; \, (s,t) \in \bar{\mathbb{K}}^2)$ de $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2)$, le processus $A(X)$ défini par :

$$\forall a \in \mathbb{R} : A(X)_a = \int_{\bar{\mathbb{R}}_+} X_{u+a,u} \, dA^a_u \qquad \text{et } A(X)_\infty = X_\infty$$

appartient à $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{R}})$. De plus, l'application $X \to A(X)$ est linéaire continue de $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2)$ dans $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{R}})$, de norme égale à 1.

La démonstration de ce résultat est analogue à celle faite pour les chemins croissants flous dans /13/ (Proposition 2.4).

Le dual de $C(\bar{\mathbb{R}})$, soit $C'(\bar{\mathbb{R}})$, est l'ensemble des mesures aléatoires V sur $\bar{\mathbb{R}}$ de norme le supremum essentiel de la variation totale finie (cf. /7/, /10/). On identifie la mesure V avec le processus V indicé sur $\bar{\mathbb{R}}$ défini par:

$$\forall\, b \in \mathbb{R} : V_b = V(]-\infty,b]) \quad \text{et} \quad V_\infty = V(\bar{\mathbb{R}}) \ .$$

On notera $\int_{\bar{\mathbb{R}}} f(u)\, dV_u$ l'intégrale d'une fonction f sur $\bar{\mathbb{R}}$ relativement à la mesure V.

Grâce à la Proposition 2, on plonge l'ensemble $\underline{\underline{L}}_{fb}$ des lignes de séparation floues dans l'ensemble des applications bilinéaires continues sur $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}})$ (cf. /18/, Théorème III-6.2, et aussi /13/ pour le cas des chemins croissants flous). Etant donnée une ligne de séparation floue représentée par le processus à deux indices A, ou la famille de processus à un indice $(A^a \,;\, a \in \bar{\mathbb{R}})$, on lui associe donc la forme linéaire Ψ_A sur $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}})$ définie par :

$$\Psi_A(X,V) = E\Big(\int_{\bar{\mathbb{R}}} dV_a \int_{\bar{\mathbb{R}}_+} X_{u+a,u}\, dA^a_u\Big) \ , \quad \forall\, X \in \underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \ , \ \forall\, V \in \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}) \ .$$

L'inégalité $|\Psi_A(X,V)| \leq \|X\|.\|V\|$, montre que Ψ_A appartient à la boule unité de $(\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}))'$. La topologie faible $\sigma((\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}))', \underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}))$ est localement convexe (cf. /3/, fasc.XVIII, IV-1.2). La restriction de cette topologie à l'ensemble $\underline{\underline{L}}_{fb}$, appelée topologie de Baxter et Chacon, le rend relativement compact. Remarquons aussi que la séparabilité de la tribu $\underline{\underline{F}}_\infty$ entraîne celle de la topologie faible sur $(\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}))'$ et la métrisabilité de la topologie de Baxter et Chacon sur $\underline{\underline{L}}_{fb}$ (cf. /15/).

Le résultat suivant caractérise les éléments de $(\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}))'$ qui correspondent à des lignes d'arrêt ou de séparation floues. Dans la suite on notera V^u la mesure de Dirac au point u pour tout $u \in \bar{\mathbb{R}}$.

<u>Proposition 3</u> : L'ensemble des lignes d'arrêt floues $\underline{\underline{L}}_{fb}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des formes bilinéaires continues Ψ sur $\underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2) \times \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}})$ qui satisfont les conditions suivantes pour $X \in \underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{K}}^2)$ et $V \in \underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}})$ quelconques :

a) $\forall\, A \in \underline{\underline{F}}_\infty : \Psi(\mathbb{1}_A X, V) = \Psi(X, \mathbb{1}_A V)$.

b) $\Psi(1,V) = E(V_\infty)$ et $\Psi(X,V^\infty) = E(X_\infty)$.

c) $|\Psi(X,V)| \leq \|X\| . \|V\|$.

d) $X \geq 0$ et V positive $\Rightarrow \Psi(X,V) \geq 0$.

e) $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall$ X tel que $X = 0$ sur Δ_a : $\Psi(X,V^a) = 0$.

