SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

HALIM DOSS
MARCO DOZZI

Estimation de grandes déviations pour les processus de diffusion à paramètre multidimensionnel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 68-80
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__68_0>

ESTIMATIONS DE GRANDES DÉVIATIONS POUR LES PROCESSUS DE DIFFUSION A PARAMÈTRE MULTIDIMENSIONNEL

H. Doss * et M. Dozzi **

INTRODUCTION

On utilise les techniques introduites en [1] et [4] pour démontrer les estimations de Ventsel et Freidlin dans le cadre de la théorie des processus à plusieurs paramètres, solutions d'équations différentielles stochastiques. L'extension de ces résultats au cas multidimensionnel n'est pas réductible à la théorie connue pour les processus à un paramètre à valeurs $\mathbb{R}^d$; elle se présente, en fait, comme la démonstration d'estimations de grandes déviations pour les perturbations aléatoires de diffusions en dimension infinie, à valeurs l'espace des fonctions continues $\underline{\underline{C}}([0,T]^n, \mathbb{R}^d)$.

On considère, d'abord, les grandes déviations pour le mouvement Brownien B à n paramètres (Théorème 1) comme conséquence des résultats de grandes déviations pour des mesures Gaussiennes sur un espace de Banach séparable. Ce résultat est étendu ensuite aux solutions d'équations différentielles stochastiques par rapport à B (Théorème 3). Comme dans le cas d'un paramètre unidimensionnel, les démonstrations se font à l'aide d'une inégalité exponentielle pour les martingales fortes à n paramètres et d'un théorème de Caméron-Martin. La section finale contient une application à l'étude de l'équation de la chaleur en dimension infinie.

I. GRANDES DÉVIATIONS POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN À N PARAMÈTRES

Soit $B = (B_{(t_1,\dots,t_n)})_{(t_1,\dots,t_n)\in[0,T]^n}$ un mouvement Brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, à n paramètres, issu de zéro, défini sur un espace de probabilités

---

* Université de Paris VI, Laboratoire de Probabilités, 4, Place Jussieu (Tour 56), 75230 Paris Cedex 05.

** Institut für math. Statistik, Universität Bern, Sidlerstr.5, CH-3012 Berne.
Recherche soutenue par le Fonds national Suisse de la recherche scientifique (bourse No. 82.185.0.84) et effectuée lors de la visite au Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

$(\Theta,(\mathcal{F}_t)_{t=(t_1,\dots,t_n)},P)$. Notons W la loi du processus $B=(B_{(t_1,\dots,t_n)})$ sur l'espace des fonctions continues $\Omega=\mathcal{C}([0,T]^n,\mathbb{R}^d)$, muni de la norme uniforme.

Soit H le sous-ensemble de Ω défini par

(*) $H=\{\gamma\in\Omega$ t.q. $\gamma(t_1,\dots,t_n) = \int_{[0,t_1]\times\dots\times[0,t_n]}\dot\gamma(s_1,\dots,s_n)ds_1\dots ds_n$

pour tout $(t_1,\dots,t_n)\in[0,T]^n$ et tout $\dot\gamma\in L^2([0,T]^n,\mathbb{R}^d)\}$.

H est muni du produit scalaire $(\gamma,\eta) = \int_{[0,T]^n}\dot\gamma_s\cdot\dot\eta_s ds$ qui en fait un espace de Hilbert.

Soit μ l'application de Ω dans $[0,+\infty]$ définie par

$$\mu(\gamma)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{[0,T]^n}|\dot\gamma(s)|^2ds & \text{si } \gamma\in H,\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases} \tag{1}$$

On vérifie aisément que, pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, $\{\mu\le a\}$ est un compact de l'espace de Banach Ω.

<u>THÉORÈME 1.</u> Pour tout Borélien A de Ω, on a les estimations suivantes:

$$-\inf_{\gamma\in\mathring{A}}\mu(\gamma) \le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \varepsilon^2\log P\{\varepsilon B\in A\} \le -\inf_{\gamma\in\bar A}\mu(\gamma), \tag{2}$$

où $\mathring{A}$ et $\bar A$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de A.

La preuve de ce Théorème est une conséquence du résultat général suivant (cf [9] p.65).

