SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN PICARD

Une classe de processus stable par retournement du temps

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 56-67

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__56_0>

UNE CLASSE DE PROCESSUS STABLE
PAR RETOURNEMENT DU TEMPS

Jean PICARD*

1. Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier, pour certains processus stochastiques X_t, $0 \leq t \leq 1$, les propriétés du processus retourné $\overline{X}_t = X_{1-t}$. Il est bien connu que si X est un processus de Markov, alors $\overline{X}$ en est également un. Si X est un processus de diffusion, solution d'une équation différentielle

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{1.1}$$

sous certaines hypothèses de regularité ([4]), le processus $\overline{X}$ est solution d'une équation analogue

$$d\overline{X}_t = \overline{b}(t, \overline{X}_t) + \overline{\sigma}(t, \overline{X}_t)d\overline{W}_t. \tag{1.2}$$

Cependant, il est souvent utile d'obtenir une majoration sur le coefficient de dérive $\overline{b}$ et une telle propriété semble délicate à atteindre en utilisant la formule explicite pour $\overline{b}$: dans le cas où σ ne dépend pas de x, voir [3] pour des hypothèses suffisantes pour que $\overline{b}$ soit borné ou à croissance linéaire. En revanche, supposons que l'on s'intéresse non pas à $\overline{b}(t,x)$ pour t fixé, mais seulement à la variable $\overline{\xi} = \int_0^1 |\overline{b}(t, \overline{X}_t)|^2 dt$; nous allons décrire dans ce papier une méthode probabiliste permettant d'estimer les moments de cette variable, ce qui est parfois suffisant — pour un exemple d'application au filtrage non linéaire de ce type de résultat, voir la conclusion de [8]. Cette méthode permet de plus de quitter le cadre markovien en autorisant la dérive $b(t, X)$ à dépendre de toute la trajectoire de X avant t; elle a déjà été utilisée ([2]) dans le cas $\sigma = I$ pour estimer l'espérance de $\overline{\xi}$; elle consiste à construire un modèle de référence pour lequel on a une expression simple du retourné et par rapport auquel la loi du processus considéré initialement est absolument continue. La construction de ce modèle de référence fait l'objet de la section 2; elle est analogue à la construction des processus de Nelson de [10] mais ici le coefficient de diffusion n'est pas supposé constant et peut être dégénéré; elle utilise le résultat de [7]. En section 3, ce modèle est utilisé pour décrire une classe de processus telle que si X appartient à cette classe, $\overline{X}$ y appartient aussi; cette section utilisera les résultats décrits dans [6] sur l'absolue continuité des lois de processus de Itô. En section 4, on donne des propriétés d'intégrabilité des processus de cette classe qui se conservent par retournement du temps; un exemple d'utilisation est décrit en section 5. En conclusion, nous noterons le lien avec d'autres problèmes de grossissement de filtrations.

2. Construction du modèle de référence

Nous commençons par introduire quelques données. L'espace de probabilité sera le produit $\Theta = \mathbf{R}^m \times \mathbf{C}(\mathbf{R}^d)$ (m et d entiers strictement positifs), où $\mathbf{C}(\mathbf{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^d$ muni de sa tribu borélienne, de la mesure de Wiener $\mathcal{W}$; quant à l'espace $\mathbf{R}^m$, il est muni de la mesure de Lebesgue λ et d'une mesure de probabilité $q_0.\lambda$ absolument continue. On munit alors Θ de la probabilité produit Q, on considère la variable $X_0(x,w) = x$, le processus $W_t(x,w) = w(t)$ et la filtration $\mathcal{F}_t$ complétée engendrée par la variable initiale X_0 et W. On note $\mathbf{S}^m = \mathbf{R}^m \cup \{\Delta\}$ le compactifié de $\mathbf{R}^m$ obtenu en ajoutant un point

* INRIA, Route des Lucioles, Sophia Antipolis, 06560 Valbonne (France)

à l'infini. On considère également deux fonctions boréliennes β et σ definies sur $[0,1]\times\mathbf{R}^m$ à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^m\otimes\mathbf{R}^d$; les hypothèses sur q_0, β et σ sont les suivantes:
(a) q_0 est à valeurs strictement positives et admet des dérivées d'ordre 2 localement bornées;
(b) $\beta(t,x)$, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 par rapport à x sont continues en (t,x), et pour tout $(s,x)\in[0,1]\times\mathbf{R}^m$, l'équation $\dot{X}_t=\beta(t,X_t)$ $(0\le t\le 1)$ admet une solution telle que $X_s=x$; on notera $\phi_t^s(x)$ cette solution;
(c) $\sigma(t,x)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 par rapport à x sont continues en (t,x).

D'après (b), ϕ_t^s est un difféomorphisme 3 fois dérivable de $\mathbf{R}^m$ sur lui-même et $\left(\phi_t^s\right)^{-1}=\phi_s^t$; l'image de la mesure $q_0.\lambda$ par ϕ_t^0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on notera $q(t,x)$ sa densité, soit

$$q(t,x)=\det\left[J(\phi_0^t)(x)\right]\,q_0\left(\phi_0^t(x)\right) \tag{2.1}$$

où $J(\phi_0^t)$ désigne la matrice jacobienne de ϕ_0^t. En particulier on a $q(t,x)>0$ pour tout (t,x); de plus, q est de classe C^1 et solution de l'équation de Fokker-Planck du premier ordre

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\sum_{i=1}^m\frac{\partial(\beta_i q)}{\partial x_i}=0. \tag{2.2}$$

On définit également la fonction $F(t,x)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ par

$$F_j(t,x)=\frac{1}{2q(t,x)}\sum_{i=1}^m\frac{\partial(\sigma_{ij}q)}{\partial x_i}(t,x). \tag{2.3}$$

