Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Gilles Pagès

Un théorème de convergence fonctionnelle pour les intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 572-611
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__572_0>

UN THEOREME DE CONVERGENCE FONCTIONNELLE POUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES.

G. PAGES (*)

Au chapitre IV de son Cours d'Ecole de St Flour [3] sur les théorèmes limites, Jacod démontre un théorème général de convergence fonctionnelle pour les suites de semi-martingales lorsque la limite est une semi-martingale quasi-continue à gacuhe reposant pour l'essentiel sur des conditions de convergence des caractéristiques locales. Il est alors naturel de se demander quel type de résultat on peut espérer obtenir lorsque, au lieu de semi-martingales quelconques on considère, des intégrales stochastiques de processus prévisibles localement bornés.

Dans un premier temps, il semble logique et séduisant de faire appel, pour résoudre ce problème au théorème évoqué ci-dessus une fois explicitée la forme des caractéristiques locales d'une intégrale stochastique H.X en fonction de H et des caractéristiques locales de X. Malheureusement, outre qu'il est alors nécessaire d'imposer à la limite H.X d'être quasi-continue à gauche (1), les conditions ainsi dégagées cadrent mal avec l'idée que l'on se fait habituellement des conditions de convergence d'une suite d'intégrales (j'entends par là : "$\int H^n_s dX^n_s \xrightarrow{\mathcal{L}(\cdots)} \int H_s dX_s$" dès que "$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\cdots)} X, H^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\cdots)} H$ et $(H^n)_{n\geq 0}$ convenablement dominée"). Cette méthode fait en effet peser sur les caractéristiques locales de X de lourdes contraintes de bornitude (liées à l'identification de la limite) et même de "majoration forte au sens des processus croissants" (liées à la tension) qui en limitent sinon l'emploi du moins la portée théorique. Nous n'explorerons donc pas cette méthode ici (exhaustivement traitée dans [6] - chapitre III).

(*) *UNIVERSITE P. et M. CURIE - Laboratoire de Probabilités - 4, Place Jussieu F-75252 PARIS CEDEX 05 - FRANCE.*

---

(1) En fait le théorème général énoncé dans [3] peut-être étendu à certains cas où la semi-martingale limite n'est pas quasi-continue à gauche (cf [6]-chapitre II) étendant du même coup le champ de son "corollaire" sur les intégrales stochastiques.

Une méthode alternative consistait à considérer les intégrales stochastiques $Y^n = H^n.X^n$ non plus de façon synthétique comme précédemment mais en tant que "fonctions" de processus "auxiliaires" X^n. Cette optique admise on était ramené à démontrer un nouveau critère de relative compacité faible mettant en jeu des semi-martingales dépendant de processus "auxiliaires" mais ne nécessitant plus de majoration forte des caractéristiques locales puis un théorème d'identification de la limite sans hypothèse de bornitude de ces mêmes caractéristiques locales (notons au passage que ces deux résultats intermédiaires ne sont pas dénués d'intérêt intrinsèque, ainsi le critère de compacité s'est avéré être une généralisation d'une grande partie de ceux précédemment énoncés dans [4]).

Lorsque la semi-martingale X est quasi-continue à gauche, le succès de cette démarche a été complet puisque toute hypothèse de majoration forte ou de bornitude des caractéristiques locales limites a effectivement disparu du théorème de convergence dans ce cas. Par contre, nous avons échoué pour l'instant dans nos tentatives d'appliquer le théorème d'idenfication de la limite sans hypothèse de bornitude quand X n'est pas quasi-continue à gauche et avons donc dû nous replier sur celui de [3] ; d'où la persistance des conditions de bornitudes dans ce cas.

I - Caractéristiques locales : notations et rappels.

Commençons par revenir sur la notion de troncation (cf [3]-chapitre II).

Définition (1.1) : On appellera troncation réelle de paramètre a $(a > 0)$ toute application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lipschitzienne, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} h(x) = x & si \quad |x| \leq \frac{a}{2} \\ h(x) = 0 & si \quad |x| \geq a \\ |h(x)| \leq |x| \wedge a & \end{cases}$$

• *On appellera troncation d-dimensionnelle de paramètre a $(a > 0)$ toute application h de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ de la forme :*

$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad h(x) = (h^1(x^k))_{1 \leq k \leq d}$ *où h^1 désigne une troncation réelle de paramètre a.*

On notera qu'une troncation d-dimensionnelle ainsi définie vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad |h(x)| \leq |x| \wedge a\, d \quad (\text{lorsque } |x| = \sum_{k=1}^{d} |x^k|).$$

Cette définition, outre la condition de Lipschitz, diffère quelque peu de celle donnée par Jacod dans [3] (elles ne coïncident que pour $d = 1$) mais cela n'a aucune incidence négative pour la suite : au contraire, sous cette forme, la troncation facilite sensiblement certains calculs (cf III) ; et bien entendu tous les résultats de [3] restent vrais avec cette "nouvelle" troncation.

Soit maintenant une semi-martingale càdlàg d-dimensionnelle définie sur une base stochastique $(\Omega,\mathcal{F},\underline{\mathcal{F}},\mathbb{P})$ ($\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ désigne ici une filtration càd sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$). A l'aide d'une troncation h on peut lui associer une semi-martingale spéciale en posant :

$$X_t^h = X_t - X_o - \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s - h(\Delta X_s) \quad \text{(en particulier } |\Delta X_t^h| \leq a\ d).$$

On rappelle que la première caractéristique locale B^h est alors définie comme l'unique processus prévisible à variation finie sur les compacts, nul en 0 tel que $X^h - B^h$ soit une martingale locale). B^h dépend bien entendu de h. Quant aux deux autres caractéristiques locales C et ν, intrinsèques celles-là, elles sont données par :

$$C = \langle X^c, X^c\rangle \quad \text{où } X^c \text{ désigne la partie continue de } X$$

et : ν, mesure de Lévy associée à $\mu^X = \sum_{s>0} 1_{(\Delta X_s\neq 0)}\, \varepsilon_{(s,\Delta X_s)}$.

En raison de son importance pour la suite nous allons aussi rappeler l'énoncé du théorème de caractérisation des caractéristiques locales (démontré dans [6] - chapitre III).

<u>Théorème (1.2)</u> : ① Une semi-martingale X et une troncation h d-dimensionnelles étant données, il existe un triplet (B^h,C,ν), unique à une indistinguabilité près, constitué de :

(1.3) $B^h = (B^{h,k})_{1\leq k\leq d}$ *un processus prévisible à variation finie sur les compacts, nul en 0.*

(1.4) $C = [C^{jk}]_{1\leq j,k\leq d}$ *un processus continu adapté, nul en 0, tel que pour tout ω dans Ω et $s \leq t$: $C_t(\omega) - C_s(\omega)$ soit une matrice symétrique positive.*

(1.5) ν *une mesure aléatoire positive sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ vérifiant, pour tout ω dans Ω :*

(i) $\nu(\omega,\{0\}\times\mathbb{R}^d) = \nu(\omega,\mathbb{R}^+\times\{0\}) = 0$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \nu(\omega,\{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1)\ \nu(\omega, ds \times dx) < +\infty$

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \Delta B_t^h(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\ \nu(\omega,\{t\} \times dx)$

tel qu'on ait les trois propriétés suivantes :

(a) $\tilde{X}^h = X^h - B^h$ *est une martingale locale*

(b) $\forall j,k \in \{1,\dots,d\}$ $\tilde{X}^{h,j}\, \tilde{X}^{h,k} - \tilde{C}^{h,j,k}$ *est une martingale locale où :*

$$\tilde{C}_t^{h,j,k} = C_t^{j,k} + \int_0^t \int h^j\, h^k(x)\ \nu(ds \times dx) - \sum_{0\leq s\leq t} \Delta B_s^{h,j}\, \Delta B_s^{h,k}$$

(c) *Posant* $\hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *lipschitzienne, bornée, nulle au voisinage de* $0\}$, *on a :*

$$\forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d) \qquad \int_0^\cdot f(x)\ \nu(ds \times dx) - \int_0^\cdot f(x)\mu^X(ds \times dx)$$

est une martingale locale.

② *Réciproquement s'il existe* (B^h,C,ν) *vérifiant (1.3), (1.4) et (1.5) tel qu'on ait (a), (b), (c) alors* X *est une semi-martingale de caractéristiques locales* (B^h,C,ν).

Remarque (1.6) : $\tilde{C}^h = [\langle\tilde{X}^{h,j},\tilde{X}^{h,k}\rangle]_{1\leq j,k\leq d}$ et d'autre part $0 \leq \mathrm{Tr}(\Delta\tilde{C}^h) \leq d\ a^2$.

Du théorème (1.2) on "déduit" la définition suivante :

Définition (1.7) : On appellera caractéristiques locales algébriques tout triplet (B^h,C,ν) *défini sur une base stochastique* $(\Omega,\mathcal{F},\underline{\mathcal{F}})$ *vérifiant (1.3), (1.4) et (1.5).*

Indiquons pour finir deux notations qui seront reprises dans toute la suite par souci de concision :

- On écrira c.l. pour caractéristique locale, et
- On notera $f * \nu_t$ la quantité $\int_0^t f(x)\ \nu(ds \times dx)$ lorsqu'elle a un sens

  (ν désigne ici une mesure aléatoire quelconque).

II - Résultats généraux.

Tout processus càdlàg d-dimensionnel défini sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et tel que, pour tout t, $X_t \in \mathcal{F}$, peut-être vu comme une variable aléatoire à valeurs dans

$\mathbb{D}^d = \{\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d,\ \text{càdlàg}\}$ muni de la tribu $\mathcal{D}^d = \sigma\{\pi_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ où π_t désigne :

$$\pi_t : \mathbb{D}^d \to \mathbb{R}^d$$
$$\alpha \to \alpha(t).$$

Or, il est bien connu (cf [1], puis [7] et [5]) que l'on peut munir $\mathbb{D}^d$ d'une métrique ρ_d (dite de Skorokhod), moins fine que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, telle que $(\mathbb{D}^d,\rho_d)$ soit un espace polonais et $\mathcal{D}^d$ l'ensemble de ses boréliens. Pour tout ce qui concerne les propriétés de la topologie de Skorokhod nous renvoyons à [1], [3] et [4] en nous contentant de rappeler, outre la caractérisation de la convergence séquentielle, deux résultats dont nous ferons explicitement usage.

Rappel (0.1) : Si $\Lambda = \{\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue, strictement croissante, $\lambda(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} \lambda = +\infty\}$ on a :

$$(\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha) \iff (\exists (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}} \ /\ \lambda^n \xrightarrow{U_K} Id_{\mathbb{R}^+} \text{ et } \alpha^n \circ \lambda^n - \alpha \xrightarrow{U_K} 0)$$

où "Sk" désigne la convergence au sens de Skorokhod et "U_K" la convergence uniforme sur les compacts.

Rappel (0.2) : Soit $A \subset \mathbb{D}^d$ et $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ (le plus souvent $|x| = \sum_{k=1}^{d} |x^k|$)

$$(A \text{ Sk-relativement compact}) \iff \begin{pmatrix} \forall p \in \mathbb{N} & \sup\limits_{\alpha\in A} \sup\limits_{s\leq p} |\alpha(s)| < +\infty \\ & \\ \forall p \in \mathbb{N} & \lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{\alpha\in A} \hat{w}(\alpha,\delta,p) = 0 \end{pmatrix}$$

où $\hat{w}(\alpha,\delta,p) = \inf\{\max\limits_{0\leq i\leq k} \left[\sup\limits_{u,v\in[t,t_{i+1}[} |\alpha(u)-\alpha(v)| \right] \ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = p, t_{i+1} - t_i > \delta,\ i = 0,\dots,p-2\}$

Rappel (0.3) : (a) Soit $\alpha \in \mathbb{D}^d$, $t \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$.

Si $\Delta_t\alpha = 0$ alors $t^n \to t \Rightarrow \Delta_{t^n}\alpha^n \to \Delta_t\alpha = 0$ (et $\alpha^n(t^n\pm) \to \alpha(t)$).

Si $\Delta_t\alpha \neq 0$ il existe une suite essentiellement unique $(t^n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$\Delta_{t^n}\alpha^n \to \Delta_t\alpha$ (et $\alpha^n(t^n\pm) \to \alpha(t\pm)$)

$\Delta_{s^n}\alpha^n \to 0$ si la suite s^n diffère de t^n pour tout n à partir d'un certain rang.

(b) Soit $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{D}^d$ et $(\beta^n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{D}^{d'}$ vérifiant $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$ et $\beta^n \xrightarrow{Sk} \beta$. Si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe une suite $(t^n)_{n\geq 0}$ telle que $(\Delta_{t^n}\alpha^n, \Delta_{t^n}\beta^n) \to (\Delta_t\alpha, \Delta_t\beta)$ alors :

$$(\alpha^n, \beta^n) \xrightarrow{Sk} (\alpha, \beta) \text{ dans } \mathbb{D}^{d+d'}.$$

Soient $(X^n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$ définies sur les espaces $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ et X une variable aléatoire toujours à valeurs dans $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A $(X^n)_{n\geq 0}$ et X on associe leurs probabilités images $(\mathbb{P}^n_{X^n})_{n\geq 0}$ et $\mathbb{P}_X$ sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$. On dira que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(Sk)} X$ (ou même $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si et seulement si $\mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}_X$ ("$\xrightarrow{(Sk)}$" désigne ici la convergence étroite sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$.

C'est ce type de convergence (ou les notions de compacité et de tension qui lui sont associées) que nous chercherons à obtenir tout au long de ce papier. Notons enfin que, sauf mention explicite, X désignera dorénavant le processus canonique sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$ défini par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{D}^d \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad X_t(\alpha) = \alpha(t)$$

et que $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$ sera toujours supposé muni de la filtration naturelle càd de X notée $\underline{\mathcal{D}}^d(\mathcal{D}^d_t = \bigcap_{s>t} \sigma(\pi_u, u \leq s))$. Lorsque $\underline{\mathcal{D}}^d$ sera $\mathbb{P}$-complétée on écrira $\mathcal{D}^d(\mathbb{P})$ au lieu de $\underline{\mathcal{D}}^d$.