<u>PROPOSITION 2.</u> Soit E un espace de Banach séparable et ν une mesure Gaussienne centrée sur E, de covariance $(\rho(t,t'))_{(t,t')\in(E^*)^2}$ (E^* désignant le dual topologique de E). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $S:\mathcal{H}\to E$ une application linéaire, injective et continue. On suppose que pour tout $t\in E^*$, on a $\|S^*(t)\|^2_{\mathcal{H}} = \rho(t,t)$. La transformée de Cramer $\tilde\nu$ de ν est alors donnée par la formule:

$$\tilde\nu(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\|S^{-1}(x)\|^2_{\mathcal{H}} & \text{si } x\in S(\mathcal{H})\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

<u>Preuve du Théorème 1.</u> Soit $S: H \longrightarrow \Omega$ l'injection canonique, alors S est continue, car si $\gamma \in H$, on a, d'après l'inégalité de Schwartz: $\|\gamma\|_\Omega \leq \sqrt{T^n}\|\gamma\|_H$. Ω^* s'identifie à l'ensemble des mesures bornées sur $[0,T]^n$, à valeurs $\mathbb{R}^d$. Soit $(\rho(\alpha,\beta))_{(\alpha,\beta)\in(\Omega^*)^2}$ la covariance de la mesure Gaussienne W. Il suffit, d'après la Proposition précédente, de vérifier que, pour tout $\alpha \in \Omega^*$ $\|S^*(\alpha)\|_H^2 = \rho(\alpha,\alpha)$. Si $(\alpha,\beta)\in(\Omega^*)^2$, on a:

$$\rho(\alpha,\beta) = E_W\{\int_{[0,T]^n} \omega(s_1,\ldots,s_n)\cdot\alpha(ds_1,\ldots,ds_n)\int_{[0,T]^n}\omega(s_1',\ldots,s_n')\cdot\beta(ds_1',\ldots,ds_n')\}$$

$$= \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^n\times[0,T]^n} (s_1\wedge s_1')\cdots(s_n\wedge s_n')\alpha_i(ds_1,\ldots,ds_n)\beta_i(ds_1',\ldots,ds_n')$$

$$\text{si } \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d),\ \beta=(\beta_1,\ldots,\beta_d)$$

$$= \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^{3n}} 1_{(u_1\leq s_1\wedge s_1',\ldots,u_n\leq s_n\wedge s_n')}\ \alpha_i(ds_1,\ldots,ds_n)\beta_i(ds_1',\ldots,ds_n')du_1\ldots du_n$$

$$= \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^n} \alpha_i([u_1,T],\ldots,[u_n,T])\beta_i([u_1,T],\ldots,[u_n,T])du_1\ldots du_n .$$

D'autre part, $S^*\alpha$ est la forme linéaire sur H:

$$h\in H \longrightarrow \alpha(Sh) = \alpha(h) = \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^n} \alpha_i(ds_1,\ldots,ds_n)h_i(s_1,\ldots,s_n)$$

$$= \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^n\times[0,T]^n} \alpha_i(ds_1,\ldots,ds_n)\ 1_{(s_1'\leq s_1,\ldots,s_n'\leq s_n)}\ \dot{h}_i(s_1',\ldots,s_n')ds_1'\ldots ds_n'$$

$$= \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^n} \dot{h}_i(s_1',\ldots,s_n')\alpha_i([s_1',T],\ldots,[s_n',T])ds_1'\ldots ds_n'$$

donc $\|S^*(\alpha)\|_H^2 = \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]^n} (\alpha_i([s_1',T],\ldots,[s_n',T]))^2 ds_1'\ldots ds_n' = \rho(\alpha,\alpha)$. □

On se propose maintenant d'étendre le résultat de grandes déviations, énoncé en (2) pour le mouvement Brownien, aux solutions d'équations stochastiques à paramètre multidimensionnel, en suivant une démarche analogue à celle de [4].

II. ESTIMATIONS DE VENTSEL ET FREIDLIN

On supposera, dans la suite, que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]^n}$ est la filtration engendrée par le mouvement Brownien $B=(B^1,\dots,B^d)$, à valeurs $\mathbb{R}^d$, à n paramètres issu de zéro. Pour $\varepsilon>0$, soit $X^\varepsilon=(X_t^\varepsilon)_{t\in[0,T]^n}$ la solution de

$$(3)\qquad X_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon + \varepsilon\int_{[0,t]}\sigma(X_s^\varepsilon)dB_s + \int_{[0,t]} b^\varepsilon(X_s^\varepsilon)ds\ ,$$

où $x^\varepsilon\in\mathcal{C}([0,T]^n,\mathbb{R}^p)$, $\sigma=(\sigma^{i,j})_{i=1,\dots,p;j=1,\dots,d}$, $\sigma^{i,j}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $b^\varepsilon=(b^{\varepsilon,i})_{i=1,\dots,p}$, $b^{\varepsilon,i}:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$.

On suppose que

1) $\sigma^{i,j}$ et $b^{\varepsilon,i}$ sont lipschitziennes, pour tous i,j;

2) $x^\varepsilon\to x$ dans $\mathcal{C}([0,T]^n,\mathbb{R}^p)$ quand $\varepsilon\to 0$,
$b^\varepsilon\to b$ uniformément sur $\mathbb{R}^p$, quand $\varepsilon\to 0$.