Alors F est une fonction localement lipschitzienne en x uniformément en t donc il existe un unique temps d'arrêt ς à valeurs dans $]0,1]\cup\{\infty\}$ et un unique processus adapté continu X_t à valeurs dans $\mathbf{S}^m$ tel que $X_t=\Delta$ p.s. sur $\{\varsigma\le t\le 1\}$ et

$$X_t=X_0+\int_0^t(\beta+\sigma F)(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)\circ dW_s\quad\text{p.s. sur }\{t<\varsigma\} \tag{2.4}$$

où le "$\circ$" signifie que l'intégrale est prise au sens de Stratonovitch. Notre but est d'étudier le comportement de $\overline{X}_t=X_{1-t}$ sur $\{\varsigma=\infty\}$; pout tout temps t compris entre 0 et 1, nous noterons $\bar{t}=1-t$; $\overline{\mathcal{F}}_t$ sera la filtration engendrée par la variable initiale X_1 et le processus $W_1-W_{\bar{t}}$; il s'agit de savoir si $W_1-W_{\bar{t}}$, qui est un mouvement brownien pour sa filtration naturelle, reste une $\overline{\mathcal{F}}_t$ semimartingale. Nous commençons par un cas où on peut utiliser directement le résultat de [7].

Proposition 1. *Outre les hypothèses (a), (b) et (c), supposons que β et σ sont à support compact et que q_0 est bornée. Alors ς est presque sûrement infini et la loi de X_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $q(t,.)$; de plus, le processus*

$$\overline{W}_t^0=W_{\bar{t}}-W_1-2\int_{\bar{t}}^1F(s,X_s)ds \tag{2.5}$$

est un $\overline{\mathcal{F}}_t$ mouvement brownien et $\overline{X}_t$ est solution de

$$\overline{X}_t=\overline{X}_0+\int_0^t(-\beta+\sigma F)(\bar{s},\overline{X}_s)ds+\int_0^t\sigma(\bar{s},\overline{X}_s)\circ d\overline{W}_s^0. \tag{2.6}$$

Démonstration. La propriété de non explosion est évidente; écrivons (2.4) sous la forme de Itô, soit

$$X_t=X_0+\int_0^t(\beta+b)(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s \tag{2.7}$$

avec
$$b_i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} F_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \sigma_{kj}.$$

En utilisant la définition (2.3) ainsi que la fonction $a = \sigma\sigma^*$ (où l'astérisque désigne la transposée), on obtient
$$b_i = \frac{1}{2q} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(a_{ik}q)}{\partial x_k}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2(a_{ik}q)}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(b_i q)}{\partial x_i}.$$

En associant cette égalité à (2.2), on montre que q est solution de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\big((\beta_i + b_i)q\big)}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2(a_{ik}q)}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{2.8}$$

Si on peut en déduire que q est la densité de X_t, la propriété sur $\overline{W}^0$ se déduira immédiatement de [7] et (2.6) sera obtenue en retournant (2.4), l'intégrale de Stratonovitch se comportant comme une intégrale de Stieltjes. Il ne reste donc qu'à montrer que (2.8) implique que q est la densité de X_t; cela se fait par une technique classique; on commence par supposer que les coefficients q_0, β et σ sont très réguliers (par exemple infiniment différentiables); on en déduit que b est également régulier; en fixant t et une fonction g C^∞ à support compact, on considère, pour $s \leq t$, l'espérance $u(s,x)$ de $g(X_t)$ pour la probabilité solution du problème de martingales associé à (2.7) avec condition initiale x à l'instant s; alors u est régulière et est solution de l'équation rétrograde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} (\beta_i + b_i) \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \qquad u(t,.) = g.$$

Cette équation est l'équation adjointe de (2.8) et on peut montrer par intégration par parties que $\int u(s,x) q(s,x) dx$ est une fonction constante; en égalant les valeurs en 0 et t, on a $\int g(x) q(t,x) dx = \mathbf{E}\big[g(X_t)\big]$ donc q est bien la densité de X_t. Le cas général, pour lequel les coefficients sont moins réguliers, s'en déduit par approximation. □

Nous donnons maintenant un critère de compacité sur les ensembles de lois sur $\mathbf{C}(\mathbf{S}^m)$ (espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{S}^m$).

Lemme 2. *Soit G_r une suite d'ouverts de $\mathbf{S}^m$ qui croissent vers $\mathbf{R}^m$; pour $x \in \mathbf{C}(\mathbf{S}^m)$ et $\alpha, r > 0$, soit*

$$C_{\alpha,r}(x) = \sup\left\{|x(t) - x(s)|\,;\ |t-s| \leq \alpha \text{ et } \forall u \in [s,t]\ x(u) \in G_r\right\}$$

où par convention, le sup *sur un ensemble vide est* 0. *Alors pour qu'une famille de probabilités (P^n) sur $\mathbf{C}(\mathbf{S}^m)$ soit tendue, il est suffisant que pour tout (ε, η, r) strictement positifs, il existe un $\alpha = \alpha(\varepsilon, \eta, r) > 0$ tel que*
$$\limsup_{n\to\infty} P^n\left[C_{\alpha,r}(.) \geq \varepsilon\right] \leq \eta. \tag{2.9}$$

Démonstration. Soit δ une distance sur $\mathbf{S}^m$ compatible avec sa topologie, telle que $\delta(x,y) \leq |x-y|$ si x et y sont finis. Alors (P^n) est tendue si et seulement si pour tout (ε, η), il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} P^n\left[\sup_{|t-s|\leq\alpha} \delta\big(x(s), x(t)\big) \geq \varepsilon\right] \leq \eta. \tag{2.10}$$

On suppose que la condition du lemme est satisfaite et on veut montrer (2.10). Pour cela, nous allons majorer la distance entre $x(s)$ et $x(t)$ en utilisant le module de continuité $C_{\alpha,r}(x)$. On notera δ_r le diamètre pour la distance δ du complémentaire G_r^c de G_r. Fixons $\alpha, r > 0$, s et t tels que $s \leq t \leq s + \alpha$, et $x \in \mathbf{C}(\mathbf{S}^m)$; si la trajectoire x reste dans G_r entre s et t alors $\delta\big(x(s), x(t)\big) \leq C_{\alpha,r}(x)$; sinon, soit $s_1 = \inf\{u \geq s\,;\, x(u) \notin G_r\}$ et $s_2 = \sup\{u \leq t\,;\, x(u) \notin G_r\}$; alors

$$\begin{aligned}\delta\big(x(s), x(t)\big) &\leq \delta\big(x(s), x(s_1)\big) + \delta\big(x(s_1), x(s_2)\big) + \delta\big(x(s_2), x(t)\big) \\ &\leq 2C_{\alpha,r}(x) + \delta_r.\end{aligned} \tag{2.11}$$