f) $\forall$ f positive continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\forall\, \xi$ v.a. positive intégrable, et $\forall\, a \leq b \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(f^1 \xi, V^a) \geq \Psi(f^1 \xi, V^b) \quad \text{et} \quad \Psi(f^2 \xi, V^a) \leq \Psi(f^2 \xi, V^b)$$

où $f^1(s,t) = f(s)$ et $f^2(s,t) = f(t)$, $\forall\, s,t \in \mathbb{K}$.

g) $\forall\, z \in \mathbb{K}^2$, $\forall\, f$ continue sur $\mathbb{K}^2$ nulle hors de $[0,z]$,
$\forall\, \xi$ v.a. positive intégrable, $\forall\, a \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(f\,\xi, V^a) = \Psi(f\, E(\xi/\underline{\underline{F}}_z), V^a) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Il est facile de vérifier que les conditions a) à g) sont satisfaites dans le cas où l'application Ψ est associée à une ligne d' arrêt floue. Il faut établir la réciproque. Pour chaque a réel, la forme linéaire $\Psi(.,V^a)$ sur $\underline{\underline{C}}(\overline{\mathbb{K}}^2)$ définit, grâce aux conditions b), c), d) et e), une probabilité sur $(\Omega \times \overline{\mathbb{K}}^2, \underline{\underline{F}}_\infty \otimes \underline{\underline{\overline{\mathbb{K}}}}^2)$ de support $\Omega \times \Delta_a$ et de projection $\mathbb{P}$ sur Ω. On en déduit, selon /15/, qu'il existe un processus croissant cad-lag $A^a = (A^a_s\,;\, s \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ tel que : $A^a_\infty = 1$, $A^a_{(0 \vee (-a))-} = 0$, $A^\infty = 1\!\!1_{\{\infty\}}$ et

$$\forall\, X \in \underline{\underline{C}}(\overline{\mathbb{K}}^2) \ :\ \Psi(X,V^a) = E\Big(\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} X_{u+a,u}\, dA^a_u\Big) \quad .$$

On déduit de la condition f) que pour a et b réels:

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_+ \ ,\ \forall\, a < b \ :\ A^a_s \leq A^b_s \quad \text{et} \quad A^b_s \leq A^a_{s+b-a} \qquad \text{p.s.} \ .$$

Les ensembles de probabilité 1 où les processus précédents sont croissants cad-lag et ceux où les inégalités ci-dessus sont satisfaites dépendent évidemment de a, b et s. Néanmoins on peut trouver un sous-ensemble de probabilité 1 sur lequel les processus A^a sont croissants cad-lag et vérifient les relations précédentes quand a et b parcourent l'ensemble des rationnels. Pour a réel quelconque, on définit A^a comme la limite décroissante d'une suite de processus $(A^{a(n)}\,;\, n \in \mathbb{N})$ où la suite $(a(n)\,;\, n \in \mathbb{N})$ est rationnelle et décroît vers a. Il reste à s'assurer que la famille des processus $(A^a\,;\, a \in \overline{\mathbb{R}})$ ainsi construite permet d'exprimer la forme bilinéaire Ψ par la relation

$$\forall\, X \in \underline{\underline{C}}(\overline{\mathbb{K}}^2) \ ,\ \forall\, V \in \underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}}) \ :\ \Psi(X,V) = E\Big(\int_{\overline{\mathbb{R}}} dV_a \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} X_{u+a,u}\, dA^a_u\Big) \ .$$

Ceci est vrai par définition de A^a pour les processus V du type de V^a, pour a réel quelconque. La condition a) et la linéarité montrent que la relation est encore vérifiée pour des processus V étagés. Grâce à la condition c), on étend par densité cette relation à tous les processus V dans $\underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}})$. Enfin la condition g) entraîne, par un passage à la limite, que la v.a. A^a_u est $\underline{\underline{F}}_{u+a,u}$-mesurable.

Comme conséquence immédiate de cette Proposition, nous avons l'important résultat de compacité suivant, analogue à celui de Baxter et Chacon pour les temps d'arrêt flous (cf. /1/, /15/, 10/), et à celui établi dans /17/ et /13/ pour les chemins croissants optionnels flous.

<u>Proposition 4</u> : L'ensemble des lignes d'arrêt floues est compact pour la topologie de Baxter et Chacon.