1° - *Relative compacité faible d'une suite de semi-martingales localement de carré intégrable :*

§ a - Rappels sur les sauts d'un processus càdlàg. Crible :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{D}^d$ et $u \in \mathbb{R}_+^*$ on peut définir la suite croissante des sauts de α d'amplitude supérieure à u par :

$$T_0(u)(\alpha) = 0 \text{ et } T_{k+1}(u)(\alpha) = \inf\{t > T_k(u)(\alpha) \ / \ |\Delta_t\alpha| > u\} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Définition (1.1) : *La famille $\{T_k(u), k \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}_+^*\}$ est appelée le crible (des sauts) du processus canonique X.*
Par les mêmes formules on peut évidemment définir le crible associé à un processus càdlàg Y quelconque défini sur une base stochastique $(\Omega, \mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}}, \mathbb{P})$. Ce crible $\{T_k^Y(u), k \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}_+^*\}$ vérifie alors de façon évidente :

$$(1.2) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad T_k^Y(u) = T_k(u) \circ Y.$$

Les résultats techniques que nous allons énoncer maintenant (et dont on trouvera une démonstration dans [3]-chapitre I) précisent le comportement des cribles pour la Sk-convergence des suites.

Proposition (1.3) : *Soient $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{D}^d$ et $\alpha \in \mathbb{D}^d$.*

Si $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$ et $u \in U(\alpha) = \{u > 0 \ / \ \forall t > 0 \ \ |\Delta_t\alpha| \neq u\}$ on a :

(i) $\forall k \in \mathbb{N} \quad T_k(u)(\alpha^n) \to T_k(u)(\alpha)$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N} \quad (T_k(u)(\alpha) < +\infty) \Rightarrow (\Delta_{T_k(u)(\alpha^n)}\alpha^n \to \Delta_{T_k(u)(\alpha)}\alpha)$

Corollaire (1.4) : *Pour toute fonction f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$, continue, nulle au voisinage de 0, l'application $\alpha \to \alpha - \alpha(0) - \sum_{0<s\leq\cdot} f(\Delta_s\alpha)$ est Sk-continue.*

Ce sera donc en particulier le cas lorsque $f = Id_{\mathbb{R}^d} - h$ où h est une troncation sur $\mathbb{R}^d$.

Signalons encore une propriété fondamentale des cribles :
$\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall u > 0$ $T_k(u)$ (resp. $T_k^Y(u)$) est un $\underline{\mathfrak{D}}^d$ (resp. $\underline{\mathfrak{F}}$ dès que Y est $\underline{\mathfrak{F}}$-adapté)-temps d'arrêt. En outre si X (resp. Y) est $\underline{\mathfrak{D}}^d(\mathbb{P})$ (resp. $\underline{\mathfrak{F}}$)-prévisible $T_k(u)$ (resp. $T_k^Y(u)$) est $\underline{\mathfrak{D}}^d(\mathbb{P})$ (resp. $\underline{\mathfrak{F}}$)-prévisible.

§ b - Le critère de relative compacité :

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction le critère que nous nous proposons de démontrer ici est le fruit de perfectionnements apportés à des techniques développées et mises au point dans [4]. Par conséquent, et sauf à recopier cet article in extenso, il était impossible de rédiger ici une preuve se suffisant à elle-même. Quelques (deux...) rappels tirés de [4] vont donc s'avérer encore nécessaires.

Soit $(X^n)_{n\geq 0}$ une suite de semi-martingales localement de carré intégrable (abrégé en loc.c.i dans la suite) définies sur des bases stochastiques $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\underline{\mathcal{F}}^n,\mathbb{P}^n)$. On désignera par $F^n = \sum_{k=1}^{d} (\langle M^{n,k},M^{n,k}\rangle + \int_0^{\cdot} |dA_s^{n,k}|)$ la suite des processus prévisibles croissants associés (A^n désigne ici le processus prévisible à variation finie de la décomposition canonique de la semi-martingale spéciale X^n en $X^n = M^n + A^n$) et par $(G^n)_{n\geq 0}$ une suite de processus croissants prévisibles, nuls en 0, définis sur les mêmes bases que les X^n, dominant F^n au sens des processus croissants i.e : $G^n - F^n$ est croissant (ce que l'on notera $F^n \preccurlyeq G^n$).

Rappel (1.5) : On note $\{T_k^n(u),k\in\mathbb{N},u\in\mathbb{R}_+^*\}$ le crible engendré par les G^n. Si l'on a : (i) $(\mathbb{P}^n_{G^n})_{n\geq 0}$ est Sk-tendue

(ii) Il existe $U, U\subset\,]0,+\infty[$ et $\inf U = 0$, tel que :

$\forall N>0$, $\forall u\in U, \forall k\geq 1, \forall\varepsilon,\delta>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}, \exists\sigma\in\,]0,\delta[, \exists R_k^n(u)$ un $\underline{\mathcal{F}}^n$-temps d'arrêt vérifiant :

$$n\geq n_0 \Rightarrow \mathbb{P}^n(R_k^n(u)\notin\,]T_k^n(u)-\delta, T_k^n(u)-\sigma[\,, T_k^n(u)\leq N+\delta)\leq\varepsilon.$$

Alors : $(\mathbb{P}^n_{X^n})_{n\geq 0}$ est Sk-tendue.

Rappel (1.6) : Soient $(\tilde{\mathbb{P}}^n)_{n\geq 0}$ une suite de probabilités sur $\mathbb{D}^d$ et $\tilde{\mathbb{P}}$ une probabilité sur $\mathbb{D}^d$, T un $\underline{\mathcal{D}}^d(\tilde{\mathbb{P}})$-temps d'arrêt prévisible sur $\mathbb{D}^d$ vérifiant :

(i) $\tilde{\mathbb{P}}^n \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$

(ii) T est $\tilde{\mathbb{P}}$-ps Sk-continu.

Alors : $\forall\varepsilon,\delta,N>0, \exists R, \underline{\mathcal{D}}^d$-temps d'arrêt, $\exists\sigma>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ tels que

$$n\geq n_0 \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^n(R\notin\,]T-\delta,T-\sigma[\,, T\leq N+\delta)\leq\varepsilon.$$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer notre nouveau critère (baptisé C7 dans la continuité de [4] et [6]).

Critère C7 (1.7) : Outre $(X^n)_{n\geq 0}$ et $(G^n)_{n\geq 0}$ on considère une suite $(Y^n)_{n\geq 0}$ de processus càdlàg, d'-dimensionnels adaptés (définis sur les mêmes bases stochastiques que les X^n), $\tilde{\mathbb{P}}$ une probabilité sur $(\mathbb{D}^{d'},\mathcal{D}^{d'})$ et $G : \mathbb{D}^{d'} \to \mathbb{D}^1$, $\tilde{\mathbb{P}}$-ps Sk-continu et croissant, $\mathcal{D}^{d'}(\tilde{\mathbb{P}})$-prévisible. Alors si :

(i) $\tilde{\mathbb{P}}^n = \mathbb{P}^n_{Y^n} \xrightarrow{(Sk)} \tilde{\mathbb{P}}$

(ii) $\forall t > 0 \quad \sup\limits_{s\leq t} |G_s\circ Y^n - G^n_s| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$

La suite $(\mathbb{P}^n_{X^n})_{n\geq 0}$ est Sk-tendue.

Remarque (1.8) : Lorsque l'on prend $G = X$ (X processus canonique sur $\mathbb{D}^1$) et $Y^n = G^n$, on retrouve exactement l'énoncé du critère C4 de [4].

Démonstration de C7 : Le but de cette preuve est de vérifier les hypothèses de Rappel (1.5).

(a) G étant $\tilde{\mathbb{P}}$-ps Sk-continu, il vient $\mathbb{P}^n_{G\circ Y^n} \xrightarrow{(Sk)} \tilde{\mathbb{P}}_G$. Parallèlement (ii) ci-dessus entraîne $\rho_1(G^n,G\circ Y^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ d'où il vient $\mathbb{P}^n_{G^n} \xrightarrow{(Sk)} \tilde{\mathbb{P}}_G$. Rappel (1.5) (i) est donc bien vérifié.

(b) Vérifions maintenant Rappel (1.5) (ii). On pose $U = U^G = \{u > 0/\tilde{\mathbb{P}}(\exists s/|\Delta G_s|=u)=0\}$. On a bien $U \subset]0,+\infty[$ et $\inf U = 0$ car U est de complémentaire dénombrable. Au vu du § a on peut affirmer d'autre part que :

$\forall u\in U, \forall k\geq 1 \quad T^G_k(u)$ est un $\mathcal{D}^{d'}(\tilde{\mathbb{P}})$-temps d'arrêt prévisible, $\tilde{\mathbb{P}}$-ps Sk-continu.

On en déduit alors, grâce au Rappel (1.6) :

$\forall k\geq 1 \quad \forall \varepsilon,\delta,N > 0 \quad \exists R_k(u), \mathcal{D}^{d'}$-temps d'arrêt $\exists \sigma \in]0,\frac{\delta}{2}[\quad \exists n_o \in \mathbb{N}$ tels que :

$n\geq n_o \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^n(R_k(u)\notin]T^G_k(u) - \frac{\delta}{2}, T^G_k(u)-\sigma[\,, T^G_k(u)\leq N + \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, soit encore, en posant $R^n_k(u) = R_k(u) \circ Y^n$ (qui est un $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt) :

$n\geq n_o \Rightarrow \mathbb{P}^n(R^n_k(u) \notin]T_k(u)(G\circ Y^n) - \frac{\delta}{2}, T_k(u)(G\circ Y^n)-\sigma[\,, T_k(u)(G\circ Y^n) \leq N + 2\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

Par ailleurs il est évident que $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$ et $\beta^n - \alpha^n \xrightarrow{U_K} 0$ entraînent $(\alpha^n,\beta^n) \xrightarrow{Sk} (\alpha,\beta)$. En conséquence $T_k(u)(\alpha^n)$ et $T_k(u)(\beta^n)$ convergent vers $T_k(u)(\alpha)$, d'où $T_k(u)(\alpha^n) - T_k(u)(\beta^n) \to 0$, dès que $u \in U(\alpha)$. Par suite (ii), $\mathbb{P}^n_{G^n} \xrightarrow{(Sk)} \tilde{\mathbb{P}}_G$ et $u \in U$ entraînent que $T_k(u)(G^n) - T_k(u)(G\circ Y^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$. Donc,

$$(1.9) \qquad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_1 \Rightarrow \mathbb{P}^n(|T^n_k(u) - T_k(u)(G\circ Y^n)| > \tfrac{\sigma}{2}) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Comme :

$$(R^n_k(u) \notin]T^n_k(u)-\delta, T^n_k(u)-\tfrac{\sigma}{2}[, T^n_k(u) \leq N+\delta) \subset (R^n_k(u) \notin]T_k(u)(G\circ Y^n)-\tfrac{\delta}{2}, T_k(u)(G\circ Y^n)-\sigma[,$$

$$T_k(u)(G\circ Y^n) \leq N+2\delta) \cup (|T_k(u)(G\circ Y^n) - T^n_k(u)| \geq \tfrac{\sigma}{2})$$

il vient aussitôt :

$$\forall n \geq n_1 \qquad \mathbb{P}^n(R^n_k(u) \notin]T^n_k(u) - \delta, T^n_k(u) - \tfrac{\sigma}{2}[\ , T^n_k(u) \leq N + \delta) \leq \varepsilon \quad \square$$

2° - *Identification de la limite* :

Le théorème d'identification de la limite que nous nous proposons de démontrer dans cette partie repose pour une part importante sur des techniques de localisation. Il est donc indispensable d'exposer ici à titre préliminaire quelques compléments topologiques sur les temps de localisation.

§ a - Temps de localisation :

Définition (2.1) : *Soit* $\alpha \in \mathbb{D}^d$. *On appelle temps de localisation de* α *les quantités* $S_\rho(\alpha) = \inf\{s \ / \ |\alpha(s)| \text{ ou } |\alpha(s^-)| \geq \rho\}$ $(\rho > 0)$.

Proposition (2.2) : (a) *Pour tout* $\rho > 0$ S_ρ *est un* $\underline{\mathcal{D}}^d$*-temps d'arrêt.*

(b) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{D}^d$ $\rho \to S_\rho(\alpha)$ *est càg, croissante et* $\lim_{\rho \to +\infty} S_\rho = +\infty$.

Démonstration : On sait que, pour tout $\rho > 0$, $V_\rho(a) = \inf\{s \ / \ |\alpha(s)| > \rho\}$ est un $\underline{\mathcal{D}}^d$-temps d'arrêt comme temps d'entrée d'un processus càdlàg dans un ouvert ; or, il est facile de vérifier que : $S_\rho = \lim_{\lambda \to \rho^-} \uparrow V_\lambda$.

Ceci prouve l'assertion (a) et la continuité à gauche. Le reste est trivial. $\square$

Proposition (2.3) : (a) *Si* $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$, $S_\rho(\alpha) \leq \underline{\lim}_n S_\rho(\alpha^n) \leq \overline{\lim}_n S_\rho(\alpha^n) \leq S_{\rho^+}(\alpha)$

(b) S_ρ *est Sk-continu en tout point de* $\{\alpha / S_\rho(\alpha) = S_{\rho^+}(\alpha)\}$.

Démonstration : (b) découle clairement de (a).

(a) Soit donc $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$, il existe (cf Rappel (0.1)) $\lambda^n \in \Lambda$ vérifiant $\lambda^n \xrightarrow[\mathbb{R}^+]{U_K} Id$ et $\alpha - \alpha^n o \lambda^n \xrightarrow{U_K} 0$. D'où en particulier :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+ \quad \sup_{s \leq \theta} |\alpha^n o \lambda^n(s)| \to \sup_{s \leq \theta} |\alpha(s)|.$$

Or $(\theta < S_\rho(\alpha)) \Leftrightarrow (\sup_{s\leq\theta} |\alpha(s)| > \rho)$; donc si $\theta < S_\rho(\alpha)$ il vient, pour n assez grand, $\sup_{s\leq\theta} |\alpha^n o \lambda^n(s)| > \rho$ ce qui entraîne $\lambda^n(\theta) < S_\rho(\alpha^n)$. D'où $\underline{\lim}_n S_\rho(\alpha^n) \geq \theta$ et partant $\underline{\lim}_n S_\rho(\alpha^n) \geq S_\rho(\alpha)$. Parallèlement $(\theta \geq S_{\rho^+}(\alpha)) \Leftrightarrow (\sup_{s\leq\theta} |\alpha(s)| < \rho)$; donc si $\theta > S_{\rho^+}(\alpha)$ il vient pour n assez grand $\sup_{s\leq\theta} |\alpha^n o \lambda^n(s)| < \rho$. D'où $\lambda^n(\theta) > S_{\rho^+}(\alpha^n) \geq S_\rho(\alpha^n)$ ce qui entraîne $\theta \geq \overline{\lim}_n S_\rho(\alpha^n)$ et partant

$S_{\rho^+}(\alpha) \geq \overline{\lim}_n S_\rho(\alpha^n)$. □

Introduisons maintenant l'opérateur d'arrêt en S_ρ :

Définition (2.4) : $\Phi_\rho : \mathbb{D}^d \to \mathbb{D}^d$

$$\alpha \to \Phi(\alpha) = \alpha^{S_\rho(\alpha)} : t \to \alpha(t \wedge S_\rho(\alpha))$$

Proposition (2.5) : (a) $\forall \rho' \geq \rho \quad S_\rho \circ \Phi_{\rho'} = S_\rho$ *et* $\Phi_\rho \circ \Phi_{\rho'} = \Phi_\rho$.