L'inégalité (2.11) est donc vraie dans les deux cas et pour tout r; comme G_r^c est une suite de compacts qui décroît vers $\{\Delta\}$, on en déduit que $\delta_r \downarrow 0$ lorsque $r \uparrow \infty$; en choisissant r tel que $\delta_r \leq \varepsilon/2$ et $\alpha = \alpha(\varepsilon/4, \eta, r)$, (2.10) est satisfaite. □

Pour généraliser la proposition 1 au cas où le processus X peut exploser, nous allons agrandir l'espace Θ et exploiter la notion de variable aléatoire floue décrite dans [5]; soit $\widetilde{\Theta} = \Theta \times \mathbf{C}(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{C}(\mathbf{S}^m)$; les variables définies sur Θ sont identifiées naturellement à des variables définies sur $\widetilde{\Theta}$.

Proposition 3. *Il existe sur $\widetilde{\Theta}$ deux filtrations $\mathcal{G}_t$ et $\overline{\mathcal{G}}_t$, un processus continu $\widetilde{X}_t$ à valeurs dans $\mathbf{S}^m$, un processus continu $\overline{W}_t$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et une probabilité $\widetilde{Q}$ dont la projection sur Θ est Q, tels que*

(i) les processus $\widetilde{X}_t$ et $\overline{\widetilde{X}}_t = \widetilde{X}_{1-t}$ sont respectivement $\mathcal{G}_t$ et $\overline{\mathcal{G}}_t$ adaptés;

(ii) pour chaque t fixé, la loi de $\widetilde{X}_t$ ne charge que $\mathbf{R}^m$ et est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $q(t,.)$;

(iii) les processus W_t et $\overline{W}_t$ sont respectivement sous $\widetilde{Q}$ des $\mathcal{G}_t$ et $\overline{\mathcal{G}}_t$ mouvements browniens;

(iv) sur $\{\varsigma = \infty\}$, les relations $\widetilde{X}_t = X_t$ et

$$\overline{W}_t = W_{\bar{t}} - W_1 - 2\int_{\bar{t}}^{1} F(s, X_s)ds \tag{2.12}$$

sont vérifiées $\widetilde{Q}$ p.s.

Démonstration. Les processus $\overline{W}$ et $\widetilde{X}$ sont définis par

$$\overline{W}_t(x, w, \overline{w}, \widetilde{x}) = \overline{w}(t) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{X}_t(x, w, \overline{w}, \widetilde{x}) = \widetilde{x}(t);$$

d'autre part, $\mathcal{G}_t$ et $\overline{\mathcal{G}}_t$ seront les filtrations engendrées respectivement par $(W, \widetilde{X})$ et $(\overline{W}, \overline{\widetilde{X}})$; pour chaque entier n, soit q_0^n, β^n et σ^n des fonctions vérifiant les hypothèses de la proposition 1 et coïncidant avec q_0, β et σ sur $\{(t,x);\ |x| < n\}$; ces coefficients permettent de définir des flots $(\phi_t^s)^n(x)$, des densités q^n et des fonctions F^n comme en (2.1) et (2.3). On a $(\phi_t^s)^n(x) = \phi_t^s(x)$ dès que $|\phi_u^s(x)| < n$ pour $u \in [s,t]$, donc d'après (2.1) et son analogue pour q^n, $q^n = q$ sur $[0,1] \times G_n$ avec

$$G_n = \{x;\ \forall (s,t) \quad |\phi_s^t(x)| < n\}. \tag{2.13}$$

D'après (2.3), on a $F^n = F$ sur ce même ensemble; remarquons que comme $\phi_s^t(x)$ est continu en (s,t,x), les G_n sont une suite d'ouverts qui croissent vers $\mathbf{R}^m$.

Soit maintenant Q^n la probabilité sur $\widetilde{\Theta}$ dont la projection sur Θ est $q_0^n.\lambda \otimes \mathcal{W}$ et telle que Q^n p.s.,

$$\widetilde{X}_t = X_0 + \int_0^t (\beta^n + \sigma^n F^n)(s, \widetilde{X}_s)ds + \int_0^t \sigma^n(s, \widetilde{X}_s) \circ dW_s \tag{2.14}$$

$$\overline{W}_t = W_{\overline{t}} - W_1 - 2\int_{\overline{t}}^1 F^n(s, \widetilde{X}_s)ds. \tag{2.15}$$

La proposition 1 montre que $\overline{W}_t$ est un $(\overline{\mathcal{G}}_t, Q^n)$ mouvement brownien. Pour montrer que (Q^n) forme une famille tendue, il suffit de montrer que les lois sous Q^n de chacune des quatre composantes X_0, W, $\overline{W}$ et $\widetilde{X}$ forment des familles tendues. Pour les trois premières, c'est facile, et on a même plus en ce qui concerne les deux premières: pour toute fonction g borélienne bornée définie sur Θ,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{Q^n}\left[g(X_0, W)\right] = \mathbf{E}_Q\left[g(X_0, W)\right]. \tag{2.16}$$

Il reste à étudier la loi P^n de $\widetilde{X}$; pour cela, on utilise le lemme 2, la condition (2.9) se déduisant de

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} P^n\left[C_{\alpha,r}(x) \geq \varepsilon\right] &= P^r\left[C_{\alpha,r}(x) \geq \varepsilon\right] \\ &\leq P^r\Big[\sup_{|t-s|\leq\alpha} |\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \geq \varepsilon\Big].\end{aligned}$$