<u>Démonstration</u>: On vérifie aisément que les conditions de la Proposition 3 définissent un sous-ensemble faiblement fermé de la boule unité de $(\underline{\underline{C}}(\overline{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}}))'$, qui est faiblement compacte d'après le théorème de Banach. La compacité de $\underline{\underline{L}}_f$ en découle immédiatement.

4 - SYSTEMES d'ARRET FLOUS : La notion que l'on étudie dans ce paragraphe est tout à fait similaire à celle de tactique ou stratégie floue introduite dans /17/ et /13/. Elle nous servira plus loin à résoudre le problème d'arrêt d'une manière analogue à celle développée dans ces mêmes références. Cependant, elle nous semble plus naturelle dans la mesure où elle s'appuie sur l'ordre partiel "habituel" de $\mathbb{R}_+^2$, et non pas sur l'ordre partiel "perpendiculaire" qui sert à définir les chemins croissants optionnels (cf. /19/).

On considère l'espace $\underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}})$ muni de la topologie faible $\sigma(\underline{\underline{C}}'(\bar{\mathbb{R}}), \underline{\underline{C}}(\bar{\mathbb{R}}))$. L'ensemble des variables aléatoires floues, noté $\underline{\underline{V}}_{fb}$, est le sous-ensemble de la boule unité qui correspond à des processus V croissants cad-lag sur $\mathbb{R}$, tels que : $\lim_{u \downarrow -\infty} V_u = 0$, $\lim_{u \uparrow +\infty} V_u \leq V_\infty = 1$. La restriction de la topologie faible à $\underline{\underline{V}}_{fb}$ est appelée topologie de Baxter et Chacon. Il est bien connu que $\underline{\underline{V}}_{fb}$ est convexe, compact, et que l'ensemble de ses éléments extrémaux, qui correspond aux processus qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1, s'identifie avec l'ensemble $\underline{\underline{V}}_b$ des v.a. sur $\bar{\mathbb{R}}$ (cf. /1/, /15/, /10/). De plus cette topologie sur $\underline{\underline{V}}_{fb}$ est métrisable si $\underline{\underline{F}}_\infty$ est séparable.

Définition 3 : On appelle système d'arrêt flou brut un couple $S = (A,V)$ formé d'une ligne de séparation floue $A \in \underline{\underline{L}}_{fb}$ et d'une v.a. floue $V \in \underline{\underline{V}}_{fb}$. Un système d'arrêt flou est un système d'arrêt flou brut $S = (A,V)$ tel que A soit une ligne d'arrêt floue et tel que V soit $\underline{\underline{F}}_A$-mesurable, soit par définition:

$$\forall\, b \in \mathbb{R},\ \forall\, z \in \mathbb{R}_+^2 : \quad V_b\, A_z \quad \text{est } \underline{\underline{F}}_z\text{-mesurable} .$$

On appelle système d'arrêt un système d'arrêt flou (A,V) tel que les processus A et V ne prennent que les valeurs 0 ou 1.

On note $\underline{\underline{S}}_{fb}$ (resp. $\underline{\underline{S}}_f$, $\underline{\underline{S}}$) l'ensemble des systèmes d'arrêt flous bruts (resp. systèmes d'arrêt flous, systèmes d'arrêt). Le résultat suivant précise les propriétés géométriques de ces ensembles. Il est analogue à celui obtenu dans /13/ et /17/ pour les stratégies floues.

Proposition 5 : i) Etant donné $(A,V) \in \underline{\underline{S}}_f$, la coupe en A de $\underline{\underline{S}}_f$: $\underline{\underline{S}}_f(A) = \{V' \in \underline{\underline{V}}_{fb} \text{ t.q. } (A,V') \in \underline{\underline{S}}_f\}$ est convexe dans $\underline{\underline{V}}_{fb}$ et l'ensemble de ses éléments extrémaux coïncide avec $\underline{\underline{V}}_b \cap \underline{\underline{S}}_f(A)$.
ii) Etant donné $(A,V) \in \underline{\underline{S}}_f$ avec $V \in \underline{\underline{V}}_b$, la coupe en V de $\underline{\underline{S}}_f$: $\underline{\underline{S}}_f(V) = \{A' \in \underline{\underline{L}}_f \text{ t.q. } (A',V) \in \underline{\underline{S}}_f\}$ est convexe dans $\underline{\underline{L}}_f$ et l'ensemble de ses points extrémaux coïncide avec $\underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{S}}_f(V)$.