(b) $C^1_\rho = \{\alpha \in \mathbb{D}^d / S_\rho(\alpha) = S_{\rho^+}(\alpha) \leq +\infty$ *et* α *continue en* $S_\rho(\alpha)$ *si* $S_\rho(\alpha) < +\infty\}$ *et* $C^2_\rho = \{\alpha \in \mathbb{D}^d / S_\rho(\alpha) = S_{\rho^+}(\alpha) < +\infty$, α *discontinue en* $S_\rho(\alpha)$, $|\alpha S_\rho((\alpha)-)| < \rho\}$, Φ_ρ *est continue en tout point de* $C^1_\rho \cup C^2_\rho$.

Démonstration : (a) est évident.

(b) Soit $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$. Au vu de la caractérisation de la relative compacité dans $\mathbb{D}^d$ (cf Rappel (0.2) ci-avant) il est clair que celle-ci est stable par arrêt.

$(\Phi_\rho(\alpha^n))_{n\geq 0}$ est donc Sk-relativement compacte. Soit alors une valeur d'adhérence β de cette suite dont on peut supposer, quitte à extraire, que $\Phi_\rho(\alpha^n) \xrightarrow{Sk} \beta$.

Soit $t \in [0,S_\rho(\alpha)[\cap \mathrm{Cont}(\beta) \cap \mathrm{Cont}(\alpha)$ (où $\mathrm{Cont}(x) = \{t \in \mathbb{R}^+/x$ est continue en $t\}$). Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow S_\rho(\alpha^n) > t$. Par conséquent $\Phi_\rho(\alpha^n)(t) = \alpha^n(t) \to \alpha(t) = \beta(t)$ si bien que $\beta = \alpha$ sur $[0,S_\rho(\alpha)[$. Lorsque $S_\rho(\alpha) = +\infty$ on peut alors conclure, par unicité de la valeur d'adhérence, que $\lim\limits_n \Phi_\rho(\alpha^n) = \Phi_\rho(\alpha)$.

Sinon : soit $t \in]S_\rho(\alpha),+\infty[\cap \mathrm{Cont}(\beta)$. Lorsque $\alpha \in C_\rho^1 \cup C_\rho^2$, on a $S_\rho(\alpha) = S_{\rho^+}(\alpha)$, et donc $t > S_\rho(\alpha^n)$ pour $n \geq n_1$, d'après Proposition (2.3) d'où

$$\Phi_\rho(\alpha^n)(t) = \alpha^n(S_\rho(\alpha^n)) \to \beta(t).$$

Deux cas sont alors possibles :

1) Soit $\alpha \in C_\rho^1$ et $\beta(t) = \lim\limits_n \alpha^n(S_\rho(\alpha^n)) = \alpha(S_\rho(\alpha))$ de façon claire.

2) Soit $\alpha \in C_\rho^2$. On considère alors la suite essentiellement unique $s_n^\rho(\alpha)$ donnée par Remarque (0.2) et vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha^n(s_n^\rho(\alpha)) \to \alpha(S_\rho(\alpha)) \\ \alpha^n(s_n^\rho(\alpha)-) \to \alpha(S_\rho(\alpha)-) \\ s_n^\rho(\alpha) \to S_\rho(\alpha). \end{cases}$$

S'il existe $\alpha^{n'}$ extraite de α^n telle que $S_\rho(\alpha^{n'}) < s_{n'}^\rho(\alpha)$ alors, cf [3], il vient : $\alpha^{n'}(S_\rho(\alpha^{n'})) \to \alpha(S_\rho(\alpha)-)$ et $\alpha^{n'}(S_\rho(\alpha^{n'})-) \to \alpha(S_\rho(\alpha)-)$ et donc $\rho \leq |\alpha^{n'}(S_\rho(\alpha^{n'}))| \vee |\alpha^{n'}(S_\rho(\alpha^{n'})-)| \to |\alpha(S_\rho(\alpha)-)|$ ce qui contredit $\alpha \in C_\rho^2$. Par suite on a pour n assez grand : $S_\rho(\alpha^n) \geq s_n^\rho(\alpha)$ et partant $\alpha^n(S_\rho(\alpha^n)) \to \alpha(S_\rho(\alpha))$. Finalement on obtient : $\forall t \in]S_\rho(\alpha),+\infty[\cap \mathrm{Cont}(\beta)$, $\beta(t) = \alpha(S_\rho(\alpha))$ d'où $\beta = \Phi_\rho(\alpha)$. L'unicité de cette valeur d'adhérence assure pour finir la Sk-continuité de Φ_ρ en α. □

<u>*Corollaire (2.6)*</u> : *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathbb{D}^d$. Alors :*

$$\Delta_{\mathbb{P}} = \{\rho \ / \ \mathbb{P}(C_\rho^1 \cup C_\rho^2) < 1\} \quad \textit{est dénombrable.}$$

<u>Démonstration</u> :

${}^cC_\rho^1 \cup {}^cC_\rho^2 = \{S_\rho \neq S_{\rho^+}\} \cup \{\alpha/\alpha$ discontinue en $S_\rho(\alpha)$ et $|\alpha(S_\rho(\alpha)-)| = \rho\}$.

Considérons une suite $(T^n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{D}^d$-temps d'arrêt épuisant les sauts du processus canonique X. Il vient aussitôt :

$$\Delta_{\mathbb{P}} \subset \{\rho \ / \ \mathbb{P}(S_\rho \neq S_{\rho^+}) > 0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\rho \ / \ \mathbb{P}(S_\rho(\alpha) = T^n(\alpha) \text{ et } |\alpha(T_n(\alpha)-)| = \rho) > 0\}$$

$$\subset \{\rho \ / \ \mathbb{P}(S_\rho \neq S_{\rho^+}) > 0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\rho \ / \ \mathbb{P}_{\pi_{T^n-}}(\{\rho\}) > 0\}.$$

S_ρ étant càg est une mesure sur $\mathbb{R}^+$ ayant au plus un nombre dénombrable d'atomes, $\Delta_{\mathbb{P}}$ est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. □

A partir de maintenant et afin d'éviter toute confusion, les temps de localisation, les opérateurs d'arrêt seront affectés d'indices rappelant la dimension de l'espace ambiant sous-jacent (on notera donc $S_\rho^d, \Phi_\rho^d, C_\rho^{d,1}$ au lieu de $S_\rho, \Phi_\rho, C_\rho^1$).
Terminons ce paragraphe par un dernier complément topologique, généralisant quelque peu la Proposition (2.5).

<u>*Proposition (2.7)*</u> : *L'application* $Id_{\mathbb{D}^d} \times \Phi_\rho^{d'} : (\mathbb{D}^{d+d'}, Sk) \to (\mathbb{D}^{d+d'}, Sk)$ *est con-*

$$(\alpha,\beta) \to (\alpha, \Phi_\rho^{d'}(\alpha))$$

tinue en tout point (α,β) *de* $\mathbb{D}^{d+d'}$ *tel que* $\beta \in C_\rho^{d',1} \cup C_\rho^{d',2}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $(\alpha^n,\beta^n) \xrightarrow{Sk} (\alpha,\beta)$ tel que $\beta \in C_\rho^{d',1} \cup C_\rho^{d',2}$ (on notera bien que "Sk" désigne ici la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}^{d+d'}$ et non la topologie produit sur $\mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^{d'}$). Il est clair que :

$$\hat{w}((\alpha^n, \Phi_\rho^{d'}(\beta^n), \delta, p) \leq \hat{w}((\alpha^n,\beta^n), \delta, p)$$

$$\sup_{s\leq p} |(\alpha^n(s), \Phi_\rho^{d'}(\beta^n)(s))| \leq \sup_{s\leq p} |(\alpha^n(s), \beta^n(s))|$$

pour tout $\delta, p > 0$. Par conséquent la suite $((Id_{\mathbb{D}^d} \otimes \Phi_\rho^{d'})(\alpha^n,\beta^n))_{n\geq 0}$ est Sk-relativement compacte dans $\mathbb{D}^{d+d'}$.
Or, comme en particulier $\beta^n \xrightarrow{Sk} \beta$ dans $\mathbb{D}^{d'}$ et $\beta \in C_\rho^{d',1} \cup C_\rho^{d',2}$, il vient d'après Proposition (2.5) : $\Phi_\rho^{d'}(\beta^n) \xrightarrow{Sk} \Phi_\rho^{d'}(\beta)$ dans $\mathbb{D}^{d'}$. D'autre part on a bien sûr $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$ dans $\mathbb{D}^d$, si bien que la seule valeur d'adhérence possible pour cette suite est $(\alpha, \Phi_\rho^{d'}(\beta))$. D'où le résultat. □

§ b - Limite en loi d'une suite de martingales locales à sauts bornés. Application à l'énoncé d'un nouveau théorème d'indentification de la limite :

Théorème (2.8) : *On considère une suite* $(X^n)_{n\geq 0}$ *de processus càdlàg adaptés, d-dimensionnels, définis sur des bases stochastiques* $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\underline{\mathcal{F}}^n,\mathbb{P}^n)$, $(M^n)_{n\geq 0}$ *une suite de* $(\mathbb{P}^n,\underline{\mathcal{F}}^{X^n})$*-martingales locales càdlàg, d'-dimensionnelles à sauts uniformément bornés par un réel* a *(i.e.* $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{P}^n$*-ps* $\forall t\in\mathbb{R}^+$ $|\Delta M^n_t|\leq a$*),* X *un processus càdlàg d-dimensionnel défini sur un espace* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et* $\underline{\mathcal{F}}^X$ *sa filtration naturelle càd,* M *un processus càdlàg défini sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\underline{\mathcal{F}}^X$*-adapté.*
Alors si :

$$(2.9)\qquad \mathbb{P}^n_{X^n,M^n}\xrightarrow{(Sk)}\mathbb{P}_{(X,M)}.$$

Il vient : M *est une* $(\mathbb{P},\underline{\mathcal{F}}^X)$*-martingale locale (à sauts bornés par* a*).*

Démonstration : Soit $\rho\notin\Delta^{d'}_{\mathbb{P}_M},\rho>0$ $(\Delta^{d'}_{\mathbb{P}_M}$ est dénombrable d'après Corollaire (2.6)).

Il est clair que : $\mathbb{P}_{(X,M)}(\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{D}^{d+d'}/\beta\in C^{d',1}_\rho\cup C^{d',2}_\rho\})=\mathbb{P}_M(C^{d',1}_\rho\cup C^{d',2}_\rho)=1$,

donc $\mathbb{P}_{(X,M)}$-ps $\quad Id_{\mathbb{D}^d}\otimes\Phi^{d'}_\rho$ est Sk-continue. Par suite :

$$\mathbb{P}^n_{(X^n,M^{n,S^{d'}_\rho\circ M^n_\rho})}=(Id_{\mathbb{D}^d}\otimes\Phi^{d'}_\rho)(\mathbb{P}^n_{(X^n,M^n)})\xrightarrow{(Sk)}(Id_{\mathbb{D}^{d'}}\otimes\Phi^{d'}_\rho)(\mathbb{P}_{(X,M)})=\mathbb{P}_{(X,M^{S^{d'}_\rho})}.$$

Or, vu que pour tout n, $\mathbb{P}^n$-ps $|\Delta M^n|\leq a$, il vient :

$$\mathbb{P}^n\text{-ps}\qquad |M^{n,S^{d'}_\rho\circ M^n_\rho}|\leq|M_-^{n,S^{d'}_\rho\circ M^n}|+a\leq\rho+a.$$

D'autre part $\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{D}^{d+d'}/\forall s\in\mathbb{R}\ |\Delta\beta(s)|\leq a\}$ est Sk-fermé donc, d'après (2.9), $\mathbb{P}$-ps $|\Delta M|\leq a$. Enfin $\Delta^{d'}_{\mathbb{P}_M}$ est dénombrable et $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\uparrow S^{d'}_\rho=+\infty$ (partout), on est ramené à montrer le résultat lorsque M^n et M sont ps-uniformément bornés par une constante K (borne que l'on peut évidemment supposer stricte). Considérons alors l'ensemble A de complémentaire dénombrable défini par :

$$A=\{u\ /\ \mathbb{P}(\{|\Delta M_u|\neq 0\})=0\quad\text{et}\quad s,t\in A\quad (s<t)\quad\text{fixés}.$$

M^n étant une $\underline{\mathcal{F}}^n$-martingale (comme martingale locale bornée) et X^n étant $\underline{\mathcal{F}}^n$-adapté, il vient pour toute variable aléatoire réelle bornée Z, Sk-continue $\underline{\mathcal{D}}^d_s$-mesurable définie sur $\mathbb{D}^d$:

$$E^n(Z \circ X^n(M_t^n - M_s^n)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, la borne K étant stricte, $\mathbb{P}_{(X,M)}$-ps ($\Phi_K^{d'}$ est Sk-continue et $\Phi_K^{d'} = Id_{\mathbb{D}^{d'}}$), par conséquent l'application :

$$\psi_{s,t} : \mathbb{D}^{d+d'} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\alpha,\beta) \longrightarrow Z(\alpha)\ (\pi_t \circ \Phi_K^{d'}(\beta) - \pi_s \circ \Phi_K^{d'}(\beta))$$

est non seulement bornée par $2K\|Z\|_\infty$ mais aussi $\mathbb{P}_{(X,M)}$-ps Sk-continue puisque $s,t \in A$. Appliquant (2.9) à $\psi_{s,t}$, on obtient :

$$E_{\mathbb{P}}(Z \circ X(M_t - M_s)) = E_{\mathbb{P}_{(X,M)}}(\psi_{s,t}) = \lim_n E_{\mathbb{P}^n_{(X^n,M^n)}}(\psi_{s,t}).$$

Or, vu que $\mathbb{P}^n$-ps $|M^n| < K$, on a aussi :

$$E_{\mathbb{P}^n_{(X^n,M^n)}}(\psi_{s,t}) = E^n(Z \circ X^n(M_t^n - M_s^n)) = 0$$

et donc :

$$(2.10) \qquad E_{\mathbb{P}}(Z \circ X(M_t - M_s)) = 0.$$

Une fois remarqué (cf [3] chapitre I) que $\mathcal{D}_{s-}^d = \sigma(Z, Z \in \mathcal{C}_b(\mathbb{D}^d), \mathcal{D}_{s-}^d\text{-mesurable})$, on étend facilement par classe monotone fonctionnelle (2.10) à toutes les variables Z boréliennes bornées $\mathcal{D}_{s-}$ -mesurables.