Donc (Q^n) est tendue; soit $\widetilde{Q}$ une valeur d'adhérence: il existe une sous-suite $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ tel que $(Q^n, n \in \mathbf{N}')$ converge étroitement vers $\widetilde{Q}$. En fait, la convergence est plus forte: d'après (2.16) et le corollaire 2.9 de [5], pour toute fonction borélienne bornée g définie sur $\widetilde{\Theta}$, continue par rapport au couple des deux dernières composantes,

$$\lim_{\mathbf{N}'\ni n\to\infty} \mathbf{E}_{Q^n}\left[g(X_0, W, \overline{W}, \widetilde{X})\right] = \mathbf{E}_{\widetilde{Q}}\left[g(X_0, W, \overline{W}, \widetilde{X})\right]. \tag{2.17}$$

Vérifions les conclusions de la proposition; (i) est évident; la densité de $\widetilde{X}_t$ sous Q^n est $q^n(t,.)$, donc on déduit facilement (ii) par passage à la limite; d'autre part, W est un mouvement brownien et, pour $0 \leq s \leq t \leq 1$, la propriété d'indépendance de $W_t - W_s$ et de $(W_u, \widetilde{X}_u; u \leq s)$ passe également à la limite donc W est bien un $\mathcal{G}_t$ mouvement brownien; on procède de même avec $\overline{W}$ et on obtient (iii). Il reste donc à démontrer (iv). Soit $\varsigma_r = \inf\{t;\ X_t \notin G_r\}$; soit $A_r = \{\varsigma_r = \infty\}$ et $A = \{\varsigma = \infty\}$; les équations (2.4) et (2.14) coïncidant jusqu'en ς_n, l'unicité de la solution implique que pour tout $n \geq r$, la relation $X_t = \widetilde{X}_t$ est valable Q^n p.s. sur A_r; par (2.15), l'équation (2.12) est valable dans les mêmes conditions, donc pour toute fonction continue bornée sur $\widetilde{\Theta}$,

$$\mathbf{E}_{Q^n}\left[g(X_0, W, \overline{W}, \widetilde{X})1_{A_r}\right] = \mathbf{E}_{Q^n}\left[g(X_0, W, \overline{W}^0, X)1_{A_r}\right] \tag{2.18}$$

où $\overline{W}^0$ est défini par (2.5) sur A, 0 ailleurs. En utilisant (2.17), on peut passer à la limite en n dans (2.18) et déduire que conditionnellement à A_r, les processus $(X_0, W, \overline{W}, \widetilde{X})$ et $(X_0, W, \overline{W}^0, X)$ ont même loi sous $\widetilde{Q}$; d'autre part, $(\overline{W}^0, X)$ est mesurable par rapport à la tribu de (X_0, W) car X est une solution forte de (2.4); ces deux propriétés impliquent que les processus $(\overline{W}^0, X)$ et $(\overline{W}, \widetilde{X})$ sont $\widetilde{Q}$ indistingables sur A_r, donc sur A en faisant tendre r vers l'infini. □

Remarque 1. Il n'y a pas en général unicité d'une probabilité $\widetilde{Q}$ satisfaisant les conditions de la proposition car rien n'est précisé au sujet du comportement de $\widetilde{X}$ au voisinage du point à l'infini.

Remarque 2. Si le processus X n'explose pas, la proposition 3 dit que les conclusions de la proposition 1 restent vraies; en revanche, si X peut exploser, alors $\overline{X}$ n'est pas nécessairement $\overline{\mathcal{G}}_t$ adapté: en effet, $1 - \varsigma$ qui est le premier instant où $\overline{X}_t$ quitte Δ est aussi le dernier temps de passage de $\widetilde{\overline{X}}_t$ en Δ, donc n'est pas en général un $\overline{\mathcal{G}}_t$ temps d'arrêt. Cependant, (2.6) reste vraie sur A pourvu que $\overline{X}$ soit remplacé par $\widetilde{\overline{X}}$.

3. Retournement du temps pour une classe de processus

Dans cette section, on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la structure assure l'existence de versions régulières des probabilités conditionnelles; soit $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}$ une filtration et soit U_t $(0 \leq t \leq 1)$ un processus $\mathcal{A}_t$ adapté à valeurs dans $\mathbf{R}^d$; on dira que U appartient à la classe $\mathcal{L}(\mathcal{A}_t)$ si et seulement si il existe un processus $\mathcal{A}_t$ adapté b_t et un $\mathcal{A}_t$ mouvement brownien B_t tels que

$$P\Big(\int_0^1 |b_t|^2 dt < \infty\Big) = 1 \tag{3.1}$$

et

$$U_t = \int_0^t b_s ds + B_t. \tag{3.2}$$

Si (b, B) satisfait (3.1) et (3.2), alors b sera appelé la dérive (pour $\mathcal{A}_t$) de U: un tel processus est unique à un ensemble $dt \otimes P$ négligeable près. Soit $\mathcal{U}_t$ la filtration engendrée par U; il résulte des théorèmes 7.4, 7.6 et 7.11 de [6] que si U appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{A}_t)$ alors il appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{U}_t)$ et que de plus

Proposition 4. *Un processus U appartient à la classe $\mathcal{L}(\mathcal{U}_t)$ si et seulement si sa loi est absolument continue par rapport à la mesure de Wiener $\mathcal{W}$. Dans ce cas, si b_t est sa dérive et si R est sa loi, alors*

$$\frac{dR}{d\mathcal{W}}(U) = \exp\left\{\int_0^1 b_t^* dU_t - 1/2 \int_0^1 |b_t|^2 dt\right\} \qquad P \text{ p.s.} \tag{3.3}$$

Nous utiliserons également les deux lemmes

Lemme 5. *Soit $(\Gamma, \mathcal{F})$ un espace mesurable dans lequel varie un paramètre γ. Sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on considère une famille (P^γ) de probabilités dépendant de façon mesurable de γ. Soit U_t un processus $\mathcal{A}$ mesurable engendrant la filtration $\mathcal{U}_t$; si pour tout γ, U_t appartient sous P^γ à $\mathcal{L}(\mathcal{U}_t)$, alors il admet une dérive b^γ qui est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}_t$ adaptée.*