Démonstration: Elle est identique à celle de la Proposition 2.8 de /13/. L'assertion i) est simple à établir; on montre ii). Soit $(A,V) \in \underline{\underline{S}}_f$

avec $V \in \underline{\underline{V}}_b$. Etant donné $A \in \underline{\underline{S}}_f(V)$, on pose

$$\forall\, z \in \overline{\mathbb{K}}^2 \;:\; A'_z = (\lambda \wedge A_z)/\lambda \quad \text{et} \quad A''_z = ((A_z - \lambda) \vee 0)/(1-\lambda) \;;$$

montrons tout d'abord que (A',V) et (A'',V) sont dans $\underline{\underline{S}}_f(V)$. Comme A' et A'' sont des lignes d'arrêt floues de manière évidente, il reste à vérifier la condition d'adaptation. Par exemple pour (A',V) on a pour $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} V_b\,(\lambda \wedge A_z) &= V_b\, A_z\, \mathbb{1}_{\{\lambda \geq A_z\}} + \lambda\, V_b\, \mathbb{1}_{\{\lambda < A_z\}} \\ &= V_b\, A_z\, \mathbb{1}_{\{\lambda \geq A_z\}} + \lambda\, \mathbb{1}_{\{V_b\, A_z > 0\}}\, \mathbb{1}_{\{\lambda < A_z\}}, \end{aligned}$$

car V_b s'écrit aussi $\mathbb{1}_{\{V_b > 0\}}$ si V est extrémal. Cette dernière expression est $\underline{\underline{F}}_z$-mesurable. Le raisonnement est identique pour (A'',V). Donc si A ne prend pas p.s. les valeurs 0 ou 1, alors il ne peut pas être extrémal, puisqu'on a : $A = \lambda A' + (1-\lambda)A''$ avec A, A', A'' distincts. On a déjà vu que les éléments de $\underline{\underline{L}}_f$ qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1 sont des lignes d'arrêt. On a ainsi démontré l'assertion ii), puisque l'extrémalité des éléments de $\underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{S}}_f$ est évidente.

On munit maintenant l'ensemble des systèmes d'arrêt flous bruts $\underline{\underline{S}}_{fb}$ de la topologie produit des topologies de Baxter et Chacon sur $\underline{\underline{L}}_{fb}$ et $\underline{\underline{V}}_{fb}$, appelée également topologie de Baxter et Chacon. Par définition $\underline{\underline{S}}_{fb}$ s'identifie à un sous-ensemble fermé de l'espace localement convexe $(\underline{\underline{C}}(\overline{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}}))' \times \underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}})$. Le résultat suivant précise les propriétés topologiques de $\underline{\underline{S}}_f$.

<u>Proposition 6</u> : L'ensemble des systèmes d'arrêt flous $\underline{\underline{S}}_f$ est fermé dans $\underline{\underline{S}}_{fb}$, donc compact pour la topologie de Baxter et Chacon.

<u>Démonstration</u>: Elle est tout à fait analogue à celle de la Proposition 2.10 de /13/ pour les stratégies floues; on en rappelle ici les grandes lignes seulement. Dans un premier temps, on montre que l'ensemble $\underline{\underline{S}}_f$ est en correspondance biunivoque avec le sous-ensemble des couples (Ψ,Φ) de $(\underline{\underline{C}}(\overline{\mathbb{K}}^2) \otimes \underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}}))' \times \underline{\underline{C}}'(\overline{\mathbb{R}})$ tels que Ψ s'identifie à une ligne d'arrêt floue A et Φ à une v.a. floue V, et tels que les conditions suivantes soient satisfaites. Pour tout (s,t), toute fonction $f \in C(\overline{\mathbb{K}}^2)$ nulle hors de $[(0,0),(s,t)]$, pour toute fonction $g \in C(\overline{\mathbb{R}})$ nulle hors de $]-\infty,b]$ et pour toute v.a. intégrable ξ, on a pour $-t \leq a \leq s$:

$$E\Big[(\xi - E(\xi/\underline{\underline{F}}_{s,t}))\int_{\overline{\mathbb{R}}} g(u)\, dV_u \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} f(v+a,v)\, dA^a_v\Big] = 0 \quad .$$