Considérons maintenant, s et t étant cette fois deux réels quelconques, tels que $s < t$, deux suites $(s^n)_{n \geq 0}$ et $(t^n)_{n \geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s < s^n < t < t^n,\ s^n, t^n \in A,\ s^n \to s \ \text{ et } \ t^n \to t.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}_s^d \subset \mathcal{D}_{s_n^-}^d$ et donc, si Z est bornée, $\mathcal{D}_s^d$-mesurable,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E_{\mathbb{P}}(Z \circ X(M_{t^n} - M_{s^n})) = 0$$

M étant càdlàg et bornée par K, il vient aussitôt : $M_{t^n} \xrightarrow{L^1(\mathbb{P})} M_t$ et $M_{s^n} \xrightarrow{L^1(\mathbb{P})} M_s$, d'où finalement :

$$E_{\mathbb{P}}(Z \circ X(M_t - M_s)) = 0$$

On conclut en remarquant que $\mathcal{F}_s^X = \sigma(Z_0X, Z \in \mathcal{D}_s^d)$. □

<u>*Théorème (2.11)*</u> *: Soit X un processus (mesurable) sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, (B^h,C,ν) un triplet de c.l. algébriques sur $(\Omega,\mathcal{F},\underline{\mathcal{F}}^X)$ et $(X^n)_{n\geq 0}$ une suite de semi-martingales définies sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\underline{\mathcal{F}}^n,\mathbb{P}^n)$ de c.l. $(B^{h,n},C^n,\nu^n)$. Si l'on a :*

(i) $(X^n,B^{h,n},\tilde{C}^{h,n}) \xrightarrow{\mathcal{L}(Sk)} (X,B^h,\tilde{C}^h)$

(ii) $\forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d)$ $(X^n, f * \nu^n) \xrightarrow{\mathcal{L}(Sk)} (X, f * \nu)$

alors : X est une $(\mathbb{P},\underline{\mathcal{F}}^X)$-semi-martingale de c.l. (B^h,C,ν).

<u>*Lemme (2.12)*</u> *Pour tout $\alpha \in \mathbb{D}^d$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^k)$, nulle au voisinage de 0, on pose $f * \mu_t(\alpha) = \sum_{0<s\leq t} f(\Delta_s\alpha)$ $(t \in \mathbb{R}^+)$. Alors l'application définie par :*

$$(f * \nu) * Id_{\mathbb{D}^{d'}} : (\mathbb{D}^{d+d'},Sk) \longrightarrow (\mathbb{D}^{d+k+d'},Sk)$$

$$(\alpha,\beta) \longrightarrow (\alpha, f * \mu(\alpha),\beta)$$

est Sk-continue.

<u>Preuve</u> : Ce résultat découle trivialement de ce que (cf [3])

$$\begin{cases} \alpha^n \circ \lambda^n - \alpha \xrightarrow{U_K} 0 \\ \\ \lambda^n \xrightarrow{U_K} Id_{\mathbb{R}^+} \end{cases} \Rightarrow f * \mu(\alpha^n)\circ\lambda^n - f * \mu(\alpha) \xrightarrow{U_K} 0 \quad \square$$

<u>Démonstration du théorème (2.12)</u> : D'après le théorème (1.2) de caractérisation le problème à résoudre ici est de vérifier que :

$\tilde{X}^h = X^h - B^h, \tilde{X}^{h,j}\tilde{X}^{h,k} - \tilde{C}^{h,j,k}$ pour $j,k \in \{1,\dots,d\}$, $f * \mu^X - f * \nu$ pour $f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d)$

sont des $(\mathbb{P},\underline{\mathcal{F}}^X)$-martingale locales. Pour ce faire on se repose évidemment sur le théorème (2.8) et le lemme (2.12). Etudions à titre d'exemple le cas de $\tilde{X}^h$:
(Lemme (2.12) et (i)) $\Rightarrow ((X^n,\tilde{X}^{h,n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X,\tilde{X}^h))$.
D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\Delta\tilde{X}^{h,n}| \leq |\Delta X^{h,n}| + |\Delta B^{h,n}| \leq 2\,ad$ $\mathbb{P}$-ps (a désigne ici le paramètre de la troncation h). Par conséquent, d'après théorème (2.8), $\tilde{X}^h$ est une $(\mathbb{P},\underline{\mathcal{F}}^X)$-martingale locale.

En ce qui nous concerne nous n'utiliserons dans la suite qu'un cas particulier du théorème (2.11) sous la forme du résultat suivant :

Théorème (2.13) :

(a) *Soit* $(X^n)_{n\geq 0}$ *comme dans le théorème* (2.11) ; (B^h,C,ν) *un triplet de c.l. algébriques sur* $(\mathbb{D}^d,\mathfrak{D}^d,\underline{\mathfrak{D}}^d)$ *et* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\mathbb{D}^d,\mathfrak{D}^d)$ *vérifiant :*

- $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCS}}$ (*Conditions de Continuité au sens de Skorokhod,* $\mathbb{P}$-*ps*) :

$$\mathbb{P}\text{-ps}\quad \alpha \to B^h(\alpha) \text{ de } \mathbb{D}^d \text{ dans } \mathbb{D}^d \text{ est Sk-continue.}$$

$$\mathbb{P}\text{-ps}\quad \alpha \to \tilde{C}^h(\alpha) \text{ de } \mathbb{D}^d \text{ dans } \mathbb{D}^{d\otimes d} \text{ est Sk-continue.}$$

$$\forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d)\quad \mathbb{P}\text{-ps}\quad \alpha \to (\alpha, f * \nu(\alpha)) \text{ de } \mathbb{D}^d \text{ dans } \mathbb{D}^{d+1} \text{ est Sk-continue.}$$

- $[Sk\text{-}x,\beta,\gamma]$ $\quad \rho_{d(d+2)}((X^n,B^{h,n},\tilde{C}^{h,n}),(X,B^h,\tilde{C}^h)\circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

- $[Sk\text{-}x,\delta]$ $\quad \forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d)\quad \rho_{d+1}((X^n,f * \nu^n),(X,f * \nu)\circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

- $\mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$.

Alors le processus canonique X *sur* $\mathbb{D}^d$ *est une* $(\mathbb{P},\underline{\mathfrak{D}}^d)$-*semi-martingale de c.l.* (B^h,C,ν).

(b) *Les conditions* $[Sk\text{-}x,\beta,\gamma]$ *et* $[Sk\text{-}x,\delta]$ *sont en particulier vérifiées si l'on a :*

$$[sup\text{-}\beta]\quad \forall t \in \mathbb{R}^+\quad \sup_{s\leq t} |B^{h,n}_s - B^h_s\circ X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$$

$$[sup\text{-}\gamma]\quad \forall t \in \mathbb{R}^+\quad \sup_{s\leq t} |\tilde{C}^{h,n}_s - \tilde{C}^h_s\circ X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$$

$$[sup\text{-}\delta]\quad \forall t \in \mathbb{R}^+\quad \forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d)\quad \sup_{s\leq t} |f * \nu^n_s - f * \nu_s\circ X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

Avant de passer à la démonstration du théorème (2.13) nous allons énoncer un lemme relatif à $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCS}}$.

<u>*Lemme (2.14)*</u> : $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCS}}$ $\Rightarrow$ *$\mathbb{P}$-ps* $\alpha \to (\alpha, B^h(\alpha), \tilde{C}^h(\alpha))$ *de* $\mathbb{D}^d$ *dans* $\mathbb{D}^{d(d+2)}$ *est Sk-continue.*

<u>Preuve</u> : On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g_p(x) = 1 \wedge (p|x| - 1)^+$; $g_p \in \mathcal{E}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d)$. Par hypothèse l'ensemble A défini par $A = \{\beta \in \mathbb{D}^d / \alpha \to B^h(\alpha), \alpha \to \tilde{C}^h(\alpha), \alpha \to (\alpha, g_p * \nu(\alpha))$

soient continues en β pour tout $p \in \mathbb{N}\}$ est de probabilité $\mathbb{P}(A) = 1$. Il suffit donc de montrer que $\alpha \to (\alpha, B^h(\alpha), \tilde{C}^h(\alpha))$ est continue en tout point β de A.

Soit donc $\beta \in A$ et $\beta^n \xrightarrow{Sk} \beta$. D'après Rappel (0.3) (b) on est ramené à vérifier que pour tout t dans $\mathbb{R}^+$ il existe une suite $t^n \to t$ telle que :

$$(2.15) \qquad \begin{cases} \Delta_{t^n}\beta^n \to \Delta_t \beta \\[2ex] \Delta_{t^n} B^h(\beta^n) \to \Delta_t B^h(\beta) \\[2ex] \Delta_{t^n}\tilde{C}^h(\beta^n) \to \Delta_t \tilde{C}^h(\beta). \end{cases}$$

Deux cas sont alors à distinguer, t étant fixé :

1°) $\nu(\beta, \{t\} \times \mathbb{R}^d) = 0$. On en déduit que $\Delta_t B^h(\beta) = 0$, $\Delta_t \tilde{C}^h = 0$ et que toute suite $t^n \to t$ vérifiant $\Delta_{t^n}\beta^n \to \Delta_t\beta$ vérifie (2.15).

2°) $\nu(\beta, \{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0$. Il existe par hypothèse (cf Rappel (0.3) (a)) des suites $t^{p,n}, s^n, r^n \to t$ telles que, d'une part :

$$(2.16) \qquad \begin{cases} (\Delta_{t^{p,n}}\beta^n, \Delta_{t^{p,n}}(g_p * \nu)(\beta^n)) \to (\Delta_t \beta, \Delta_t (g_p * \nu)(\beta)) \\[2ex] \Delta_{s^n} B^h(\beta^n) \to \Delta_t B^h(\beta) \\[2ex] \Delta_{r^n}\tilde{C}^h(\beta^n) \to \Delta_t \tilde{C}^h(\beta) \end{cases}$$

et, d'autre part, pour toute suite $u_n \to t$:

$$(2.17) \qquad \begin{cases} \Delta_{u^n}(g_p * \nu)(\beta^n) \to 0 & \text{si } u^n \neq t^{p,n} \text{ pour tout } n \text{ assez grand} \\ \Delta_{u^n} B^h(\beta^n) \to 0 & \text{si } u^n \neq s^n \text{ pour tout } n \text{ assez grand} \\ \Delta_{u^n}\tilde{C}^{h,n} \to 0 & \text{si } u^n \neq r^n \text{ pour tout } n \text{ assez grand} \end{cases}$$

$g_p \uparrow 1$ quand $p \to +\infty$ donc $\nu(\beta \times \{t\} \times \mathbb{R}^d\} \neq 0$ entraîne l'existence d'un p_o tel que $\Delta_t g_{p_o} * \nu(\beta) > 0$. Comme $p' \geq p \Rightarrow \Delta g_{p'} * \nu(\beta) \geq \Delta g_p * \nu(\beta)$, il est clair d'après (2.17) que $t^{p,n}$ et $t^{p_o,n}$ coïncident pour n assez grand dès que $p \geq p_o$. On peut donc poser $t^n = t^{p_o,n}$ et remplacer $t^{p,n}$ par t^n dans (2.16) dès que $p \geq p_o$ (en particulier $\Delta_{t^n}\beta^n \to \Delta_t\beta$). D'autre part, soit $\Delta_t B^h(\beta) = 0$ et il vient $\Delta_{t^n} B^h(\beta^n) \to \Delta_t B^h(\beta)$, soit il existe $k_o \in \{1,\ldots,d\}$ tel que $\Delta_t B^{h,k_o}(\beta) \neq 0$. Des inégalités $|h^{k_o}| \leq a g_p + \frac{2}{p}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\Delta_{s^n} B^{h,k_o}(\beta^n)| \leq a \, \Delta_{s^n} g_p * \nu(\beta^n) + \frac{2}{p}$$

donc pour p suffisamment grand (et $p \geq p_o$) il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\Delta_{s^n} B^{h,k_o}(\beta^n)| \leq a \, \Delta_{s^n} g_p * \nu(\beta^n) + \frac{|\Delta B^{h,k_o}|}{2}.$$

(2.16) et (2.17) entraînent alors que $s^n = t^n$ pour n assez grand ce qui assure à nouveau :

$$\Delta_{t^n} B^h(\beta^n) \to \Delta_t B^h(\beta). \tag{2.18}$$

Pour montrer que r^n et t^n coïncident aussi pour n assez on procède de façon analogue. Si $\Delta_t \tilde{C}^h(\beta) = 0$ pas de problème : le choix de r^n est libre. Sinon, il existe $j_o,k_o \in \{1,\ldots,d\}$ tels que $\Delta_t \tilde{C}^{h,j_o,k_o}(\beta) \neq 0$. Or :

$$|\Delta_{r^n} \tilde{C}^{h,j_o,k_o}(\beta^n)| \leq \Delta_{r^n} |h^{j_o,k_o}| * \nu(\beta^n) + |\Delta_{r^n} h^{j_o} * \nu(\beta^n)| \, |\Delta_{r^n} h^{k_o} * \nu(\beta^n)|,$$

d'où : $|\Delta_{r^n} \tilde{C}^{h,j_o,k_o}(\beta^n)| \leq a^2 \, \Delta_{r^n} g_p * \nu(\beta^n) + \frac{2a}{p} + |\Delta_{r^n} h^{j_o} * \nu(\beta^n)| \, |\Delta_{r^n} h^{k_o} * \nu(\beta^n)|$.

Si r^n ne coïncide pas avec t^n pour tout n assez grand, il vient donc :

$$\forall p \geq p_o \quad \varlimsup_n |\Delta_{r^n} \tilde{C}^{h,j_o,k_o}(\beta^n)| \leq 0 + \frac{2a}{p} + 0 \times 0 = \frac{2a}{p}$$

ce qui contredit (2.16). D'où le résultat puisque la suite t^n vérifie bien (2.15).