Lemme 6. *Soit ψ une application mesurable d'un espace $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ dans un espace $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$; soit P_1 et Q_1 deux probabilités sur Ω_1 telles que $P_1 \ll Q_1$, soit P_2 et Q_2 leurs images par ψ; on suppose qu'il existe une application mesurable ψ^- de Ω^2 dans Ω^1 telle que $\psi^- \circ \psi(\omega) = \omega$ pour tout ω hors d'une partie Q_1-négligeable. Alors $P_2 \ll Q_2$ et*

$$\frac{dP_2}{dQ_2}(\psi(.)) = \frac{dP_1}{dQ_1} \qquad Q_1 \text{ p.s.}$$

Le lemme 5 se vérifie en montrant que dans la démonstration du théorème 7.11 de [6], toutes les étapes peuvent se faire de façon mesurable en γ; le lemme 6 est élémentaire. Nous décrivons maintenant la classe des processus que nous allons retourner. Soit Y_t un processus $\mathcal{A}$-mesurable à valeurs dans $\mathbf{R}^m$. On dira que Y appartient à la classe $\mathcal{R}$ s'il existe des fonctions β et σ et un processus U_t tels que

(i) la loi de Y_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue;
(ii) si $\mathcal{V}_t$ est la filtration complétée engendrée par Y_0 et U, alors U appartient à la classe $\mathcal{L}(\mathcal{V}_t)$;
(iii) les fonctions β et σ vérifient les hypothèses (b) et (c) de §2;
(iv) le processus Y est solution de

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \beta(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) \circ dU_s. \tag{3.4}$$

Lemme 7. *Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes à l'absolue continuité de la loi de (Y_0, U_t) par rapport à $\lambda \otimes \mathcal{W}$. Dans ce cas, si b est la dérive de U pour $\mathcal{V}_t$, si R désigne la loi de (Y_0, U) sur Θ et si p_0 est la densité de la loi de Y_0 par rapport à λ, alors*

$$\frac{dR}{d(\lambda \otimes \mathcal{W})}(Y_0, U) = p_0(Y_0) \exp\left\{\int_0^1 b_t^* dU_t - 1/2 \int_0^1 |b_t|^2 dt\right\} \qquad P \text{ p.s.} \tag{3.5}$$

Démonstration. Soit P^y une version régulière de la probabilité P conditionnée par Y_0. On peut voir que si $U \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_t)$ alors pour presque tout y, U est de classe $\mathcal{L}(\mathcal{U}_t)$ sous P^y ("presque tout" étant pris au sens de la loi de Y_0); la réciproque de cette propriété est une conséquence du lemme 5. En utilisant la proposition 4, il apparaît que (ii) est réalisée si et seulement si pour presque tout y, la loi de U sous P^y est absolument continue par rapport à $\mathcal{W}$, la densité étant fournie par (3.3). On peut alors conclure à l'aide de raisonnements élémentaires sur les lois conditionnelles. □

Nous passons maintenant au principal résultat de la section, c'est-à-dire le

Théorème 8. *Si Y appartient à la classe $\mathcal{R}$, alors $\overline{Y}_t = Y_{1-t}$ y appartient aussi.*

Pour obtenir ce résultat, nous allons en fait démontrer l'énoncé plus précis

Proposition 9. *Soit Y un processus de la classe $\mathcal{R}$, associé aux fonctions β, σ et au processus U; alors $\overline{Y}$ est de la classe $\mathcal{R}$ et est associé aux fonctions $-\beta(\bar{t}, x)$, $\sigma(\bar{t}, x)$ et au processus $\overline{U}_t = U_{\bar{t}} - U_1$; de plus, pour toute densité q_0 vérifiant l'hypothèse (a) de §2, considérons q et F définis par (2.1) et (2.3) et posons*

$$\eta_t = U_t - \int_0^t F(s, Y_s) ds \tag{3.6}$$

et

$$\overline{\eta}_t = \eta_{\bar{t}} - \eta_1 - 2\int_{\bar{t}}^1 F(s, Y_s) ds; \tag{3.7}$$

soit R et $\overline{R}$ les lois de (Y_0, η) et $(\overline{Y}_0, \overline{\eta})$; alors ces deux lois sont absolument continues par rapport à $\lambda \otimes \mathcal{W}$ et leurs densités par rapport à $Q = q_0.\lambda \otimes \mathcal{W}$ et $\overline{Q} = q_1.\lambda \otimes \mathcal{W}$ (avec $q_1 = q(1,.)$) vérifient

$$\frac{dR}{dQ}(Y_0, \eta) = \frac{d\overline{R}}{d\overline{Q}}(\overline{Y}_0, \overline{\eta}) \qquad P \text{ p.s.} \tag{3.8}$$

Démonstration. Sous les hypothèses et notations de la proposition le processus Y est solution de

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\beta + \sigma F)(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) \circ d\eta_s. \tag{3.9}$$

En particulier, Y est adapté à la filtration complétée engendrée par (Y_0, η); on montre alors en utilisant (3.6) que les filtrations complétées engendrées par (Y_0, U) et (Y_0, η) coïncident et que si on note cette filtration $\mathcal{V}_t$, on a $\eta \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_t)$; en appliquant le lemme 7 pour (Y_0, η) à la place de (Y_0, U), on obtient $R \ll \lambda \otimes \mathcal{W}$ donc aussi $R \ll Q$; de plus, R ne charge que la partie $A = \{\varsigma = \infty\}$, donc si Q^A est la probabilité Q conditionnée par l'événement A, on a $R \ll Q^A$ et

$$\frac{dR}{dQ^A} = Q(A) \frac{dR}{dQ} \qquad Q^A \text{ p.s.,}$$

ce qui implique

$$\frac{dR}{dQ^A}(Y_0,\eta) = Q(A)\frac{dR}{dQ}(Y_0,\eta) \qquad P \text{ p.s.} \tag{3.10}$$