On établit cette caractérisation comme la Proposition 3 précédente, et comme la Proposition 2.9 de /13/. Dans un deuxième temps, on vérifie que pour des fonctions f et g, $a \in \mathbb{R}$, et pour une v.a. ξ comme ci-dessus, l'application définie sur $\underline{\underline{S}}_{fb}$ par $(A,V) \to E(\xi \int_{\overline{\mathbb{R}}} g(u)\, dV_u \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} f(v+a,v)\, dA^a_v)$ est bilinéaire et bicontinue, donc continue (cf. /18/, III Théorème 5.1). On en déduit ensuite aisément que $\underline{\underline{S}}_f$ est fermé dans $\underline{\underline{S}}_{fb}$ et que $\underline{\underline{S}}_f$ est donc compact, car $\underline{\underline{S}}_{fb}$ est lui même compact comme sous-ensemble fermé de la boule unité de $(C(\overline{\mathbb{R}}^2)\otimes C'(\mathbb{R}))'\times C'(\mathbb{R})$.

5 - SYSTEMES D'ARRET ET POINTS D'ARRET OPTIMAUX : Dans ce paragraphe on résout un problème d'optimisation pour les systèmes d'arrêt, puis pour les points d'arrêt. Soit $Y = (Y_z \, ; \, z \in \overline{\mathbb{R}}^2)$ un processus s.c.s. adapté, positif et borné. Le problème considéré dans le premier paragraphe consiste à établir l'existence d'un point d'arrêt T* tel que

$$E(Y_{T^*}) = \sup\{E(Y_T) \, ; \, T \in \underline{\underline{T}}\} \quad .$$

Dans /13/ et /17/, un tel résultat est obtenu en utilisant les notions de chemins croissants optionnels flous et de stratégies floues. On prouve ce résultat ici dans le cadre des systèmes d'arrêt flous. On étudie ensuite l'identité entre systèmes d'arrêt et points d'arrêt.

On définit une forme bilinéaire G sur l'espace vectoriel localement convexe engendré par $\underline{\underline{S}}_{fb}$ en posant :

$$\forall\ (A,V) \in \underline{\underline{S}}_{f,b} \ : \ G(A,V) = E\left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} Y_{a+t,t}\, dA_t^a\right) dV_a\right) .$$

Proposition 7 : Soit Y un processus continu (ou semi-continu supérieurement) sur $\overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $E(\sup_z |Y_z|) < \infty$. Alors la forme bilinéaire G est continue (s.c.s.) sur $\underline{\underline{S}}_f$ pour la topologie de Baxter et Chacon.

Démonstration: Soit Y continu. Montrons que les applications partielles G(A,.) et G(V,.) sont continues sur $\underline{\underline{V}}_f$ et $\underline{\underline{L}}_f$ respectivement, pour (A,V) fixé de $\underline{\underline{S}}_f$. D'après la Proposition 2, le processus $(\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} Y_{a+t,t}\, dA_t^a ; a \in \overline{\mathbb{R}})$ est continu, et donc G(A,.) est une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{V}}_f$ par définition de la topologie de Baxter et Chacon sur $\underline{\underline{V}}_f$. La continuité de la forme linéaire G(.,V) est évidente par définition de la topologie sur $\underline{\underline{L}}_f$. Comme la tribu $\underline{\underline{F}}_\infty$ est supposée séparable, les topologies de Baxter et Chacon considérées ici sont métrisables. On utilise alors un résultat d'analyse (cf. /18/, III-Théorème 5.1) pour déduire des continuités des applications partielles, la continuité de la forme bilinéaire G sur l'espace vectoriel engendré par $\underline{\underline{S}}_{fb}$. L'approximation des processus s.c.s. par des processus continus prouvée dans /5/ permet d'achever la démonstration lorsque le processus Y est s.c.s..

On établit maintenant l'existence de systèmes d'arrêt optimaux par le même procédé que dans /13/.