Pour l'existence et l'unicité de la solution X^ε de l'équation (3), sous les hypothèses précédentes, voir, par exemple [5].
Soit maintenant H l'espace de Hilbert défini par (*) et $\Omega=\mathcal{C}([0,T]^n,\mathbb{R}^d)$; soit $\Phi_x:H\subset\Omega\to\Omega'=\mathcal{C}([0,T]^n,\mathbb{R}^p)$ donnée par

$$(4)\qquad \Phi_x(\gamma)(t) = x_t + \int_{[0,t]}\sigma(\Phi_x(\gamma)(s))d\gamma_s + \int_{[0,t]} b(\Phi_x(\gamma)(s))ds$$

où $\gamma\in H$, $x\in\Omega'$, $t\in[0,T]^n$. On définit $\lambda:\Omega'\to[0,+\infty]$ par

$$(5)\qquad \lambda(\omega) = \begin{cases}\inf\limits_{\gamma\in\Phi_x^{-1}(\omega)}\mu(\gamma) & \text{si } \Phi_x^{-1}(\omega) \text{ est non vide,}\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour A, Borélien de Ω' (muni de la norme uniforme), on posera $\Lambda(A) = \inf\limits_{\omega\in A}\lambda(\omega)$. On considère le processus $(X_t^\varepsilon)_{t\in[0,T]^n}$, solution de (3), comme une application mesurable X^ε de Ω dans Ω', Ω étant muni de la mesure de Wiener W.

THÉORÈME 3. Sous les hypothèses 1) et 2), on a les propriétés suivantes:

i) Pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, $\{\lambda\le a\}$ est compact dans l'espace de Banach Ω';

ii) Pour tout Borélien A de Ω', on a

$$-\Lambda(\overset{\circ}{A}) \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \varepsilon^2 \log P\{X^\varepsilon \in A\} \leq -\Lambda(\bar{A}) .$$

Dans le cas où $b^\varepsilon=0$, $x^\varepsilon=0$, $p=d$, $\sigma=Id$, le Théorème 3 se réduit au résultat de grandes déviations pour εB (Théorème 1). Pour démontrer ce Théorème, on se ramène au cas du mouvement Brownien grâce aux estimations suivantes:
Soient $\gamma\in H$, $z\in\mathcal{C}([0,T]^n,\mathbb{R}^p)$ et $h=\Phi_z(\gamma)$ donnée par l'équation (4) où on remplace x par z.

<u>LEMME 4.</u> Pour tout a, R, $\rho>0$, il existe ε_0, α, $r>0$ tels que

(6) $$P\{\| X^\varepsilon-h\|_T>\rho,\ \|\varepsilon B-\gamma\|_T<\alpha\} \leq \exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$$

pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$, γ tel que $\mu(\gamma)\leq a$, z tel que $\|z-x\|_T<r$ ($\|\cdot\|_T$ désigne la norme uniforme sur $\mathcal{C}([0,T]^n,\cdot)$).

La preuve du Lemme 4 est basée sur une extension, au cas d'un paramètre multidimensionnel, des propriétés suivantes:

<u>PROPOSITION 5</u> (majoration exponentielle). Soit $M=(M_t)$ une $(\mathcal{F}_t,P)$-martingale forte continue, nulle sur les axes. Supposons qu'il existe une fonction $f:\mathbb{R}_+^n \longrightarrow]0,+\infty[$ telle que, pour tout t, $P(A_t>f_t)=0$, où
$A=(A_t)$ est le processus croissant continu associé à M (cf [2]). Il existe alors des constantes a_n et b_n dépendant de n seulement tel que

(7) $$P\{\sup_{s\in[0,t]} |M_s|\geq c\} \leq a_n \exp(-\frac{c^2}{b_n f_t}) \quad \text{pour tout } c>0.$$

<u>Preuve.</u> Fixons $t>0$ et posons $D=\{(s,\omega);|M_s(\omega)|\geq c\}\cap[0,t]\times\Omega$ et L=début (D). L'inégalité (7) se démontre en suivant une démarche analogue à celle de [12] qui consiste à décomposer M sur L et d'appliquer (7) aux martingales fortes à m paramètres (m<n) qui interviennent dans cette décomposition. Pour n=2, par exemple, on pose $X^1_{s_1}=M(D\cap[0,s_1]\times[0,t_2])$ et $X^2_{s_2}=M(D\cap[0,t_1]\times[0,s_2])$ $(s\leq t)$. X^1 et X^2 sont alors des martingales à paramètre unidimensionnel et pour $s\in L$ $M_s=X^1_{s_1}+X^2_{s_2}-M(D)$, où $M(D)=X^1_{t_1}=X^2_{t_2}$ [12].
On a donc

$$P(\sup_{s\in[0,t]} |M_s|\geq c) \leq P(\sup_{0\leq s_1\leq t_1} |X^1_{s_1}|\geq\frac{c}{3}) + P(\sup_{0\leq s_2\leq t_2} |X^2_{s_2}|\geq\frac{c}{3})$$

et on obtient (7) en appliquant l'inégalité exponentielle classique à

X^1 et X^2. □

Remarques. 1) La démonstration de la proposition 5 n'exige pas que la filtration soit engendrée par le mouvement brownien.