D'autre part, en utilisant la proposition 3, on peut construire une application mesurable ψ_1 de Θ dans $\widetilde{\Theta}$ telle que

$$\psi_1(X_0,W) = (X_0,W,\overline{W},\widetilde{X}) \qquad \widetilde{Q} \text{ p.s. sur } A$$

De même, on peut construire ψ_2 de $\mathbf{S}^m \otimes \mathbf{C}(\mathbf{R}^d)$ dans $\widetilde{\Theta}$ telle que

$$\psi_2(\widetilde{X}_1,\overline{W}) = (X_0,W,\overline{W},\widetilde{X}) \qquad \widetilde{Q} \text{ p.s. sur } A$$

En considérant les applications projections

$$\psi_1^-(x,w,\overline{w},\widetilde{x}) = (x,w) \qquad \text{et} \qquad \psi_2^-(x,w,\overline{w},\widetilde{x}) = (\widetilde{x}(1),\overline{w}),$$

on en déduit deux applications $\psi = \psi_2^- \circ \psi_1$ et $\psi^- = \psi_1^- \circ \psi_2$ telles que

$$\psi(X_0,W) = (X_1,\overline{W}^0) \qquad \text{et} \qquad \psi^-(X_1,\overline{W}^0) = (X_0,W) \qquad Q^A \text{ p.s.}$$

(où $\overline{W}^0$ est défini par (2.5)). En notant $\overline{A} = \psi(A)$, alors $\overline{A}$ est l'ensemble des $(\overline{X}_0,\overline{W}^0)$ tels que la solution de (2.6) n'explose pas et on peut montrer que $Q(A) = \overline{Q}(\overline{A})$ et que l'image de Q^A par ψ est $\overline{Q}^{\overline{A}}$; de plus, comme $\psi(Y_0,\eta) = (\overline{Y}_0,\overline{\eta})$ P p.s., $\overline{R}$ est l'image de R par ψ donc par le lemme 6, $\overline{R} \ll \overline{Q}^{\overline{A}}$ et

$$\frac{d\overline{R}}{d\overline{Q}^{\overline{A}}}(\overline{Y}_0,\overline{\eta}) = \frac{dR}{dQ^A}(Y_0,\eta) \qquad P \text{ p.s.} \tag{3.11}$$

De plus

$$\frac{d\overline{Q}^{\overline{A}}}{d\overline{Q}}(\overline{Y}_0,\overline{\eta}) = \frac{1}{\overline{Q}(\overline{A})} \qquad P \text{ p.s.} \tag{3.12}$$

En combinant les équations (3.10), (3.11), (3.12) et $Q(A) = \overline{Q}(\overline{A})$, on obtient $\overline{R} \ll \overline{Q}$ et (3.8). En utilisant le lemme 7 et en remarquant que

$$\overline{\eta}_t = \overline{U}_t - \int_0^t F(\bar{s},\overline{Y}_s)ds, \tag{3.13}$$

on montre que $(\overline{Y}_0,\overline{U})$ vérifient les propriétés (i) et (ii) de la définition de $\mathcal{R}$. Il suffit alors d'utiliser

$$\overline{Y}_t = \overline{Y}_0 - \int_0^t \beta(\bar{s},\overline{Y}_s)ds + \int_0^t \sigma(\bar{s},\overline{Y}_s) \circ d\overline{U}_s, \tag{3.14}$$

pour terminer la démonstration. □

4. Intégrabilité de la dérive du processus retourné

Dans cette section nous reprenons les notations précédentes et nous considérons un processus Y de la classe $\mathcal{R}$ associé à un processus U. Nous savons que $\overline{Y}$ est de classe $\mathcal{R}$ et associé à $\overline{U}_t = U_{\bar{t}} - U_1$. Nous allons voir que certaines propriétés d'intégrabilité sur la dérive de U se conservent également par retournement du temps. Pour cela, nous aurons besoin d'un lemme portant sur l'intégrabilité du logarithme de la densité d'une probabilité par rapport à une autre. Ce lemme généralise la méthode de [2]. Un résultat analogue a déjà été utilisé dans [8] dans le cas de lois équivalentes.

Lemme 10. *Sur l'espace filtré* $(\Theta, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ *de* §2 *muni d'une probabilité* $Q = q_0.\lambda \otimes \mathcal{W}$, *soit* $R \ll Q$ *une autre probabilité; alors* W *est pour la probabilité* R *dans la classe* $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ *et si* b *est la dérive, alors pour tout* $0 < k < \infty$,

$$\mathbf{E}_R\left[\left(\log^+ \frac{dR}{dQ}\right)^k\right] < \infty \tag{4.1}$$

si et seulement si

$$\mathbf{E}_R\left[\left(\int_0^1 |b_s|^2 ds\right)^k + \left(\log^+ \frac{dR}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_0}\right)^k\right] < \infty \tag{4.2}$$

avec $\log^+ x = \log x \vee 0$.

Démonstration. Par le lemme 7, W est bien dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$; si b est la dérive, le processus $W_t^R = W_t - \int_0^t b_s ds$ est un R mouvement brownien et par (3.5)

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{dR}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_0} . \exp\left\{\int_0^1 b_s^* dW_s - 1/2 \int_0^1 |b_s|^2 ds\right\} \qquad R \text{ p.s.} \tag{4.3}$$