Proposition 8 : Etant donné un processus Y semi-continu supérieurement, il existe au moins un système d'arrêt (A*,V*) tel que :

$$G(A^*,V^*) = \sup\{G(A,V) \ ; \ (A,V) \in \underline{\underline{S}}_f\} \quad .$$

<u>Démonstration</u>: L'application G étant s.c.s. sur le compact $\underline{\underline{S}}_f$, il existe un système d'arrêt flou (A**,V**) solution du problème d'optimisation posé. Pour A** fixé, l'application G(A**,.) est linéaire s.c.s. sur la coupe $\underline{\underline{S}}_f(A^{**})$. Comme $\underline{\underline{S}}_f$ est fermé, l'ensemble $\underline{\underline{S}}_f(A^{**})$ l'est aussi et est donc compact. De plus, il est contenu dans un espace localement convexe $C'(\mathbb{R})$ pour la topologie faible. On déduit d'un résultat de topologie générale (cf. /3/ XV, 2.7, Proposition 1) que G(A**,.) atteint son maximum en un élément extrémal, c'est à dire une v.a. V*, d'après la Proposition 5. On fixe alors V*, et on considère l'application G(.,V*) sur $\underline{\underline{S}}_f(V^*)$. Cet ensemble est compact car c'est un sous-ensemble fermé de $\underline{\underline{L}}_f$, et il est contenu dans un espace topologique localement convexe, $(C(\overline{\mathbb{R}}^2) \otimes C'(\overline{\mathbb{R}}))'$. De plus, d'après la Proposition 5, du fait que V* est une v.a., $\underline{\underline{S}}_f(V^*)$ est convexe et ses points extrémaux sont des lignes d'arrêt. Comme précédemment, on obtient que G(.,V*) réalise son maximum en un élément extrémal A*. Finalement, on a

$$G(A^*,V^*) = G(A^{**},V^*) = G(A^{**},V^{**}) = \sup\{ G(A,V) \,;\, (A,V) \in \underline{\underline{S}}_f \} ,$$

et (A*,V*) est un système d'arrêt.

Pour conclure, il nous faut maintenant préciser les rapports existant entre les systèmes d'arrêt introduits ici et les points d'arrêt.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit Δ_a la droite d'équation $s-t=a$. Tout point $z=(s,t)$ de $\mathbb{R}^2$ admet une représentation paramétrique (a,u) définie par $u=t$, $a=s-t$; on suppose que le point à l'infini de $\overline{\mathbb{R}}^2_+$ est représenté par tous les couples (a,∞) où $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit L une ligne d'arrêt fixée non réduite à $\{\infty\}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, notons L_a l'intersection de L avec Δ_a, et soit $(a,L(a))$ la représentation paramétrique de L_a. On convient que ∞ appartient à toutes les lignes d'arrêt. Définissons une nouvelle filtration $\tilde{\underline{\underline{F}}}$ associée à la représentation paramétrique de $\overline{\mathbb{R}}^2_+$. On étend la filtration $\underline{\underline{F}}$ à $\mathbb{R}^2$ en supposant que si $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_+$, $\underline{\underline{F}}_t$ est la tribu des ensembles négligeables. Pour tout $(a,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, posons $\tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a,u)} = \underline{\underline{F}}_{(a+u,u)}$; soit $\tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a,u)} = \underline{\underline{F}}_\infty$ pour $(a,u) \in (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}_+) \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On vérifie facilement qu'une v.a. $Z=(S,T)$, de représentation paramétrique $(\alpha = S-T, \upsilon = T)$, est un ($\underline{\underline{F}}$) point d'arrêt si et seulement si la v.a. (α,υ) est un $\tilde{\underline{\underline{F}}}$-point d'arrêt, c'est à dire si :

$$\{\alpha \leq a\} \cap \{\upsilon \leq u\} \in \tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a,u)} \quad , \forall\, a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, u \in \mathbb{R}_+ .$$

De même, si A est une ligne d'arrêt floue, alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, le processus A^a est adapté à la filtration $\tilde{\underline{\underline{F}}}^a = (\tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a,u)} \,;\, u \in \mathbb{R}_+)$.

On se donne maintenant un système d'arrêt (A,V). Il est clair d'après la Définition 3 qu'il détermine de manière unique une ligne d'arrêt d'arrêt L, telle que $\forall\, z \in \mathbb{R}^2_+ : A_z = 1\!\!1_{\{L \leq z\}}$, et une variable aléatoire α dans $\overline{\mathbb{R}}$, telle que $\forall\, a \in \mathbb{R} : \quad V_a = 1\!\!1_{\{\alpha \leq a ,\, \alpha \neq \infty\}}$. De plus α est $\underline{\underline{F}}_L$-mesurable.

Le résultat suivant montre qu'un système d'arrêt définit en fait un point d'arrêt.