Démonstration du théorème (2.13) :

(a) $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCS}}$ et $\mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$ entraînent donc, par l'intermédiaire du lemme (2.14) que :

$$\begin{cases} (X^n, B^h{\circ}X^n, \tilde{C}^h{\circ}X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, B^h, \tilde{C}^h) \\ (X^n, f * \nu{\circ}X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, f * \nu). \end{cases}$$

Ceci ajoute à $[Sk\text{-}x,\beta,\gamma]$ et $[Sk\text{-}x,\delta]$ implique clairement (i) et (ii) du théorème (2.11) sont ici vérifiés.

(b) L'additivité de la U_K-convergence assure le résultat. □

3° - Rappel d'un autre théorème d'identification de la limite :

Le théorème suivant est énoncé - sous une forme légèrement différente - dans [3] et dans [6] (les conditions de continuité n'y dépendent pas de la probabilité limite). Cependant, au prix de quelques modifications mineures de la démonstration donnée dans [3], on obtient l'énoncé dont nous aurons besoin pour résoudre les problèmes de convergence d'intégrales stochastiques traités dans la suite.

Théorème (3.1) : *Soient $(X^n)_{n \geq 0}$ une suite de semi-martingales d-dimensionnelles de c.l. $(B^{h,n}, C^n, \nu^n)$ définies sur des bases stochastiques $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \underline{\mathcal{F}}^n, P^n)$, (B^h, C, ν) un triplet de c.l. algébriques, $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$ et A une partie de $\mathbb{R}^+$ de complémentaire dénombrable vérifiant :*

- $\boxed{\text{CBF}}$ *(Condition de Bornitude Forte). Il existe $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que : $\forall \alpha \in \mathbb{D}^d \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad Tr(C(\alpha)) + (|x|^2 \wedge 1) * \nu(\alpha) \leq \Lambda(t)$*
- $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CC}}$ *(Conditions de Continuité $\mathbb{P}$-ps) :*

  $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d) \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad \alpha \to (B^h_t(\alpha), \tilde{C}^h_t(\alpha), f * \nu_t(\alpha))$ *est Sk-continue.*
- $[\beta_A] \quad \forall t \in A \qquad B^{h,n}_t - B^h_t \circ X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

  $[\gamma_A] \quad \forall t \in A \qquad \tilde{C}^{h,n}_t - \tilde{C}^h_t \circ X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

  $[\delta_A] \quad \forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d) \quad \forall t \in A \qquad f * \nu^n_t - f * \nu_t \circ X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

$\cdot \mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$

Alors le processus canonique X *sur* $\mathbb{D}^d$ *est une* $(\mathbb{P}, \underline{\mathcal{D}}^d)$ *semi-martingale de c.l.* (B^h, C, ν).

III - Convergence fonctionnelle d'intégrales stochastiques.

L'une des difficultés non négligeable de cette partie réside dans la complexité des calculs auxquels nous serons confrontés. Aussi avons-nous préféré, par souci d'intelligibilité, ne présenter les démonstrations que dans le cas où semi-martingales et processus prévisibles intégrés sont unidimensionnels. Au contraire, dans les énoncés, nous avons pris soin de ne faire aucune restriction de type dimensionnel afin de donner les résultats dans leur plus grande généralité.

1° - Caractéristiques locales d'un couple (H•X,X) :

Dans la suite nous désignerons par h toutes les troncations que l'on peut fabriquer sur les espaces $\mathbb{R}^p$ à partir d'une troncation réelle h^1 fixée. La dimension de l'espace sous-jacent sera toujours précisée de façon claire par le contexte. D'autre part, X étant une semi-martingale d-dimensionnelle et H un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'} \otimes \mathbb{R}^d$, localement borné, on notera :

$$H{\cdot}X = \Big[\sum_{k=1}^{d} H^{ik}{\cdot}X^k\Big]_{1\leq i\leq d'}.$$

Le théorème qui suit explicite les formules liant les c.l. d'un couple $(H{\cdot}X,X)$ à celles de X et à H. En outre, et c'est le point important, il donne une réciproque affirmant que ces formules caractérisent un tel couple.

Théorème (1.1) :

(a) *Soit* X *une semi-martingale càdlàg d-dimensionnelle sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *de c.l.* (B^h, C, ν) *sous la troncation* h *sur* $\mathbb{R}^d$ *et* H *un processus* $\underline{\mathcal{F}}$*-prévisible à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d'} \otimes \mathbb{R}^d$, *X-intégrables. Alors les c.l.* $(B^{h,H}, C^H, \nu^H)$ *du couple* $(H{\cdot}X, X)$ *sous la troncation* h *sur* $\mathbb{R}^{d'+d}$ *sont données par :*

$$(1.2) \qquad B^{h,H,k} = (H{\cdot}B^h)^k - ((H{\cdot}h(x))^k - h^k(H{\cdot}x))*\nu \quad \text{si } 1 \leq k \leq d'$$
$$= B^{h,k-d'} \qquad\qquad \text{si } d+1 \leq k \leq d+d'$$

$$(1.3)\qquad [c^{H,j,k}]_{1\leq j,k\leq d'} = HC\ {}^tH, [c^{H,d'+j,d'+k}]_{1\leq j,k\leq d} = C$$

$$[c^{H,j,d'+k}]_{\substack{1\leq j\leq d'\\ 1\leq k\leq d}} = HC \quad \text{et} \quad [c^{H,d'+j,k}]_{\substack{1\leq j\leq d\\ 1\leq k\leq d'}} = C\ {}^tH$$

$$(1.4)\qquad \nu^H(\omega,ds\times dx\times dy) = 1\!\!1_{\mathbb{R}^+\times(\mathbb{R}^{d+d'}-\{0\})}\cdot\ \Theta(\nu(\omega,ds\times dy)) \quad \text{où}$$

$\Theta(\omega,s,y) = (s,H_s(\omega)\cdot y,y)$ *(i.e. la restriction à* $\mathbb{R}^+\times(\mathbb{R}^{d+d'}-\{0\})$ *de l'image de* ν *par* Θ*).*

(b) Soient Y et X deux $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$-semi-martingale respectivement d et d'-dimensionnelles telles que :

(i) $\quad Y_0 \overset{\mathbb{P}\text{-ps}}{=} 0$

(ii) Les c.l. de (Y,X) sont données par (1.2), (1.3) et (1.4).

Alors : $\quad \mathbb{P}$-ps $\quad Y = H\cdot X.$

Pour la démonstration de ce résultat nous renvoyons à l'article de Jacod [2]-6. Les formules qu'on y rencontrera diffèrent cependant quelque peu de (1.2), (1.3) et (1.4) en cela qu'elles sont explicitées à l'aide du processus croissant prévisible :

$$A_t = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t |dB_s^k| + \mathrm{Tr}(C_t) + |x|^2\wedge 1 * \nu_t$$

et des densités de Radon-Nikodym prévisibles :

$$b_t = \frac{dB_t}{dA_t},\quad c_t = \frac{dC_t}{dA_t} \quad \text{et} \quad N_t(dx) = \frac{d\nu([0,t]\times dx)}{dA_t}$$

(la troncation étant dans ce cas $h(x) = |x|\ 1\!\!1_{|x|>1}$).

2° - Théorème de convergence :

§ a - Enoncé :

Fixons d'abord quelques notations concernant les fonctions à variation bornée sur les compacts et la topologie de la convergence en variation sur les compacts.

<u>Définition (1.2)</u> :

(a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$. On désignera par $V_t^d(f)$ la variation de f sur $[0,t]$ pour la norme somme sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. $|x| = \sum_{k=1}^{d} |x^k|$). V_t^d vérifie $V_t^d(f) = \sum_{k=1}^{d} V_t^1(f^k)$. L'indice d sera omis dans la suite.

(b) On notera $\mathbb{V}^d = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d \ / \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ \ V_t(f) < +\infty\}$. La topologie (d'e.v.n) de la convergence en variation sur les compacts sur $\mathbb{V}^d$ sera symbolisée par V_K.

<u>Théorème (2.2)</u> : Soient h une troncation sur $\mathbb{R}^d$ de paramètre a, $(X^n)_{n \geq 0}$ une suite de $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \underline{\mathcal{F}}^n, \mathbb{P}^n)$-semi-martingales càdlàg, d-dimensionnelles de c.l. $(B^{h,n}, C^n, \nu^n)$, $(H^n)_{n \geq 0}$ une suite de processus $\underline{\mathcal{F}}^n$-prévisibles localement bornés à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'} \otimes \mathbb{R}^d$, H un processus sur $\mathbb{D}^d, \underline{\mathcal{D}}^d$-prévisible localement borné à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'} \otimes \mathbb{R}^d$, (B^h, C, ν) un triplet de c.l. algébriques définies sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d, \underline{\mathcal{D}}^d)$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$.
Si :

- $\boxed{\text{CBH}}$ (Condition de Bornitude de H) : Il existe $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ <u>croissante</u> telle que : $\forall \alpha \in \mathbb{D}^d \quad \forall t \geq 0 \qquad |H_t(\alpha)| \leq M(t)$.

- $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCF}}$ (Condition de Continuité Forte, $\mathbb{P}$-ps) :

(i) B^h de $(\mathbb{D}^d, Sk)$ dans $(\mathbb{V}^d, V_K)$ est $\mathbb{P}$-ps continue

(ii) $\tilde{C}^h$ de $(\mathbb{D}^d, Sk)$ dans $(\mathbb{V}^{d \otimes d}, V_K)$ est $\mathbb{P}$-ps continue

(iii) $f * \nu$ de $(\mathbb{D}^d, Sk)$ dans $(\mathbb{V}^1, V_K)$ est $\mathbb{P}$-ps continue pour toute f de $\mathcal{C}_{Lip}(\mathbb{R}^d)$.

- $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCH}}$ (Condition de Continuité de H, $\mathbb{P}$-ps) : $\mathbb{P}$-ps $\forall t \geq 0 \quad H_t$ est Sk-continue.

- $\boxed{\text{QCG}}$ $\mathbb{P}$-ps ν est continue en t (i.e X est $\mathbb{P}$-Quasi-Continue à Gauche)

  <u>ou</u>

  $\boxed{\text{CBF}}$ (Condition de Bornitude Forte). Il existe $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{D}^d \qquad Tr(C_t(\alpha)) + (|x|^2 \wedge 1) * \nu_t(\alpha) \leq \Lambda(t).$$

- $[Var\text{-}\beta]$ $\quad \forall t > 0 \quad V_t(B^{h,n} - B^h \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

  $[Var\text{-}\gamma]^-$ $\quad \forall t > 0 \quad V_t(\tilde{C}^{h,n} - \tilde{C}^h \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

  $[Var\text{-}\delta]$ $\quad \forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^d) \quad V_t(f * \nu^n - f * \nu \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

  $[sup\text{-}\eta]$ $\quad \forall t > 0 \quad \sup_{s \leq t} |H_s^n - H_s \circ X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

- $\mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}.$

Alors : (a) X *est une* $(\mathbb{P}, \underline{\mathfrak{D}}^d)$*-semi-martingale de c.l.* (B^h, C, ν).

(b) $\mathbb{P}^n_{(H^n \cdot X^n, X^n)} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}_{(H \cdot X, X)}$.

Démonstration de (a) : On applique simplement le théorème (2.13) de II-2-après avoir remarqué que la topologie de convergence en variation sur les compacts est plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. □

Remarque (2.3) : $\boxed{\text{CBH}}$ et $[\sup\text{-}\eta] \Rightarrow (\forall t > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \mathbb{P}^n(\sup_{s \leq t} |H_s^n| \geq M(t) + 1) < \varepsilon)$. Par conséquent, quitte à changer M en $M+1$ dans $\boxed{\text{CBH}}$ on peut avoir à la fois $\boxed{\text{CBH}}$ et la proposition ci-dessus pour la même fonction croissante supérieure à 1 que l'on notera encore M. C'est ce que l'on supposera dans la suite.

§ b - Démonstration du théorème (2.2) (b) : Tension

Pour montrer que la suite $Z^n = (H^n \cdot X^n, X^n)$ est Sk-tendue nous allons nous appuyer sur le critère C7 de II d'une part et sur le lemme suivant (démontré dans [3]-chap. I) d'autre part.

Lemme (2.4) : Soit $(X^n)_{n \geq 0}$ *une suite de processus càdlàg définis sur* $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$. *Si, pour tout* n, X^n *se décompose en :*

$$X^n = U^{n,q} + V^{n,q} + W^{n,q}$$

avec : (*i*) $(\mathbb{P}^n_{U^{n,q}})_{n \geq 0}$ *est Sk-tendue.*

(*ii*) $(\mathbb{P}^n_{V^{n,q}})_{n \geq 0}$ *est Sk-tendue.*

• $\forall N > 0 \quad \exists (a^N_q)_{q \geq 0}$ *tendant vers* 0 *quand* $q \to +\infty$ *telle que*

$$\lim_n \mathbb{P}^n(\sup_{s \leq N} |\Delta V^{n,q}_s| > a^N_q) = 0$$

(*iii*) $\forall N, \varepsilon > 0 \quad \lim_{q \to +\infty} \quad \overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(\sup_{s \leq N} |W^{n,q}_s| > \varepsilon) = 0$

Alors $(\mathbb{P}^n_{X^n})_{n \geq 0}$ *est Sk-tendue.*

Démonstration de (2.2), tension : (On rappelle que dans les preuves $d = d' = 1$).

On décompose Z^n dans l'esprit du lemme (2.4) de la façon suivante :

$$Z^n = \left| \begin{array}{l} H^n \cdot (\tilde{X}^{h_q,n} + (h_q - h_{1/q}) * \nu^n) \\ \\ \tilde{X}^{h_q,n} + (h_q - h) * \nu^n \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} H^n \cdot (B^{h,n} + (h_{1/q} - h) * \nu^n \\ \\ B^{h,n} + (h_{1/q} - h) * \nu^n \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} H^n \cdot [(x - h_q(x)) * \mu^{X^n}] \\ \\ (x - h_q(x)) * \mu^{X^n} \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} 0 \\ \\ X^n_0 \end{array} \right.$$

$$\qquad U^{n,q} \qquad + \qquad V^{n,q} \qquad + \qquad W^{n,q} \qquad + Z^n_0$$

où $h_\rho(x) = \rho h(\frac{x}{\rho})$ (h_ρ est alors une troncation de paramètre ρa).