Remarquons aussi que dans (4.1) et (4.2), on peut, sans modifier le résultat remplacer la fonction $\log^+ x$ par $\log^{++} x = \log x \vee 1$; si x et y sont positifs, on a

$$\log^{++}(xy) \le \log^{++} x + \log^+ y. \tag{4.4}$$

Dans les calculs qui vont être faits, les constantes seront notées C_k mais pourront varier d'une ligne à l'autre. En notant M_0 la densité de R par rapport à Q sur $\mathcal{F}_0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++} \frac{dR}{dQ}\right)^k\right] &\le C_k\, \mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++} M_0\right)^k + \left|\int_0^1 b_s^* dW_s^R\right|^k + 1/2\left(\int_0^1 |b_s|^2 ds\right)^k\right] \\ &\le C_k\, \mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++} M_0\right)^k + \left(\int_0^1 |b_s|^2 ds\right)^{k/2} + 1/2\left(\int_0^1 |b_s|^2 ds\right)^k\right]\end{aligned} \tag{4.5}$$

par les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, ce qui montre que (4.2) implique (4.1); pour établir la réciproque, supposons que $\left(\log^{++} dR/dQ\right)^k$ est intégrable; la fonction $\left(\log^{++}(1/x)\right)^k$ étant convexe, comme

$$\frac{1}{M_0} \ge \mathbf{E}_R\left[\frac{dQ}{dR} \mid \mathcal{F}_0\right] \qquad R \text{ p.s.} \tag{4.6}$$

on en déduit par l'inégalité de Jensen que

$$\left(\log^{++} M_0\right)^k \le \mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++}(dR/dQ)\right)^k \mid \mathcal{F}_0\right] \tag{4.7}$$

donc $(\log^{++} M_0)^k$ est intégrable; d'autre part considérons la Q-martingale

$$M_t \equiv \frac{dR}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_t} = M_0 \exp\left\{\int_0^t b_s^* dW_s - 1/2 \int_0^t |b_s|^2 ds\right\}; \tag{4.8}$$

alors pour la probabilité R, M_t ne s'annule presque sûrement jamais et M_t^{-1} est une martingale locale. Soit τ un temps d'arrêt à valeurs dans $[0,1]$ tel que $\int_0^\tau |b_s|^2 ds$ et $\sup_{t\le\tau}\left|\int_0^t b_s^* dW_s^R\right|$ soient uniformément bornés; on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R\left[\left(\int_0^\tau |b_s|^2 ds\right)^k\right] &\le C_k \mathbf{E}_R\left[\left|\int_0^\tau b_s^* dW_s^R\right|^k + \left(\log^{++}(M_\tau/M_0)\right)^k\right] \\ &\le C_k \mathbf{E}_R\left[\left(\int_0^\tau |b_s|^2 ds\right)^k\right]^{1/2} + C_k \mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++}(M_\tau/M_0)\right)^k\right]\end{aligned} \tag{4.9}$$

donc

$$\mathbf{E}_R\left[\left(\int_0^\tau |b_s|^2 ds\right)^k\right] \le C_k + C_k \mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++}(M_\tau/M_0)\right)^k\right]. \tag{4.10}$$

Comme $M_0 M_\tau^{-1}$ est minoré par une constante strictement positive, on peut trouver une fonction ψ convexe bornée définie sur $\mathbf{R}_+$ telle que

$$\psi(x) \le \left(\log^{++}(1/x)\right)^k \quad \text{et} \quad \psi(M_0 M_\tau^{-1}) = \left(\log^{++}(M_\tau/M_0)\right)^k.$$

On peut montrer que $\psi(M_0 M_t^{-1})$ est une R-sous-martingale (en effet, c'est une sous-martingale locale bornée), donc

$$\mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++}(M_\tau/M_0)\right)^k\right] \le \mathbf{E}_R \psi(M_0 M_1^{-1}) \le \mathbf{E}_R\left[\left(\log^{++}(M_1/M_0)\right)^k\right]. \tag{4.11}$$

Comme $\log^{++}(M_1/M_0) \le \log^{++} M_1 + \log^+ M_0^{-1}$, on déduit de (4.10) et (4.11) que

$$\mathbf{E}_R\left[\left(\int_0^\tau |b_s|^2 ds\right)^k\right] \le C_k \mathbf{E}_R\left[1 + \left(\log^{++}(dR/dQ)\right)^k + \left(\log^+ M_0^{-1}\right)^k\right]. \tag{4.12}$$

En appliquant cette inégalité aux temps d'arrêt

$$\tau = \tau_r = \inf\left\{t \ge 0;\ \left|\int_0^t b_s^* dW_s^R\right| + \int_0^t |b_s|^2 ds \ge r\right\} \wedge 1,$$

comme $\tau_r \uparrow 1$ R p.s. lorsque $r \uparrow \infty$, on déduit du lemme de Fatou que (4.12) est également vérifiée pour $\tau = 1$. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que comme M_0^{-1} est R-intégrable (d'intégrale inférieure ou égale à 1), tous les moments de $\log^+ M_0^{-1}$ sont finis. □

Le lemme 10 permet de compléter le résultat de la proposition 9 et d'obtenir le

Théorème 11. *Soit Y un processus de la classe $\mathcal{R}$ associé à un processus U par (3.4); alors $\overline{Y}_t = Y_{\bar{t}}$ est dans $\mathcal{R}$ et associé à $\overline{U}_t = U_{\bar{t}} - U_1$. De plus, soit b et $\bar{b}$ les dérives de U et $\overline{U}$ pour les filtrations engendrées respectivement par (Y_0, U) et $(\overline{Y}_0, \overline{U})$; notons p_0 et p_1 les densités des lois de Y_0 et Y_1 par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit q_0 une densité vérifiant l'hypothèse (a) de §2, soit F et $q_1 = q(1, .)$ définis par (2.1) et (2.3). Pour tout $0 < k < \infty$, si $\log^+(p_0/q_0)^k(Y_0)$ et $\left(\int_0^1 |b_s - F(s, Y_s)|^2 ds\right)^k$ sont intégrables, alors $\log^+(p_1/q_1)^k(\overline{Y}_0)$ et $\left(\int_0^1 |\bar{b}_s - F(\bar{s}, \overline{Y}_s)|^2 ds\right)^k$ le sont aussi.*

Démonstration. On définit η et $\bar{\eta}$ par (3.6) et (3.7) et on considère les lois R et $\overline{R}$ de (Y_0, η) et $(\overline{Y}, \bar{\eta})$. En appliquant deux fois le lemme 10 pour (Q, R) puis pour $(\overline{Q}, \overline{R})$, il suffit de montrer que l'intégrabilité de $\left(\log^+ dR/dQ\right)^k$ pour R implique l'intégrabilité de $\left(\log^+ d\overline{R}/d\overline{Q}\right)^k$ pour $\overline{R}$; mais cela résulte immédiatement de (3.8). □

Remarque. Pour pouvoir utiliser le théorème 11, il reste à faire le choix d'un coefficient de dérive markovien β et d'une densité initiale de référence q_0; c'est ce que nous allons faire pour un cas particulier.