2) La validité de l'inégalité exponentielle (7) pour tout $c>0$ implique que les moments exponentiels $E\{\exp(\lambda|M_t|)\}$ sont finis pour tout $\lambda>0$. Or, dans [8], il est démontré, pour $n=2$, que $E\{\exp(\lambda \tilde{J}_1(B))\}$ $=+\infty$ pour $\lambda>1{,}81...$ où $J_.(B)$ est la mesure produit associée au drap Brownien. Comme $J_.(B)$ est une martingale (mais pas une martingale forte), (7) n'est pas valable pour toutes les martingales continues de carré intégrable.

PROPOSITION 6 (formule de Caméron-Martin). Soit $\gamma\in H$ où H est l'espace de Hilbert donné par (*). On définit une nouvelle probabilité Q sur la tribu $\tilde{\mathcal{F}}_{(T,\dots,T)}$ en posant $Q=M_{(T)}\cdot P$, où $M_{(T)} = \exp\left(\int_{[0,T]^n}\dot{\gamma}_s dB_s - \frac{1}{2}\|\gamma\|_H^2\right)$. Alors le processus $\tilde{B} = (B_t-\gamma_t)_{t\in[0,T]^n}$ est un $(\mathcal{F}_t,Q)$-mouvement Brownien.

Preuve. On peut se référer soit aux résultats sur l'équivalence des mesures Gaussiennes de [7] p. 113, en particulier, dont les démonstrations s'étendent facilement au cas d'un paramètre multidimensionnel, soit à [6] où la Proposition est démontrée pour $n=2$ (et γ pas nécessairement déterministe).

LEMME 7 (du type Gronwall). Soient f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^n$ où f est continue, croissante ($f(]t,t']) \geq 0$ pour tout $]t,t'] \subset \mathbb{R}_+^n$) et g est croissant pour l'ordre ($g_t \leq g_{t'}$ pour tous $t<t'$). Supposons qu'il existe des constantes $K_1, K_2 \geq 0$ telles que, pour tout t, $g_t \leq K_1 + K_2\int_{]0,t]} g_s df_s$.

Alors $g_t \leq 2K_1 \sum_{j=0}^{[2K_2 f_t]+1} (2K_2 f_t)^j$ où $[x]$ est la partie entière de x.

Preuve. Elémentaire et laissée au lecteur.

Preuve du Lemme 4. Le procédé suivi est analogue à la méthode utilisée dans le cas d'un indice unidimensionnel [4]. Vu le caractère local de l'estimation cherchée, on peut supposer σ et b^ε uniformément bornées. On démontre d'abord le Lemme en se ramenant au cas où $\gamma\equiv 0$ et en considérant, au lieu de X^ε, Y^ε vérifiant:

$$Y_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon + \varepsilon\int_{[0,t]}\sigma(Y_s^\varepsilon)dB_s + \int_{[0,t]}c^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon)ds$$

où $\qquad c^\varepsilon(s,y) = \sigma(y)\dot{\gamma}_s + b^\varepsilon(y) \qquad$ pour $y\in\mathbb{R}^p$.

Montrons que, pour tout $R>0$, $\rho>0$ et $a>0$, il existe $\alpha>0$ tel que si $0\leq\varepsilon\leq 1$ et $\mu(\gamma)\leq a$, alors:

(8) $$P\{\|\int_{[0,\cdot]}\varepsilon\sigma(Y_s^\varepsilon)dB_s\|_T>\rho,\ \|\varepsilon B\|_T<\alpha\} \leq \exp(-R/\varepsilon^2)\ .$$

Soient $t^k = (\frac{k_1T}{N}, \frac{k_2T}{N},\ldots,\frac{k_nT}{N})$ où $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $0\leq k_i\leq N$, $i=1,\ldots,n$ et $Y^{\varepsilon,N}$ défini par $Y_t^{\varepsilon,N}=Y_{t^k}^{\varepsilon,N}$ si $t\in[t^k,t^{k+1}[$, en posant $k+1=(k_1+1,\ldots, k_n+1)$. Alors:

(9) $$P\{\|\int_{[0,\cdot]}\varepsilon\sigma(Y_s^\varepsilon)dB_s\|_T > \rho, \|\varepsilon B\|_T < \alpha\}$$
$$\leq P\{\|Y^\varepsilon-Y^{\varepsilon,N}\|_T>\delta\} + P\{\|Y^\varepsilon-Y^{\varepsilon,N}\|_T\leq\delta,\ \|\int_{[0,\cdot]}\varepsilon(\sigma(Y_s^\varepsilon)-\sigma(Y_s^{\varepsilon,N}))dB_s\|_T > \rho/2\}$$
$$+ P\{\|\int_{[0,\cdot]}\varepsilon\sigma(Y_s^{\varepsilon,N})dB_s\|_T > \rho/2,\ \|\varepsilon B\|_T < \alpha\} = A_1 + A_2 + A_3.$$

σ étant lipschitzienne, on vérifie, grâce à l'inégalité exponentielle, que, pour δ bien choisi, on a $A_2 \leq \frac{1}{2}\exp(-R/\varepsilon^2)$ pour tout $0\leq\varepsilon\leq 1$. De plus,

$$A_1 \leq \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1} P\{\sup_{t\in[t^k,t^{k+1}[}\|Y_t^\varepsilon-Y_{t^k}^\varepsilon\| > \delta\}$$
$$\leq \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1}\{P(\sup_{t\in[t^k,t^{k+1}[}|\int_{[0,t]\div[0,t^k]}\varepsilon\sigma(Y_s^\varepsilon)dB_s| > \delta/2)$$
$$+ P(\sup_{t\in[t^k,t^{k+1}[}|\int_{[0,t]\div[0,t^k]}c^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon)ds| > \delta/2)\}\ .$$

En appliquant (7) et l'hypothèse que $\mu(\gamma)\leq a$, on conclut qu'il existe $N_0=N_0(a,R,\delta)$, tel que, pour $N\geq N_0$, on a $A_1 \leq \frac{1}{2}\exp(-R/\varepsilon^2)$ pour tout $0\leq\varepsilon\leq 1$. δ et N_0 étant ainsi choisis, on vérifie aisément que A_3 (où on pose $N=N_0$) est identiquement nul si α est assez petit. Ceci démontre (8). On écrit maintenant:

(10) $$Y^\varepsilon_t - h_t = \int_{[0,t]} \{[\sigma(Y^\varepsilon_s) - \sigma(h_s)]\dot{\gamma}_s + [b(Y^\varepsilon_s) - b(h_s)]\} ds + I_t$$

où $$I_t = x^\varepsilon_t - z_t + \int_{[0,t]} [b^\varepsilon(Y^\varepsilon_s) - b(Y^\varepsilon_s)] ds + \varepsilon \int_{[0,t]} \sigma(Y^\varepsilon_s) dB_s .$$

Appliquons le Lemme 7 à $g_t := \sup_{s \leq t} |Y^\varepsilon_s - h_s|$. On obtient $g_{(T)} \leq C(a) \|I\|_T$

où $C(a)$ est une constante qui dépend de a (et des constantes de Lipschitz de σ et b). De plus, puisque $x^\varepsilon \to x$ et $b^\varepsilon \to b$ uniformément, lorsque $\varepsilon \to 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $n > 0$ tels que

$$g_{(T)} \leq C(a) \| \varepsilon \int_{[0,\cdot]} \sigma(Y^\varepsilon_s) dB_s \|_T + \rho/2$$

pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ et z tel que $\|x-z\|_T < r$.

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que

(11) $$P\{\|Y^\varepsilon - h\|_T > \rho,\ \|\varepsilon B\|_T < \alpha\}$$

$$\leq P\{\| \varepsilon \int_{[0,\cdot]} \sigma(Y^\varepsilon_s) dB_s \|_T > \frac{\rho}{2C(a)},\ \|\varepsilon B\|_T < \alpha\} \leq \exp(-R/\varepsilon^2)$$

pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ et z tel que $\|x-z\|_T < r$.

Considérons enfin sur $(\Omega, \mathfrak{F}_{(T)})$ la probabilité Q^ε définie par:

$$\frac{dQ^\varepsilon}{dP} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{[0,T]} {}^n\dot{\gamma}_s dB_s - \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\gamma\|^2_H\right) ,$$

alors $\tilde{B}^\varepsilon_t = B_t - \frac{1}{\varepsilon}\gamma_t$ est un Q^ε-mouvement Brownien (Proposition 6) et

$$X^\varepsilon_t = x^\varepsilon_t + \int_{[0,t]} [b^\varepsilon(X^\varepsilon_s) + \sigma(X^\varepsilon_s)\dot{\gamma}_s] ds + \varepsilon \int_{[0,t]} \sigma(X^\varepsilon_s) d\tilde{B}^\varepsilon_s \quad Q^\varepsilon\text{-p.s.}$$