(a) $(U^{n,q})_{n \geq 0}$: On note $A^{n,q} = (|H^n|^2 + 1) \cdot \tilde{C}^{h_q,n} + (|H^n|+1) \cdot |h_q - h_{1/q}| * \nu^n$ le processus prévisible croissant associé à la semi-martingale localement de carré intégrable 2-dimensionnelle $U^{n,q}$. On a clairement : $A^{n,q} \prec K^n \cdot G^{n,q}$ où $K^n = (|H^n|+1)^2$ et $G^{n,q} = \tilde{C}^{h_q,n} + |h_q - h_{1/q}| * \nu^n$. Or $h_q - h_{1/q} \in \mathcal{E}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$ donc il existe $\gamma_q \in \mathcal{E}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$ $\left[\gamma_q = |h_q|^2 - |h|^2 + a(q+1)|h_q - h| + |h_q - h_{1/q}|\right]$ telle que :

$$G^{n,q} \prec \Gamma^{n,q} = \tilde{C}^{h,n} + \gamma_q * \nu^n$$

et partant, on a :

$$A^{n,q} \prec K^n \cdot \Gamma^{n,q}.$$

De [Var-γ] et [Var-δ] d'une part, [sup-η] et de la Remarque (2.3) d'autre part déduit aisément que si $\Gamma^q = \tilde{C}^h + \gamma_q * \nu$ et $K = (|H| + 1)^2$:

(2.5) $$V_t(\Gamma^{n,q}-\Gamma^q{}_o X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{s\leq t} |K^n_s - K_s{}_o X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Par ailleurs on a l'inégalité :

(2.6) $$\sup_{s\leq t} |K^n\cdot\Gamma^{n,q}_s-(K\cdot\Gamma^q_s){}_o X^n| \leq (\sup_{s\leq t} |K^n_s-K_s{}_o X^n|)\Gamma^q_t{}_o X^n + \sup_{s\leq t} |K^n_s| V_t(\Gamma^{n,q}-\Gamma^{n,o}{}_o X^n).$$

Γ^q étant $\mathbb{P}$-ps Sk-continue et $\mathbb{P}^n_{X^n}$ tendant vers $\mathbb{P}$ la suite $(\Gamma_t{}_o X^n)_{n\geq 0}$ est en particulier tendue (sur $\mathbb{R}$). Parallèlement $\sup_{s\leq t} |K^n_s|$ est (asymptotiquement) bornée en probabilité par $(M+1)^2$ donc a fortiori tendue (sur $\mathbb{R}$) ; si bien que, appliquant (2.5) dans (2.6) on obtient :

$$\sup_{s\leq t} |K^n\cdot\Gamma^{n,q}_s-(K\cdot\Gamma^q)_s{}_o X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

K^n et $\Gamma^{n,q}$ (resp. K et Γ^q) étant clairement $\underline{\mathcal{H}}^n$ (resp. $\underline{\mathcal{D}}^1$)-prévisibles, il en est de même de $K^n\cdot\Gamma^{n,q}$ (resp. $K\cdot\Gamma^q$) donc, pour pourvoir appliquer le critère C7 de II, il reste simplement à vérifier que $\mathbb{P}$-ps $K\cdot\Gamma^q : (\mathbb{D}^1,\text{Sk}) \to (\mathbb{D}^1,\text{Sk})$ est continue. En fait on va même montrer qu'il y a ici (Sk,U_K)-continuité.

$\boxed{\text{d}\mathbb{P}\text{-CCF}}$ et $\boxed{\text{d}\mathbb{P}\text{-CCH}}$ entraînent en effet que :

- $\Gamma^q : (\mathbb{D}^1,\text{Sk}) \to (\mathbb{V}^1,V_K)$ est $\mathbb{P}$-ps continue
- $\mathbb{P}$-ps $\forall t \geq 0$ K_t est Sk-continue.

On obtient alors la (Sk,U_K)-continuité à l'aide de l'inégalité suivante, analogue à (2.6) (où $\alpha^n \xrightarrow{\text{Sk}} \alpha$) :

(2.6') $$\sup_{s\leq t} |(K\cdot\Gamma^q_s)(\alpha^n)-(K\cdot\Gamma)_s(\alpha)| \leq \int_0^t |K_s(\alpha^n)-K_s(\alpha)|\,d\Gamma^q_s(\alpha)$$
$$+ \sup_{s\leq t} |K_s(\alpha^n)| V_t(\Gamma^q(\alpha^n)-\Gamma^q(\alpha))$$

et du théorème de convergence dominée (grâce à $\boxed{\text{CBH}}$).

Finalement on peut donc affirmer que :

$$\forall q \in \mathbb{N} \qquad (\mathbb{P}^n_{U^{n,q}})_{n \geq 0} \quad \text{est Sk-tendue.}$$

(b) $\underset{\sim\sim\sim}{(V^{n,q})_{n\geq 0}}$: On pose $\overline{B}^{n,q} = B^{h,n} + (h_{1/q} - h_q) * \nu^n$. Grâce à [Var-β] et [Var-γ] il vient : $V_t(\overline{B}^{n,q} - \overline{B}^q \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$. Or ($V^q$ étant ce qu'on pense !) :

$$\sup_{s\leq t} |V^{n,q}_s - V^q_s \circ X^n| \leq \sup_{s\leq t} |H^n_s - H_s \circ X^n| \overline{B}_t \circ X^n + (1+\sup_{s\leq t}|H^n_s|)V_t(\overline{B}^{n,q} - \overline{B}^q \circ X^n).$$

Par des arguments analogues à ceux utilisés pour traiter (2.6) on obtient ici :

$$\forall t > 0 \quad \sup_{s\leq t} |V^{n,q}_s - V^q_s \circ X^n| \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 \text{ et partant } \rho_2(V^{n,q}, V^q \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

V^q étant (toujours par les mêmes méthodes) $\mathbb{P}$-ps (Sk, U_K)-continue, est en particulier (Sk,Sk)-continue. Par conséquent $\mathbb{P}^n_{V^q \circ X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}_{V^q}$ ce qui assure la Sk-tendue de $(V^{n,q})_{n\geq 0}$.

D'autre part $\sup_{s\leq t} |\Delta V^{n,q}_s| \leq \sup_{s\leq t}(|H^n_s|+1) \sup_{s\leq t} |\Delta \overline{B}^{n,q}_s| \leq \frac{a}{q}(1 + \sup_{s\leq t} |H^n_s|)$

d'où $\overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t} |\Delta V^{n,q}_s| \geq \frac{a}{q}(1 + M(t))) = 0$ d'après la Remarque (2.3).

Le lemme (2.4) (ii) est donc vérifié par $(V^{n,q})_{n\geq 0}$ avec $a^N_q = \frac{a}{q}(1 + M_{(N)})$.

(c) $\underset{\sim\sim\sim}{(W^{n,q})_{n\geq 0}}$: $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t} |\Delta X^n_s| > b) \leq \mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t} |X^n_s| > \frac{b}{2})$

$(\mathbb{P}^n_{X^n})_{n\geq 0}$ étant en particulier Sk-tendue, il vient donc :

$$(2.7) \qquad \lim_{b\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t} |\Delta X^n_s| > b) = 0.$$

Or il est clair par ailleurs que :

$$(\sup_{s\leq t} |W^{n,q}_s| > 0) \subset (\sup_{s\leq t} |\Delta X^n_s| > aq)$$

ce qui allié à (2.7), donne :

$$\lim_{q\to+\infty} \overline{\lim}\, \mathbb{P}^n(\sup_{s\le t} |W_s^{n,q}| > 0) = 0.$$

On peut donc maintenant conclure grâce au lemme (2.4) et à la convergence en loi $\mathbb{P}^n_{X_o^n} \xrightarrow{(\mathbb{R})} \mathbb{P}_{X_o}$ à la Sk-tendue de $(\mathbb{P}^n_{Z^n})_{n\ge 0}$.

§ c - Démonstration du théorème (2.2) (b) : identification de la limite.

Suivant les hypothèses $\boxed{\text{QCG}}$ et $\boxed{\text{CBF}}$ nous ferons ici appel respectivement aux théorèmes (2.13) de II-2 et (3.1) de II-3 pour parvenir à nos fins.
Ce procédé quelque peu hybride est motivé comme nous le verrons à la troisième étape de la preuve par les problèmes que pose la vérification des conditions de continuité. En effet pour pouvoir espérer vérifier $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCS}}$ dans le théorème (2.13) pour les c.l. de $(H\cdot X,X)$ (cf théorème (1.1)) il nous faudrait rajouter aux hypothèses de continuité de ν la condition suivante : $\mathbb{P}$-ps $\alpha \to (\alpha, f*\nu(\alpha))$ de $(\mathbb{D}^d,\text{Sk})$ dans $(\mathbb{D}^{d+1},\text{Sk})$ est continue pour toute $f \in \mathcal{C}_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^d)$.
Or cette nouvelle contrainte, ajoutée à $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCF}}$ (iii) entraîne $\boxed{\text{QCG}}$.
Pour obtenir un résultat dans le cas où X n'est pas $\mathbb{P}$-quasi-continue à gauche, il fallait donc en revenir au théorème classique de Jacod [3] rappelé en (3.1) de II-3 où les conditions de continuité à remplir sont plus faibles (mais imposent en contrepartie des contraintes de bornitude...).
Dans le but de ne pas allonger inconsidérément la démonstration et bien que sous $\boxed{\text{QCG}}$ les sauts ΔB^h de B^h soient nuls nous avons maintenu (presque) partout l'écriture formelle générale des c.l. avec leurs sauts ; ceci permettait de mener les deux preuves de front autant qu'il était possible.
Au vu de § b on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $\mathbb{P}^n_{Z^n} \xrightarrow{(\text{Sk})} \mathbb{Q}$, la Sk-continuité de la seconde projection de $\mathbb{D}^2$ sur $\mathbb{D}^1$ (qu'on notera Z^2 par référence au processus canonique Z sur $\mathbb{D}^2$), assurant alors que $Z^2(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}$. L'unicité de $\mathbb{Q}$ que nous nous attacherons à montrer en fin de paragraphe entrainera alors la convergence recherchée.

$1^{ère}$ étape : D'après théorème (1.1) de 1-, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}^n$ est une $\mathcal{F}^n$-semi-martingale bi-dimensionnelle de c.l. $(B^{h,n,H^n}, C^{n,H^n}, \nu^{n,H^n})$ par rapport à la troncation h sur $\mathbb{R}^2$. D'autre part, à partir du triplet de c.l. algébriques (B^h, C, ν) et de H, on peut contruire sur $\mathbb{D}^1$ à l'aide des formules (1.2), (1.3) et (1.4) un triplet $(B^{h,H}, C^H, \nu^H)$. En outre, il est possible de prolonger $H, B^{h,H}, C^H$ et ν^H de façon canonique à $\mathbb{D}^2$ en posant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{D}^2 \quad \alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \qquad H(\alpha) = H(\alpha^2), B^{h,H}(\alpha) = B^{h,H}(\alpha^2), \text{ etc.}$$

Ainsi prolongé $(B^{h,H}, C^H, \nu^H)$ constitue évidemment un triplet de c.l. algébriques sur $\mathbb{D}^2$ vérifiant en outre :

$$(2.8) \qquad (B^{h,H}, C^H, \nu^H) \circ \mathcal{Z}^2 = (B^{h,H}, C^H, \nu^H).$$

(Dans cette formule les c.l. sont évidemment supposées étendues à gauche et pas à droite !).

Forts de cette égalité nous écrirons maintenant indifféremment dans la suite $B^{h,H} \circ \mathcal{Z}^n$ ou $B^{h,H} \circ X^n$, etc.

Pour conclure cette étape préliminaire calculons $\tilde{C}^{h,H}$ (resp. $\tilde{C}^{h,n,H^n}$) en fonction de $\tilde{C}^h$ (resp. $\tilde{C}^{h,n}$)

- $\tilde{C}^{h,H,2,2} = \tilde{C}^h$

- $\tilde{C}^{h,H,1,1} = C^{H,1,1} + (h^1(x))^2 * \nu^H - \sum_{0<s\leq \cdot} (\Delta_s B^{h,H,1})^2$

(où $(h^1(x))^2 * \nu = \int (h^1(x))^2 \nu^H([0,\cdot] \times dx \times dy)$

$$= H^2 \cdot C + [h(H \times \cdot)]^2 * \nu - \sum_{0<s\leq \cdot} (\Delta_s B^{h,H,1})^2 \quad \text{(h est ici unidimensionnelle).}$$

Or $\tilde{C}^h = C + h^2 * \nu - \sum_{0<s\leq \cdot} (\Delta_s B^h)^2$, $H^2 \cdot (h^2 * \nu) = (Hh)^2 * \nu$ et $H^2 \cdot \sum_{0<s\leq \cdot} (\Delta_s B^h)^2 =$

$$= \sum_{0<s\leq \cdot} (H_s \Delta_s B^h)^2$$

donc $\tilde{C}^{h,H,1,1} = H^2 \cdot \tilde{C}^h + [h(H \times \cdot)^2 - (Hh)^2] * \nu + \sum_{0<s\leq \cdot} (H_s \Delta_s B^h)^2 - (\Delta_s B^{h,H,1})^2$.

- Par des méthodes analogues on trouve :

$$\tilde{C}^{H,1,2} = H\cdot\tilde{C}^h + [h(h(H\times\cdot) - Hh)]*\nu + \sum_{0<s\leq\cdot} (\Delta B^h_s)(H_s\Delta_s B^h - \Delta_s B^{h,H,1}).$$

Ces calculs sont évidemment valables pour $\tilde{C}^{h,n,H^n}$ et $\tilde{C}^{h,n}$.

2ème étape : Nous allons nous attacher ici à vérifier les trois conditions de convergence des c.l. contenues dans les théorèmes d'identification de la limite (2.13) et (3.1) de II. Pour ce faire il est clair qu'il suffit de démontrer [sup-β], [sup-γ] et [sup-δ] associées à $(B^{h,n,H^n}, C^{n,H^n}, \nu^{n,H^n})$ et $(B^{h,H}, C^H, \nu^H)$. En fait, et sans plus de difficultés, nous allons montrer que ces conditions de convergence sont mêmes vraies en variation. Ceci nous sera utile pour des raisons stochastiques en fin d'étape.