> <u>Lemme 9</u> : Etant donné une ligne d'arrêt L et une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_L$-mesurable α à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, le point aléatoire Z défini comme l'intersection de L avec la droite Δ_α d'équation $s-t=\alpha$ sur $\{L \neq \infty$ et $\alpha \neq \infty\}$, et comme le point à l'infini de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$ sur $\{L=\infty$ ou $\alpha=\infty\}$, est un point d'arrêt.

<u>Démonstration</u> : Le point Z, de coordonnées cartésiennes (S,T), a pour représentation paramétrique $(\alpha, L(\alpha))$. Pour prouver que Z est un point d'arrêt, il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}_+$, l'événement $\{\alpha \leq a \;,\; L(\alpha) \leq u\}$ appartient à la tribu $\tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a,u)}$.
Comme l'application $a \to L(a)$ est décroissante et continue, on a

$$\{\alpha \leq a \;,\; L(\alpha) \leq u\} = \bigcap_n \bigcup_{k=-\infty}^{[a2^n]} \{k2^{-n} < \alpha \leq (k+1)2^{-n} \;;\; L((k+1)2^{-n} \leq u\} .$$

Comme α est $\underline{\underline{F}}_L$-mesurable, le membre de droite de cette égalité appartient à la tribu $\tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a,u)} = \bigcap_n \tilde{\underline{\underline{F}}}_{(a+2^{-n},u)}$; ceci permet de conclure.

On peut remarquer que pour une ligne d'arrêt quelconque L, la tribu $\underline{\underline{F}}_L$ peut être assez petite. Il est facile de voir que si Z est un p.a. porté p.s. par L (i.e. $\mathbb{P}(Z \in L$ ou $Z=\infty) = 1$), alors $\underline{\underline{F}}_L \subset \underline{\underline{F}}_Z$. En revanche, si Z est un p.a. quelconque et si L est le début de $\{z : z \geq Z\}$, alors $\underline{\underline{F}}_L = \underline{\underline{F}}_Z$. Ces considérations nous amènent au résultat suivant.

> <u>Lemme 10</u> : Soit Z = (S,T) un point d'arrêt. La ligne d'arrêt début de $\{z : z \geq Z\}$, L, et la variable aléatoire $\alpha = S-T$ définissent un système d'arrêt qui détermine Z au sens du Lemme 9.

<u>Démonstration</u> : Il s'agit de vérifier que α est bien $\underline{\underline{F}}_L$-mesurable. Or on a $\underline{\underline{F}}_L = \underline{\underline{F}}_Z$, donc Z = (S,T) est $\underline{\underline{F}}_L$-mesurable; cela entraîne que $\alpha = S-T$ l'est aussi. Le système d'arrêt (A,V) est alors défini par

$$\forall\, z \in \mathbb{R}_+^2 : A_z = \mathbb{1}_{\{z \geq L\}} \quad \text{et} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} : V_a = \mathbb{1}_{\{\alpha \leq a\}} .$$

Il est ensuite évident qu'il détermine Z au sens du Lemme 9.

Ce résultat suggère de plonger l'ensemble des points d'arrêt dans l'ensemble des systèmes d'arrêt, lui même contenu dans l'ensemble des systèmes d'arrêt flous. Cependant, comme la représentation du Lemme 10 n'est pas nécessairement unique, on ne peut parler d'identification, et il faut s'assurer que celà ne soulève aucune difficulté quant au problème posé. C'est l'objet du lemme suivant.

<u>Lemme 11</u> : Soit (A,V) un système d'arrêt et soit Z le point d'arrêt associé par le Lemme 9. Pour tout processus s.c.s. Y sur $\overline{\mathbb{K}}^2$ tel que $E(\sup_z |Y_z|) < \infty$, on a

$$G(A,V) = E(Y_Z) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : La vérification est immédiate pour des processus Y continus. Le cas où Y est s.c.s. borné résulte alors immédiatement du résultat d'approximation de /5/. On étend ensuite au cas général.