Soit $A = \{\|X^\varepsilon - h\|_T > \rho,\ \|\varepsilon B - \gamma\|_T < \alpha\}$ et $V^\varepsilon = \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{[0,T]} \dot{\gamma}_s dB_s)$, alors

$$P(A) \leq E_{Q^\varepsilon}\left(\frac{dP}{dQ^\varepsilon};\ A \cap (V^\varepsilon < \exp(\lambda/\varepsilon^2))\right) + P(V^\varepsilon > \exp(\lambda/\varepsilon^2))$$

$$\leq \exp\left(\frac{-\lambda + a}{\varepsilon^2}\right) + \exp\left(\frac{a+\lambda}{\varepsilon^2}\right) Q_\varepsilon\{\|X^\varepsilon - h\|_T > \rho,\ \|\varepsilon \tilde{B}^\varepsilon\| < \alpha\} .$$

On choisit λ pour que $\exp\left(\frac{-\lambda+a}{\varepsilon^2}\right) \leq \frac{1}{2} \exp(-R/\varepsilon^2)$ puis ε_0, α, $r > 0$ pour que le deuxième terme soit inférieur à $\frac{1}{2} \exp(-R/\varepsilon^2)$ pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, z tel que $\|z-x\|_T < r$ et γ tel que $\mu(\gamma) \leq a$. □

Remarque. Il nous semble intéressant de remarquer que le Lemme 4 reste valable si on remplace les composantes B^i $(i=1,\dots,d)$ de B par des martingales fortes $M_t^i := \int_{[0,t]} \varphi_s^i dB_s^i$ où (φ_t^i) est un processus adapté tel que $0<c<\varphi^i<C$, c et C étant des constantes.

Preuve du Théorème 3. Soit $\Phi=\Phi_x$: $H\subset\Omega \to \Omega'=\mathcal{C}([0,T]^n, \mathbb{R}^p)$ l'application définie par (4). Soit $a>0$ et $K(a)=\{\lambda\leq a\}\subset\Omega'$. μ étant la transformée de Cramer du mouvement Brownien (donnée par (1)), on vérifie, à l'aide du Lemme 7, que la restriction de Φ à $\{\mu\leq a\}$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme. $\{\mu\leq a\}$ étant compact dans l'espace de Banach Ω, on en déduit que $K(a)=\Phi(\{\mu\leq a\})$ est compact dans Ω', d'où i).
Pour démontrer ii), il suffit de prouver que:
pour tout $\delta>0$, tout $a>0$ et tout $h\in\Omega'$ tel que $\lambda(h)<\infty$, on a:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \varepsilon^2 \log P\{d(X^\varepsilon,K(a))\geq\delta\} \leq -a$$

où $d(X^\varepsilon,K(a))$ désigne la distance de X^ε au compact $K(a)$ dans Ω'

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \varepsilon^2 \log P\{d(X^\varepsilon,h)\leq\delta\} \geq -\lambda(h) .$$

Compte tenu du Lemme 4, la preuve de ces deux dernières inégalités suit, pas à pas, la démonstration faite dans le cas unidimensionnel (cf [4]). Nous laissons au lecteur le soin de la transcrire ici.

Remarque. Le Théorème 3 reste valable si les intégrands σ et b^ε dans (3) dépendent non seulement de X_s^ε, mais aussi du passé de X^ε avant s. Il est alors nécessaire de modifier les conditions de Lipschitz pour σ et b^ε (voir [5]).

III. UNE APPLICATION

Soit $(t_1,\dots,t_{n-1})\in\mathbb{R}_+^{n-1}$ et $t\in\mathbb{R}_+$. Considérons, pour $\bar{t}=(t,t_1,\dots,t_{n-1})$ l'équation:

$$(12)\quad X_{\bar{t}}^\varepsilon = x_{(0,t_1,\dots,t_{n-1})} + \varepsilon B_{\bar{t}} + \int_{[0,\bar{t}]} b(X^\varepsilon_{(s,s_1,\dots,s_{n-1})})ds\,ds_1\dots ds_{n-1} \quad (\varepsilon>0)$$

où $(B_{\bar{t}})_{\bar{t}\in[0,T]^n}$ est un mouvement Brownien réel à n paramètres, b: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

est lipschitzienne† et $x \in \mathcal{C}([0,T]^n, \mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $\overline{X}_t^\varepsilon = (X^\varepsilon_{\overline{t}})_{(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in [0,T]^{n-1}}$ et $\overline{x} = (x_{(0,t_1,\ldots,t_{n-1})})_{(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in [0,T]^{n-1}}$.