5. Exemple et conclusion

Dans le cadre général de notre modèle, la seule partie de la dérive pouvant être non markovienne est celle qui peut se factoriser par σ; cependant, si $\sigma\sigma^*$ est elliptique, cette condition de factorisation n'est plus restrictive; nous allons maintenant décrire un exemple de ce cas. Supposons que σ est borné, à dérivées premières bornées et dérivées secondes continues, que $a = \sigma\sigma^*$

est uniformément elliptique, que la loi de Y_0 a une densité p_0 par rapport à la mesure de Lebesgue et que Y_t satisfait

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s \tag{5.1}$$

avec $\int_0^1 |f_s|^2 ds < \infty$ P p.s. Cette équation peut se mettre sous la forme (12) avec $\beta = 0$ et

$$U_t = B_t + \int_0^t \sigma^* a^{-1}(s, Y_s) \left(f_s - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} \sigma_{kj}(s, Y_s) \right) ds \tag{5.2}$$

où σ_j désigne le vecteur formé de la jième colonne de σ. On déduit du théorème 8 que le retourné $\overline{Y}$ de Y peut s'écrire

$$\overline{Y}_t = \overline{Y}_0 + \int_0^t \overline{f}_s ds + \int_0^t \sigma(\overline{s}, \overline{Y}_s) d\overline{B}_s \tag{5.3}$$

avec $\int_0^1 |\overline{f}_s|^2 ds < \infty$ p.s. Choisissons $q_0(x) = C_m/(1 + |x|^{m+1})$ où C_m est tel que q_0 est une densité de probabilité; alors $q(t,.) = q_0$ et F est borné; on peut alors déduire du théorème 11 que, pour $0 < k < \infty$, si $\left(\log^+ |Y_0|\right)^k$, $\left(\log^+ p_0(Y_0)\right)^k$ et $\left(\int_0^1 |f_s|^2 ds\right)^k$ sont intégrables, alors $\left(\int_0^1 |\overline{f}_s|^2 ds\right)^k$ l'est aussi, ce qui répond au problème posé dans l'introduction. Remarquons que l'hypothèse d'existence d'une densité pour Y_0 ne peut être supprimée (voir le cas du mouvement brownien issu de 0), mais cette densité peut être très irrégulière et peut ne charger qu'une partie de $\mathbf{R}^m$.

Nous avons dans ce travail montré que certaines propriétés d'intégrabilité de la dérive d'un processus se conservent par retournement du temps; le point fondamental de la méthode utilisée était de remarquer que ces propriétés sont directement liées à l'absolue continuité de la loi du processus par rapport à un modèle de référence dont on connaît le comportement. Nous nous sommes limités au cas où le processus admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue en tout instant t; une généralisation pourrait consister à étudier le cas où la loi initiale est portée par une sous-variété V_0 de $\mathbf{R}^m$ et où les champs de vecteurs β et σ_i sont tels que la loi du processus à l'instant t est portée par $V_t = \phi_t^0(V_0)$; pour construire le modèle de référence, on pourrait probablement utiliser un résultat du type de [1].

De plus, cette technique d'utilisation d'un modèle de référence peut être employée dans d'autres circonstances: sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si Y un processus de la classe $\mathcal{R}$, alors pour toute probabilité $P' \ll P$, d'après le lemme 7, Y est aussi de la classe $\mathcal{R}$ pour P'. Par exemple, P' peut être la loi P conditionnée par un événement A tel que $P(A) > 0$; dans ce cas, on a $dP'/dP = 1_A/P(A)$; de plus, en utilisant le lemme 10, on voit facilement que l'existence des moments pour P de $\int_0^1 |b_s|^2 ds$ implique l'existence des mêmes moments pour P' de $\int_0^1 |b'_s|^2 ds$ et cette existence se transmet également au processus retourné. En remplaçant l'événement A par la tribu engendrée par une partition dénombrable de Ω, on retrouve la situation de [9]; d'une façon générale, les méthodes employées dans ce travail sont peut-être utiles dans d'autres problèmes de grossissement de filtration —ceux pouvant être résolus au moyen d'une transformation de Girsanov.

Références

[1] R.J. Elliott et B.D.O. Anderson, Reverse time diffusions, *Stochastic Processes and their Applications* **19** (1985), 327–339.

[2] H. Föllmer, An entropy approach to the time reversal of diffusion processes, *Stochastic Differential Systems* (Marseille 1984), Lect. N. in Cont. and Inf. Sc. **69**, Springer, 1985.

[3] U.G. Haussmann, On the drift of a reversed diffusion, *Stochastic Differential Systems* (Marseille 1984), Lect. N. in Cont. and Inf. Sc. **69**, Springer, 1985.

[4] U.G. Haussmann et E. Pardoux, Time reversal of diffusions, à paraître, Ann. of Prob. 1985

[5] J. Jacod et J. Mémin, Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité, *Séminaire de Probabilités XV*, Lect. N. in Math. **850**, Springer, 1981.

[6] R.S. Liptser et A.N. Shiryayev, *Statistics of random processes, Part I, General theory*, Springer, 1977.

[7] E. Pardoux, Grossissement d'une filtration et retournement du temps d'une diffusion, *Séminaire de Probabilités XX*, this volume.

[8] J. Picard, An estimate of the error in time discretization of nonlinear filtering problems, *Proc. 7th MTNS Symposium* (Stockholm 1985), à paraître.

[9] M. Yor, Entropie d'une partition et grossissement initial d'une filtration, *Grossissements de filtrations: exemples et applications* (Paris 1982/83), Lect. N. in Math. **1118**, Springer, 1985.

[10] W.A. Zheng, Tightness results for laws of diffusion processes, application to stochastic mechanics, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Proba. et Stat.* **21** (1985), 103–124.