Commençons par un lemme préliminaire :

Lemme (2.8) : *Soit* $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \to W(u,v)$ *continue bornée et vérifiant :*

(*i*) $\exists A > 0 \ / \ \forall u,u',v \in \mathbb{R} \quad |W(u,v) - W(u',v)| \leq A|u-u'|$

(*ii*) $\exists a_W > 0 \ / \ |v| \leq a_W \Rightarrow W(u,v) = 0.$

Alors, sous $\boxed{\text{CBH}}$, $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCF}}$, [*Var*-$\delta$], [*sup*-$\eta$] *et* $\mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$, *on a :*

$$\forall t > 0 \quad R^n_t = V_t\left(\int_0^\cdot W(H^n_s,v)\nu^n(ds \times dv) - \int_0^\cdot W(H_s\circ X^n,v)\ \nu(X^n,ds\times dv)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

Preuve : $R^n_t \leq U^n_t + V^n_t$ où :

$$U^n_t = \int_0^t |W(H^n_s,v) - W(H_s\circ X^n,v)|\nu(X^n,ds\times dv)$$

et
$$V^n_t = V_t\left(\int_0^\cdot W(H^n_s,v)(\nu^n(ds \times dv) - \nu(X^n,ds \times dv))\right)$$

$$U^n_t \leq \int_0^t (A|H^n_s-H_s\circ X^n|)\wedge 2\|W\|_\infty \quad g(v)\nu(X^n,ds \times dv) \text{ où } g \in \hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R},[0,1])$$

et vérifie $g(v) = 1$ si $|v| \geq a_W$, $g(v) = 0$ si $|v| \leq \frac{a_W}{2}$. Par suite

$$U^n_t \leq [(A \sup_{s\leq t} |H^n_s-H_s\circ X^n|)\wedge 2\|W\|_\infty] \quad g * \nu_t(X^n).$$

$g * \nu$ étant $\mathbb{P}$-ps Sk-continue d'après $\boxed{\text{d}\mathbb{P}\text{-CCF}}$ et $\mathbb{P}^n_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$

$(g * \nu_t(X^n))_{n \geq 0}$ est tendue. [sup-n] assure alors clairement que $U^n_t \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Pour V^n_t on procède en trois temps :

(1) Tout d'abord, on suppose que $W(u,v) = a(u)b(v)$, $a \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et $b \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R})$.

(W ne vérifie pas (i) a priori mais cela n'a aucune importance ici car la quantité V^n_t existe). Il vient :

$$\int_0^s W(H^n_u,v)\nu^n(du \times dv) = \int_0^s a(H^n_u)d(b*\nu^n)_u$$

$$\int_0^s W(H^n_u,v)\nu(X^n,du \times dv) = \int_0^s a(H^n_u)d(b*\nu)_u(X^n)$$

donc $V^n_t \leq \|a\|_\infty \quad V_t(b*\nu^n - b*\nu(X^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

(2) La convergence en loi ci-dessus se maintient, grâce à la sous-additivité de la variation, lorsque $W \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}_b \otimes \hat{\mathcal{C}}_{Lip}} = \text{vect}\{a \otimes b \quad a \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \quad b \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R})\}$

(3) D'après le théorème de Stone-Weinstrass il est clair que $\mathcal{V}_{\mathcal{C}_b \otimes \hat{\mathcal{C}}_{Lip}}$ est U_K-dense dans $\{W \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant ((i) et) (ii)$\}$ et qu'en outre il existe pour un tel W une suite W^p de $\mathcal{V}_{\mathcal{C}_b \otimes \hat{\mathcal{C}}_{Lip}}$ vérifiant :

- $W^p \xrightarrow{U_K} W$

- $\exists a > 0 \ / \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |v| \leq a \Rightarrow W^p(u,v) = 0$.

De plus, quitte à changer W^p en $(-\|W\|_\infty - 1) \vee [W^p \wedge (\|W\|_\infty + 1)]$, on peut supposer que $L = \sup_{p \in \mathbb{N}} \|W^p\|_\infty < +\infty$ et $\|W\|_\infty \leq L$.

Posons maintenant $A^n = (\sup_{s \leq t} |H^n_s| \leq M(t))$ et $\overline{W}^p = W^p - W$. Il vient alors :

$$V^n_t \leq \mathbb{1}_{{}^cA^n} V^n_t + V^{n,p}_t + \overline{V}^{n,p}_t$$

avec :

$$V_t^{n,p} = \mathbb{1}_{A^n}\, V_t\Big(\int_0^{\cdot} W^p(H_s^n,v)\ (\nu^n(ds \times dv) - \nu(X^n,ds \times dv))\Big)$$

$$\overline{V}_t^{n,p} = \mathbb{1}_{A^n}\ V_t\Big(\int_0^{\cdot} \overline{W}^p(H_s^n,v)(\nu^n(ds \times dv) - \nu(X^n,ds \times dv))\Big).$$

Soit $\overline{g} \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R})$ vérifiant $\overline{g}(v) = 0$ si $|v| \leq \frac{1}{2}(a \wedge a_w)$

$\overline{g}(v) = 1$ si $|v| \geq a \wedge a_w$.

On se donne $A,\varepsilon,\eta > 0$:

$$\begin{aligned}\overline{V}_t^{n,p} &\leq \|\overline{W}^p\|_{[-M(t),M(t)]\times[-A,A]}(\overline{g} * \nu_t^n + \overline{g}*\nu_t(X^n)) + 2L(\nu^n([0,t]\times\{|x|>A\}) \\ &\qquad\qquad + \nu(X^n,[0,t]\times\{|x|>A\})) \\ &\leq \|\overline{W}^p\|_{[-M(t),M(t)]\times[-A,A]} \times S^n \qquad + 2L\times T^n.\end{aligned}$$

$(X^n)_{n\geq 0}$ étant Sk-tendue, il existe $A_o > 0$ et $n_o \in \mathbb{N}$ (cf [3]-V lemme (1.8)) tels que : $n \geq n_o \Rightarrow \mathbb{P}^n(\nu^n([0,t] \times \{|x| > A_o\} > \frac{\varepsilon}{16L}) < \frac{\eta}{3}$.

De [Var-δ] on déduit alors sans peine, en considérant une fonction de $\hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R})$ adéquate qu'il existe n_1 vérifiant :

$$n \geq n_1 \Rightarrow \mathbb{P}^n(\nu(X^n,[0,t] \times \{|x| > A_o\}) > \frac{\varepsilon}{16L}) < \frac{\eta}{3}$$

d'où : $\qquad n \geq n_o \vee n_1 \Rightarrow \mathbb{P}^n(2LT^n > \frac{\varepsilon}{4}) < \frac{2\eta}{3}$.

D'autre part, toujours grâce à la tension de $(\mathbb{P}^n_{X^n})_{n\geq 0}$ et [Var-δ], $(S^n)_{n\geq 0}$ est tendue donc :

$$\exists N > 0 \ /\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}^n(S^n > N) < \frac{\eta}{3}$$

Soit $p_o \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq p_o \Rightarrow \|\overline{W}^p\|_{[-M(t),M(t)]\times[-A_o,A_o]} < \frac{\varepsilon}{4N}$. Il s'ensuit que $\mathbb{P}^n(\|\overline{W}^p\|_{[-M(t),M(t)]\times[-A_o,A_o]} > \frac{\varepsilon}{4}) < \frac{\eta}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \geq p_o$.

D'où : $$\lim_{p\to+\infty} \overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(\overline{V}_t^{n,p} > \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

Comme par ailleurs $\forall p \in \mathbb{N}$ $\lim_n \mathbb{P}^n(V_t^{n,p} > \frac{\varepsilon}{2}) = 0$ d'après (2), il vient finalement :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(V_t^n > \varepsilon) \leq 0 + 0 + \overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(\overline{V}_t^{n,p} > \frac{\varepsilon}{2})$$

puisque $\mathbb{P}^n(A^n) \to 0$ d'après la Remarque (2.3). On obtient le résultat recherché en passant à la limite en p. □

• [sup-δ]. Soit $f \in \hat{\mathcal{C}}_{Lip}(\mathbb{R}^2)$. On pose $W(u,v) = f(uv,v)\,\rho(u)$ où $\rho \in \mathcal{C}_{Lip}(\mathbb{R},[0,1])$,

$$\rho(u) = 1 \quad \text{si} \quad |u| \leq M(t) \quad \text{et} \quad \rho(u) = 0 \quad \text{si} \quad |u| \geq 2M(t).$$

En reprenant la notation $A^n = (\sup_{s\leq t} |H_s^n| \leq M(t))$ du lemme (2.8) on obtient :

$$\mathbb{1}_{A^n}\, V_t(f*\nu^{n,H^n} - f*\nu^H \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$$

en appliquant (2.8) à W, et partant, puisque $\mathbb{1}_{A^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ d'après la Remarque (2.3), $V_t(f*\nu^{n,H^n} - f*\nu^H \circ X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$

• [sup-β]. Le résultat sur la seconde coordonnée est évident. Pour la première on procède en deux temps. Tout d'abord, en "coupant" comme dans le lemme (2.8) et à l'aide des arguments habituels, on obtient :

$$\mathbb{1}_{A^n}\, V_t(H^n \cdot B^{h,n} - (H\cdot B^h)\circ Z^n) \leq M(t) V_t(B^{h,n} - B^h \circ X^n) + \sup_{s\leq t} |H_s^n - H_s \circ X^n| V_t(B^h)\circ X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

et donc $V_t(H^n \cdot B^{h,n} - (H\cdot B^h)\circ Z^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$

Ensuite on applique dans l'esprit de [sup-δ] ci-avant le lemme (2.8) à $W(u,v) = [uh(v) - h(u,v)]\,\rho(u)$ (le fait que la troncation h soit lipschitzienne permet de montrer que W vérifie les hypothèses du lemme (2.8)) ce qui assure la convergence de la partie résiduelle.

• [sup-γ] . Posent un problème le premier terme diagonal et le terme antidiagonal. Traitons le premier à titre d'exemple. La partie intégrale de Stieltjès en $\tilde{C}^h$ vérifie :

$$\mathbb{1}_{A^n}\, V_t((H^n)^2 \cdot \tilde{C}^{h,n} - (H^2 \cdot \tilde{C}^h)\circ Z^n) \leq M^2(t) V_t(\tilde{C}^{h,n} - \tilde{C}^h \circ X^n) + 2M(t) \sup_{s\leq t} |H_s^n - H_s \circ X^n|\, |\tilde{C}_t^{h,n} \circ X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

La partie intégrée par ν se traite par le lemme (2.8) appliqué à

$$W(u,v) = ([h(uv)]^2 - [uh(v)]^2)\rho(u).$$

Reste la partie faisant intervenir les sauts de $B^{h,n}$ et B^h que l'on divise elle-même en deux. D'une part on obtient aisément :

$$\mathbb{1}_{A^n} \sum_{0<s\leq t} |(H^n_s \Delta B^{h,n}_s)^2 - (H_s \Delta B^h_s)^2 \circ Z^n| \leq \mathbb{1}_{A^n} 2aM(t) \sum_{0<s\leq t} |H^n_s \Delta B^{h,n}_s - (H_s \Delta B^h_s) \circ X^n|$$

$$\leq 2aM(t)\ V_t(H^n \cdot B^{h,n} - (H \cdot B^h) \circ X^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

et d'autre part :

$$\sum_{0\leq s\leq t} |(\Delta B^{h,n,H^n,1}_s)^2 - (B^{h,H,1}_s)^2 \circ Z^n| \leq 2a\ V_t(B^{h,n,H^n,1} - B^{h,H,1} \circ X^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

3ème étape : Attaquons-nous maintenant aux conditions $\boxed{\text{d}\mathbb{Q}\text{-CCS}}$ de théorème (2.13) (sous $\boxed{\text{QCG}}$) et $\boxed{\text{d}\mathbb{Q}\text{-CC}}$ du théorème (3.1). Supposons que nous ayons démontré que :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Q}\text{-ps} \quad \alpha \to B^{h,H}(\alpha) \ \text{ de } \mathbb{D}^2 \text{ dans } \mathbb{V}^2 \\ \mathbb{Q}\text{-ps} \quad \alpha \to \tilde{C}^{h,H}(\alpha) \ \text{ de } \mathbb{D} \text{ dans } \mathbb{V}^4 \\ \forall f \in \hat{\mathcal{E}}_{Lip}(\mathbb{R}^2) \quad \mathbb{Q}\text{-ps} \quad \alpha \to f*\nu^H(\alpha) \ \text{ de } \mathbb{D}^2 \text{ dans } \mathbb{V}^1 \end{array}\right\} \text{sont } (Sk,V_K) \text{ continues}$$

Il est clair que $\boxed{\text{d}\mathbb{Q}\text{-CC}}$ sera (largement !) vérifiée car la convergence en variation est plus fine que la convergence simple. Pour se convaincre qu'il en est de même pour $\boxed{\text{d}\mathbb{Q}\text{-CCS}}$ sous $\boxed{\text{QCG}}$ il suffit de remarquer que, d'une part la convergence en variation est plus fine que la Sk-convergence et d'autre part que tous les $\alpha \in \mathbb{D}^2$ tels que ν^H continue en s et $f * \nu^H$ (Sk,V_K)-continue en α, l'application $\alpha \to (\alpha, f*\nu^H(\alpha))$ est Sk-continue en α. Or, d'après $\boxed{\text{QCG}}$, ν, définie sur $\mathbb{D}^1$, est $\mathbb{P}$-ps continue en s, donc, comme $Z^2(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}$, ν étendue à $\mathbb{D}^2$ est $\mathbb{Q}$-ps continue en s. Il suffit alors de remarquer que :

$$\forall s > 0 \qquad \nu^H(\{s\}, dx \times dy) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2-\{0\}}\ \theta(\nu(\{s\} \times dx)) \quad \text{où} \quad \theta(x) = (H_s x, x)$$

pour pouvoir en conclure que $\mathbb{Q}$-ps ν^H est continue en s.

Reste donc à motnrer (2.9). Les quantités mises en jeu ne dépendant que de la seconde projection de $\mathbb{D}^2$ sur $\mathbb{D}^1$ et vu que $Z^2(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}$, le problème se circonscrit à montrer ces continuités $\mathbb{P}$-ps pour les c.l. non étendues. Ce "transfert" effectué, on s'aperçoit que les techniques à mettre en oeuvre pour résoudre ces questions sont analogues à celles de l'étape précédente. Nous ne reviendrons - rapidement - ici que sur l'analogue du lemme (2.8) pour illustrer cette similitude.

Lemme (2.8') : *Soit W comme dans le lemme (2.8)*

$$\left(\boxed{CBH}, \boxed{d\mathbb{P}\text{-}CCF}, \boxed{d\mathbb{P}\text{-}CCH} \right) \Rightarrow (\mathbb{P}\text{-ps } \alpha \to \int_0^{\cdot} W(H_s(\alpha),v)\nu(\alpha,ds \times dv)$$

est (Sk,V_K) continue de $\mathbb{D}^1$ dans $\mathbb{D}^1$).