On définit ainsi une diffusion $\overline{X}^\varepsilon = (\overline{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0,T]}$ à valeurs l'espace $\Omega^{(n-1)} := \mathcal{C}([0,T]^{n-1}, \mathbb{R})$, solution de l'équation différentielle stochastique:

$$\overline{X}_t^\varepsilon = \overline{x} + \varepsilon \overline{B}_t + \int_0^t \overline{b}(\overline{X}_u^\varepsilon)du \tag{13}$$

où $\overline{B}_t = (B_{\overline{t}})_{(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in [0,T]^{n-1}}$ et $\overline{b}: \Omega^{(n-1)} \to \Omega^{(n-1)}$ est défini par:

$$\overline{b}(\omega) = \int_{[0,\cdot]} b(\omega_{s_1,\ldots,s_{n-1}})ds_1\ldots ds_{n-1} \quad (\omega \in \Omega^{(n-1)}) .$$

On vérifie que $\overline{B} = (\overline{B}_t)_{t \in [0,T]}$ est un processus de Wiener à valeurs l'espace de Banach $\Omega^{(n-1)}$.

<u>LEMME 8.</u> $\overline{X}^\varepsilon$ a comme générateur infinitésimal l'opérateur L^ε défini par

$$L^\varepsilon \varphi(\omega) = \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \varphi(\omega) + \varphi'(\omega) \cdot \overline{b}(\omega) \tag{14}$$

où φ est une fonction test, deux fois continûment différentiable au sens de Fréchet sur l'espace $\Omega^{(n-1)}$, à dérivées bornées (on notera $\mathcal{C}_b^2$ l'ensemble de ces fonctions) et Δ est le Laplacien généralisé.

<u>Preuve.</u> Rappelons la formule d'Itô dans l'espace de Wiener classique ([7], chap. III.5): pour $t<t'$, on a

$$\varphi(\overline{X}_{t'}^\varepsilon) = \varphi(\overline{X}_t^\varepsilon) + \int_t^{t'} \varphi'(\overline{X}_s^\varepsilon) \cdot d\overline{B}_s + \int_t^{t'} \{\varphi'(\overline{X}_s^\varepsilon) \cdot \overline{b}(\overline{X}_s^\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{tr} \varphi''(\overline{X}_s^\varepsilon)\} ds \tag{15}$$

où $\operatorname{tr} \varphi''(\omega) = \Delta \varphi(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi''(\omega)(e_i, e_i)$, $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ étant une b.o. de l'espace de Caméron-Martin $H \subset \Omega^{(n-1)}$ ([7] p.171). Comme l'intégrale stochastique dans (15) est une martingale, on a, P-p.s.

$$\frac{1}{t'-t} \{E(\varphi(\overline{X}_{t'}^\varepsilon) \mid \overline{X}_s^\varepsilon, s \le t) - \varphi(\overline{X}_t^\varepsilon)\} \xrightarrow[t' \downarrow t]{} \varphi'(\overline{X}_t^\varepsilon) \cdot \overline{b}(\overline{X}_t^\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{tr} \varphi''(\overline{X}_t^\varepsilon) . \quad \square$$

<u>Remarque.</u> Puisque $\varphi'(\omega)$ s'identifie à une mesure bornée sur $[0,T]^{n-1}$, on a:

† de classe C^2 à dérivées bornées

$$\varphi'(\omega)\cdot\bar{b}(\omega) = \int_{[0,T]^{n-1}} \bar{b}(\omega)(t_1,\dots,t_{n-1})\, \varphi'(\omega)(dt_1,\dots dt_{n-1})$$
$$= \int_{[0,T]^{n-1}} \int_0^{t_1}\!\!\cdots\int_0^{t_{n-1}} b(\omega_{s_1,\dots,s_{n-1}})ds_1\dots ds_{n-1}\, \varphi'(\omega)(dt_1,\dots,dt_{n-1}) .$$

Soit maintenant V: $\Omega^{(n-1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}_b^2$. Considérons la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante sur l'espace $\Omega^{(n-1)}$:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\omega) = \dfrac{\varepsilon}{2}\Delta\Psi(t,\omega) + \dfrac{\partial}{\partial\omega}\Psi(t,\omega)\cdot\bar{b}(\omega) + \dfrac{1}{\varepsilon}V(\omega)\Psi(t,\omega) , \\ \Psi(0,\omega) = \varphi(\omega) \quad ; \quad (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega^{(n-1)},\ \varphi\in\mathcal{C}_b^2 . \end{cases}$$

THÉORÈME 9. Il existe une solution unique de (16), de classe C^1 en t et $\mathcal{C}^2$ en ω. Elle est donnée par la formule

$$(17)\qquad \Psi(t,\omega) = E\{\varphi(\bar{X}_t^{\sqrt{\varepsilon},\omega})\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t V(\bar{X}_s^{\sqrt{\varepsilon},\omega})ds)\}$$

où $\bar{X}^{\varepsilon,\omega}$ est la solution de (13) avec, comme donnée initiale, $\bar{x}=\omega$.