En conclusion, la fonction G atteint son maximum en un système d'arrêt (A^*,V^*) d'après la Proposition 8. Ce système d'arrêt détermine un point d'arrêt Z^* d'après le Lemme 9, et le maximum de G vaut $E(Y_{Z^*})$ d'après le Lemme 11. D'après les Lemmes 10 et 11, on a aussi

$$\sup_{Z\in\underline{\underline{T}}} E(Y_Z) = \sup_{(A,V)\in\underline{\underline{S}}} G(A,V) \quad .$$

Finalement, en récapitulant, on a bien :

$$\sup_{Z\in\underline{\underline{T}}} E(Y_Z) = E(Y_{Z^*})$$

Nous pouvons donc résumer l'étude précédente dans le

<u>Théorème 12</u> : Soit Y un processus indicé par $\overline{\mathbb{K}}^2$, semi-continu supérieurement tel que $E(\sup_z |Y_z|) < \infty$. Alors il existe un point d'arrêt optimal Z^*, i.e. tel que

$$\sup_{Z\in\underline{\underline{T}}} E(Y_Z) = E(Y_{Z^*}) \quad .$$

REFERENCES:

/1/ J.R. BAXTER et R.V. CHACON : Compactness of stopping times. Z. Wahr. v. Geb. 40 (1981), 169-181.

/2/ J.M. BISMUT : Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt et retournement du temps. Ann. Prob. 7-6 (1979), 933-964.

/3/ N. BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques. Hermann, Paris 1971.

/4/ R. CAIROLI et J.B. WALSH : Stochastic integrals in the plane. Acta Mathematica 134 (1975), 11-183.

/5/ R.C. DALANG : Sur l'arrêt optimal de processus à temps multidimensionnel continu. Sém. Proba. XVIII. Lect. N. Maths 1059, Springer-Verlag, Berlin 1984.

/6/ C. DELLACHERIE et P.A. MEYER : Probabilités et Potentiel. Hermann, Paris 1975.

/7/ C. DELLACHERIE, P.A. MEYER et M. YOR : Sur certaines propriétés des espaces H1 et BMO. Sém. Proba XII. Lect. N. Maths 649. Springer-Verlag, Berlin 1978.

/8/ G.A. EDGAR, A. MILLET et L. SUCHESTON : On compactness and optimality of stopping times. Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach spaces. Lect. N. Maths 939. Springer-Verlag, Berlin 1981, pp. 36-61.

/9/ N. EL KAROUI : Les aspects probabilistes du controle stochastique. Ecole d'Eté de Saint-Flour IX-1979. Lect. N. Maths 876, Springer-Verlag, Berlin 1981.

/10/ N. GHOUSSOUB : An integral representation of randomized probabilities and its applications. Sém. Proba. XVI. Lect. N. Maths 920. Springer-Verlag, Berlin 1982 .

/11/ U. KRENGEL et L. SUCHESTON : Stopping rules and tactics for processes indexed by directed sets. J. Mult. Anal. 11 (1981), 199-229.

/12/ A. MANDELBAUM et R.J. VANDERBEI : Optimal stopping and supermartingales over partially ordered sets. Z. Wahr. V. Geb. 57 (1981), 253-264.

/13/ G. MAZZIOTTO et A. MILLET : Stochastic control of two-parameter processes. Proposé pour publication 1984.

/14/ E. MERZBACH : Stopping for two-dimensional stochastic processes. Stoch. Proc. and Appl. 10 (1980), 49-63.

/15/ P.A. MEYER : Convergence faible et compacité des temps d'arrêt d'après Baxter et Chacon. Sém. Proba XII. Lect. N. Maths 649. Springer-Verlag, Berlin 1978.

/16/ P.A. MEYER : Théorie élémentaire des processus à deux indices. Colloque ENST-CNET sur les processus à deux indices. Lect. N. Maths 863. Springer-Verlag, Berlin 1981.

/17/ A. MILLET : On randomized tactics and optimal stopping in the plane. Annals Prob. 13 (1985), à paraître.

/18/ H.H. SCHAEFER : Topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin 1971.

/19/ J.B. WALSH : Optional increasing paths. Colloque ENST-CNET sur les processus à deux indices. Lect. N. Maths 863. Springer-Verlag, Berlin 1981.

/20/ E. WONG et M. ZAKAI : Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter. Z. Wahr. V. Geb. 29 (1974), 109-122.

G. MAZZIOTTO

PAA/TIM/MTI - C.N.E.T.
38-40, rue du Général Leclerc
92 131 - ISSY LES MOULINEAUX

A. MILLET

Université d'Angers, Faculté des Sciences
2, boulevard Lavoisier
49 045 - ANGERS