Preuve : Constatons d'abord que le lemme (2.8) ne fait intervenir qu'un nombre dénombrable de fonctions de $\hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$: $g, \bar{g}$, les fonctions b constitutives de la suite W^p. On considère donc un α point de continuité de toutes les $f*\nu$ pour ces fonctions ainsi que des H_s pour tous les s. Par hypothèse l'ensemble de tels α est de $\mathbb{Q}$-probabilité 1.

Soit alors $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$.

$$V_t\left(\int_0^{\cdot} W(H_s(\alpha^n),v)\ \nu(\alpha^n,ds\times dv) - \int_0^{\cdot} W(H_s(\alpha),v)\nu(\alpha,ds\times dv)\right)$$

$$\leq \int_0^t [(A|H_s(\alpha^n)-H_s(\alpha)|)\wedge 2\|W\|_\infty]\ g(v)\ \nu(\alpha,ds\times dv) + V_t\left(\int_0^{\cdot} W(H_s(\alpha^n),v)(\nu(\alpha^n,ds\times dv) - \nu(\alpha,ds\times dv))\right).$$

Le premier terme du second membre tend vers 0 grâce au théorème de convergence dominée appliqué avec la mesure finie $N(ds) = \int_0^t g(t)\ \nu(\alpha,ds\times dv)$. Quant au second on le traite en approchant W par la même suite W^p qu'en (2.8) et en imitant la preuve qui y est présentée point par point. □

4ème étape : Conditions de bornitude (sous $\boxed{CBF}$)

$$Tr(C^H) + (|x|^2\wedge 1)*\nu^H = (H^2+1)\cdot C + \{[(H^2+1)x^2]\wedge 1\}*\nu \leq (M^2+1)(C + x^2\wedge 1*\nu) \leq (M^2+1)\Lambda$$

d'où la condition recherchée.

5$^{\text{ème}}$ étape : Au vu des étapes précédentes et grâce aux théorèmes (2.13) et (3.1) de II, on peut affirmer que le processus canonique sur $\mathbb{D}^2, \mathcal{Z}$, est une $(\mathbb{Q}, \mathcal{D}^2)$-semi-martingale de c.l. $(B^{h,H}, C^H, \nu^H)$ et de loi initiale $\delta_0 \otimes \xi$ où $\xi = \mathbb{P}_{X_0}$.

D'après le théorème (1.1) (b) il vient :

$$\mathbb{Q}\text{-ps} \qquad \mathcal{Z}^1 = H \cdot \mathcal{Z}^2,$$

soit encore, vu que $\mathcal{Z}^2(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}$:

$$\mathbb{Q} = (H \cdot X, X)\ (\mathbb{P})$$

où X désigne le processus canonique sur $\mathbb{D}^1$ et $H \cdot X$ une version ($\mathcal{D}^1$-mesurable) de la $\mathbb{P}$-intégrable stochastique de H par rapport à la semi-martingale X. Ceci détermine entièrement $\mathbb{Q}$ et assure donc que $(\mathcal{Z}^n)_{n \geq 0}$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. D'où le résultat final attendu :

$$\mathbb{P}^n_{(H^n \cdot X^n, X^n)} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}_{(H \cdot X, X)}.$$

3° - Compléments :

Nous allons voir ici qu'en fait, sous certaines hypothèses d'absolue continuité des c.l. (B^h, C, ν), il est possible d'affaiblir la condition de convergence $[\sup\text{-}\eta]$ dans le théorème (2.2).

Soit en effet une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{D}^d, \mathcal{D}^d)$ faisant du processus canonique une $\mathcal{D}^d$-semi-martingale de c.l. données par :

$$(3.1) \qquad B^h_t(\alpha) = \int_0^t b^h_s(\alpha) dF_s, \quad C_t(\alpha) = \int_0^t c_s(\alpha) dF_s \quad \text{et} \quad \nu(\alpha) = N_s(\alpha, dx) dF_s$$

où les quantités F, b^h, c et N vérifient :

$$
(3.2)\left\{
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ \text{est càdlàg croissante} \\
 & \forall \alpha \in \mathbb{D}^d, \forall t \geq 0 \quad b_t^h(\alpha) \in \mathbb{R}^d,\ c_t(\alpha) \in S^+(d,\mathbb{R}) \ \text{et} \\
 & \qquad N_s(\alpha,dx) \in \{\mu \ \text{mesures positives}/\mu(\{0\}) = 0 \ \text{et} \ \mu(|x^2|\wedge 1) < +\infty\} \\
\text{(ii)} & b^h,\ c \ \text{et} \ N(f) \ \text{sont} \ \underline{\mathcal{D}}^d\text{-prévisibles pour toute } f \text{ dans } \hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d) \\
\text{(iii)} & \text{Si on pose } \tilde{c}^h = [c^{j,k} + N(h^j h^k) - \sum_{0<s\leq \cdot} b_s^{h,j} b_s^{h,k} (\Delta F_s)^2]_{1\leq j\leq k\leq d}, \\
 & \text{alors :} \\
 & - \forall \alpha \in \mathbb{D}^d \ \forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d) \quad b^h(\alpha),\ \tilde{c}^h(\alpha) \ \text{et} \ N(\alpha,f) \ \text{sont des fonctions} \\
 & \quad \text{boréliennes de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R} \ \text{localement bornées uniformément en } \alpha. \\
 & -\forall f \in \hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d) \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad dF_s\text{-p.s.} \ \alpha \to (b_s^h(\alpha), \tilde{c}_s^h(\alpha), N_s(\alpha,f)) \ \text{est} \\
 & \quad \text{Sk-continue.} \\
\text{(iv)} & F \ \text{continue} \ \underline{\underline{\text{ou}}} \ \forall t > 0 \ \sup_{\alpha \in \mathbb{D}^d} \sup_{s \in [0,t]} N_s(\alpha, |x|^2 \wedge 1) < +\infty. \ \text{Cette} \\
 & \quad \text{dernière condition entraîne, sous (iii),} \\
 & \quad \sup_{\alpha \in \mathbb{D}^d} \sup_{s \in [0,t]} (c_s(\alpha) + N_s(\alpha,|x|^2 \wedge 1)) \leq \sup_{\mathbb{D}^d \times [0,t]} \tilde{c}_s^h(\alpha) + \\
 & \qquad\qquad + \sup_{\mathbb{D}^d \times [0,t]} N_s(\alpha,|x|^2 \wedge 1) < +\infty \\
 & \quad \text{et correspond bien entendu, sous sa forme "intégrée", à } \boxed{\text{CBF}}.
\end{array}\right.
$$

<u>*Remarque* (3.3)</u> : Notons au passage que, outre ces propriétés, b^h, c, N doivent nécessairement vérifier les relations : $\mathbb{P}$-ps $\forall t > 0$ $c_t \, \Delta F_t = (b_t^h - N_t(h))\Delta F_t = 0$, etc.

<u>*Théorème* (3.4)</u> : *Soient* $(X^n)_{n \geq 0}$, $(H^n)_{n \geq 0}$, H *comme dans le théorème* (2.2) *et* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\mathbb{D}^d, \underline{\mathcal{D}}^d)$ *vérifiant :*

- X *est une* $(\mathbb{P}, \underline{\mathcal{D}}^d)$*-semi-martingale dont les c.l. sont de la forme* (3.1) *et vérifient* (3.2).

- $\boxed{CBH}$
- $\boxed{d\mathbb{P}\cdot dF\text{-}CCH}$ $\mathbb{P}$-ps dF_s-p.p. H_s est Sk-continu.
- $[Var\text{-}\beta]$, $^-[Var\text{-}\gamma]$, $[Var\text{-}\delta]$
- $[dF\text{-}\eta]$ (*i*) *Il existe* $\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *croissante vérifiant* :

$$\forall t > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \mathbb{P}^n(\sup_{s \leq t} |H_s^n| \geq \Lambda(t)) \leq \varepsilon$$

(*ii*) dF_s-p.p. $H_s^n - H_s \circ X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$

- $\mathbb{P}_{X^n} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}$.

Alors $\mathbb{P}^n_{(H^n\cdot X^n, X^n)} \xrightarrow{(Sk)} \mathbb{P}_{(H\cdot X, X)}$.

Démonstration : (abrégée) Nous allons réexaminer certains passages de la preuve du théorème (2.2)(b)

(a) Dans un premier temps assurons nous que (B^h, C, ν) vérifie la $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCF}}$. Ceci est essentiellement évident ; en effet si $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$ et b_s^h est dF_s-p.p-continue en α, il vient par exemple, à l'aide du théorème de convergence dominée :

$$V_t(B^h(\alpha^n) - B^h(\alpha)) = \int_0^t |b_s^h(\alpha^n) - b_s^h(\alpha)| \, dF_s \longrightarrow 0.$$

Reste à voir, pour ce qui concerne la continuité, ce qu'il en est de l'affaiblissement de $\boxed{d\mathbb{P}\text{-CCH}}$ en $\boxed{d\mathbb{P}\cdot dF\text{-CCH}}$. Illustrons à nouveau cette question à l'aide du lemme (2.8'). Une relecture de ce lemme montre ainsi qu'un des problèmes à résoudre est celui de la convergence vers 0 de la quantité

$$\int_0^t (A|H_s(\alpha^n) - H_s(\alpha)|) \wedge 2\|W\|_\infty \quad g(v) \ \nu(\alpha, ds \times dv).$$

Or cette quantité vaut $\int_0^t (A|H_s(\alpha^n) - H_s(\alpha)|) \wedge (2\|W\|_\infty) N_s(\alpha, g) \, dF_s$. Soit donc α telle que H_s soit dF_s-p.p. Sk-continu en α et $\alpha^n \xrightarrow{Sk} \alpha$; il vient :

$$dF_s\text{-p.p} \quad (A|H_s(\alpha^n) - H_s(\alpha)|) \wedge (2\|W\|_\infty) N_s(\alpha, g) \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

et $\quad (A|H_s(\alpha^n) - H_s(\alpha)|)\wedge(2\|W\|_\infty)\, N_s(\alpha,g) \leq 2\|W\|_\infty\, N_s(\alpha,g) \in L^1(dF)$

car $s \to N(\alpha,g)$ est localement bornée. On peut donc conclure par convergence dominée.

Les autres actualisations (dans le § b concernant la tension par exemple) se font de façon analogue.

(b) L'autre type de problème à résoudre consiste à vérifier que les hypothèses (3.1), (3.2) et $[dF\text{-}\eta]$ sont ici suffisantes pour suppléer à $[\sup\text{-}\eta]$ dans la démonstration des conditions de convergence $[\sup\text{-}\beta]$, $[\sup\text{-}\gamma]$ et $[\sup\text{-}\delta]$ associées à $(B^{h,n,H^n}, C^{n,H^n}, \nu^{n,H^n})$ et $(B^{h,H}, C^H, \nu^H)$. Nous allons indiquer comment procéder sur un exemple (très) partiel. Tous les autres cas peuvent se traiter de façon analogue, au prix d'une quantité de calculs... suffisante.

Soient donc $\varepsilon > 0$ et $t > 0$ (Dorénavant on fera $\Lambda = M$ comme c'est loisible)

$$\mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t} |\int_0^s H_u^n\, dB_u^{h,n} - (\int_0^s H_u\, dB_u^h)\circ X^n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t}|H_s^n|>M(t))$$
$$+ \mathbb{P}^n(V_t(B^{h,n}-B^h\circ X^n) \geq \frac{\varepsilon}{2M(t)}) + \mathbb{P}^n(\int_0^t [|H_s^n-H_s\circ X^n|\wedge 2M(t)]\, |dB_s^h\circ X^n| \geq \frac{\varepsilon}{2})$$

$[dF\text{-}\eta]$ (i), $[\mathrm{Var}\text{-}\beta]$ et (3.1) entraînent :

$$\overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(\sup_{s\leq t} |\int_0^s H_u^n dB_u^{h,n} - (\int_0^s H_u dB_u^h)\circ X^n| \geq \varepsilon) \leq \overline{\lim_n}\, \mathbb{P}^n(\int_0^t [|H_s^n-H_s\circ X^n|\wedge 2M(t)]\, |b_s^h(X^n)|\, dF_s \geq \frac{\varepsilon}{2})$$

(3.2) (iii) $\Rightarrow K_t = \sup_{(\alpha,s)\in \mathbb{D}^d\times[0,t]} |b_s^h(\alpha)| < +\infty$ donc

$$\mathbb{P}^n(\int_0^t [|H_s^n-H_s\circ X^n|\wedge 2M(t)]\, |b_s^h(X^n)|\, dF_s \geq \frac{\varepsilon}{2}) \leq \mathbb{P}^n(\int_0^t |H^n-H_s\circ X^n|\wedge 2\, M(t)\, dF_s \geq \frac{\varepsilon}{2K_t})$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébitcheff et le théorème de Fubini, il vient :

$$\mathbb{P}^n(\int_0^t |H_s^n-H_s\circ X^n)|\wedge 2M(t)\, dF_s \geq \frac{\varepsilon}{2K_t}) \leq \frac{2K_t}{\varepsilon} \int_0^t E^n(|H_s^n-H_s\circ X^n|\wedge 2M(t))\, dF_s$$
$$\leq \frac{\eta}{2} \quad \text{au moins pour } n \text{ assez grand}$$

(pour ce faire appliquer $[dF\text{-}\eta]$ (ii) et le théorème de convergence dominée deux fois).

Finalement on peut conclure :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n} \mathbb{P}^n(\sup_{s \leq t} \left| \int_0^s H_u^n \, dB_u^{h,n} - (\int_0^s H_u \, dB_u^h) \circ X^n \right| \geq \varepsilon) = 0. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE :

[1] *P. BILLINGSLEY* : Convergence of Probability measure. Wiley, 1968.

[2] *J. JACOD* : Weak and strong solutions for stochastic differential equations. Stochastics, 3, 171-191, 1980.

[3] *J. JACOD* : Théorèmes limites pour les processus. Cours de l'Ecole d'Eté de St-Flour. Lecture Notes in Mathematics, n° 117, 1985.

[4] *J. JACOD, J. MEMIN et M. METIVIER* : On tightness and stopping times. Stochastic and their applications 14, 2, 1-45, 1982.

[5] *T. LINDVALL* : Weak convergence of probability measures and random functions in the functions space $\mathbb{D}[0,+\infty[$. Journal of Applied Probability 10, 109-121, 1973.

[6] *G. PAGÈS* : Théorèmes limites pour les semi-martingales Thèse de 3ème cycle (Laboratoire de Probabilités et Applications. Paris VI). 1985.

[7] *C. STONE* : Weak convergence of stochastic processes defined on a semi-finite interval. Proceedings of American Mathematical Society 14, 694-696, 1963.