Preuve. En utilisant le calcul différentiel stochastique établi dans le cadre des espaces de Banach (cf [7]), la démonstration est une transcription, en dimension infinie, des méthodes développées en [3]. □

Le Théorème 3 permet d'étudier le comportement de $\Psi=(\Psi^\varepsilon(t,\omega))$ quand $\varepsilon\longrightarrow 0$, en appliquant les résultats de [10].

COROLLAIRE. Soit Ψ^ε la solution de (16) avec, comme donnée initiale φ.
i) On a

$$(18)\qquad \varepsilon \log \Psi_1^\varepsilon(t,\omega) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} S(t,\omega) := \sup_{\gamma\in H}\{\int_0^t V(\Phi_s^\omega(\bar{\gamma}))ds-\mu(\gamma)\}$$

où $H\subset\Omega^{(n)}$ est donné par (*), $\bar{\gamma}_t=(\gamma_{(t,t_1,\dots,t_{n-1})})_{(t_1,\dots,t_{n-1})\in[0,T]^{n-1}}$, $\bar{\gamma}=(\bar{\gamma}_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{C}([0,T],\Omega^{(n-1)})$ et $\Phi^\omega(\bar{\gamma})$ est solution de

$$(19)\qquad \Phi_t^\omega(\bar{\gamma}) = \omega + \bar{\gamma}_t + \int_0^t \bar{b}(\Phi_s^\omega(\bar{\gamma}))d\sigma \quad (t\in[0,T],\ \omega\in\Omega^{(n-1)}) .$$

ii) Supposons que $S(t,\omega)$ soit atteint en un point unique $\gamma=\gamma^{(t,\omega)}\in H$ (ce qui est réalisé pour tout t assez petit), alors

$$(20) \qquad \frac{\Psi^{\varepsilon}_{\varphi}(t,\omega)}{\Psi^{\varepsilon}_{1}(t,\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(\gamma_t^{(t,\omega)}) .$$

(19) et (20) sont des conséquences des Théorèmes (3.4) et (3.6) de [10].

On s'est restreint ici à l'étude de la solution de l'équation (12). On peut montrer, plus généralement, que la solution de l'équation (3) définit, en fait, une diffusion $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T]}$ (où

$$\bar{X}_t = (X_{(t,t_1,\dots,t_{n-1})})_{(t_1,\dots,t_{n-1})\in[0,T]^{n-1}} ,$$

à valeurs l'espace $\mathcal{C}([0,T]^{n-1}, \mathbb{R}^p)$, solution d'une équation différentielle stochastique relative au processus de Wiener $(\bar{B}_t)_{t\in[0,T]}$ (avec

$$\bar{B}_t = (B_{(t,t_1,\dots,t_{n-1})})_{(t_1,\dots,t_{n-1})\in[0,T]^{n-1}} ,$$

dont les coefficients s'expriment explicitement (ce qui sera fait dans un travail ultérieur). Le Théorème 3 est une démonstration des estimations de grandes déviations pour les petites perturbations aléatoires de diffusions de ce type.

Remerciement. Nous remercions Monsieur J.B. Walsh de son aide pour la correction de la preuve de la proposition 5.

RÉFÉRENCES

[1] AZENCOTT R.: Grandes déviations et applications. École d'été de St. Flour VII 78. Lecture Notes in Math. 774, Springer (1980).

[2] CAIROLI R., WALSH J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134 (1975), 111-183.

[3] DOSS H.: Sur une résolution stochastique de l'équation de Schrödinger à coefficients analytiques. Commun. Math. Phys. 73 (1980), 247-264.

[4] DOSS H., PRIOURET P.: Petites perturbations de systèmes dynamiques avec reflexion. Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes in Math. 986 (1983), 353-370.

[5] DOZZI M., PURI M.L.: Strong solutions of stochastic differential equations for multiparameter processes. Preprint.

[6] KOREZLIOGLU H., MAZZIOTTO G., SZPIRGLAS J.: Nonlinear filtering equations for two-parameter semimartingales. Stochastic Processes and their Applications 15 (1983), 239-269.

[7] KUO H.H.: Gaussian measures in Banach spaces. Lecture Notes in Math. 463, Springer Verlag, Berlin (1975).

[8] NUALART D.: On the distribution of a double stochastic integral. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 65 (1983), 49-60.

[9] STROOCK D.W.: An introduction to the theory of large deviations. Springer Verlag, New York (1984).

[10] VARADHAN S.R.S.: Asymtotic probabilities and differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 261-286.

[11] VENTSEL A.D., FREIDLIN M.J.: Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer Verlag, New York (1984).

[12] WALSH J.B.: Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Gebiete 46(1979), 177-192.