SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES NEVEU

Processus ponctuels stationnaires asymptotiquement gaussiens et comportement asymptotique de processus de branchement spatiaux sur-critiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 503-514

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__503_0>

PROCESSUS PONCTUELS STATIONNAIRES ASYMPTOTIQUEMENT GAUSSIENS ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE PROCESSUS DE BRANCHEMENT SPATIAUX SUR-CRITIQUES

J. NEVEU

Dans l'étude asymptotique des processus de branchement spatiaux, on suppose fréquemment que, à l'instant initial, le processus est poissonien bien que cette hypothèse ne soit pas naturelle car le caractère poissonien n'est pas préservé par le mécanisme du branchement. Par contre, la propriété d'un processus ponctuel stationnaire d'être asymptotiquement gaussien au sens de la définition du paragraphe 1, est stable par un branchement stationnaire (lemme 1)

Le résultat que nous démontrons dans le second paragraphe nous paraît bien simplifier l'étude analytique du comportement asymptotique des processus sur-critiques. Nous ne l'avons pas trouvé énoncé dans la littérature mais l'idée qui lui est sous-jacente est indubitablement tout-à-fait classique. A titre d'illustration, nous l'avons appliqué à la démonstration d'un théorème de Dawson *(proposition 3 b)* en profitant de la première partie de cette note pour nous affranchir de l'hypothèse poissonienne faite sur le processus initial par cet auteur.

PROCESSUS PONCTUELS STATIONNAIRES SUR R^d ASYMPTOTIQUEMENT GAUSSIENS

Soit N un processus ponctuel sur R^d, de loi stationnaire (i.e. invariante par les translations de R^d) et de carré intégrable (i.e. telle que $E[N(G)^2] < \infty$ pour tout (= pour un) ouvert borné non vide de R^d). Si λ désigne la mesure de Lebesgue de R^d, les deux premiers moments de N sont alors de la forme

$$E[N(\cdot)] = \theta\,\lambda(dx) \text{ sur } R^d, \tag{1}$$
$$E[N\otimes N] = \theta^2\,\lambda(dx)\lambda(dy) + \lambda(dx)\sigma(dy-x) \quad \text{sur } R^d \times R^d$$

pour un réel $\theta \geq 0$ et une mesure de Radon symétrique σ sur R^d de sorte que

$$E[N(f)] = \theta\,\lambda(f)\ ,\quad \mathrm{Var}[N(f)] = \sigma(f*\check{f}) \tag{1'}$$

au moins pour toute fonction borélienne bornée à support compact $f : R^d \to R$ (on note $\check{f}$ la fonction $\check{f}(x) = f(-x)$). Dans le cas particulier d'un processus ponctuel de Poisson stationnaire N, la mesure σ vaut simplement $\theta\varepsilon_0$.

Nous dirons que <u>N est du second ordre</u> si la mesure σ est bornée sur R^d ; dans ce cas $N(f)$ est une v.a.r. bien définie et de carré intégrable pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^2(R^d, \lambda)$ et les formules ci-dessus sont valables pour ces fonctions. Les images d'un tel processus ponctuel N par les homothéties $x \to ax$ de R^d ($a \in R_+^*$) sont telles que lorsque $a \uparrow \infty$

(2) $$a^d\, E([a^{-d} \int N(dx)\, f(\tfrac{x}{a}) - \theta \int dx\, f(x)]^2) \to \sigma(R^2) \int dx\, f^2(x)$$

si $f \in L^1 \cap L^2$; le premier membre vaut en effet d'après ce qui précède

(2') $$a^{-d} \int d\sigma\, f(\tfrac{\bullet}{a})_* f(\tfrac{\bullet}{a}) = \int d\sigma(x)\, f{*}\check{f}(\tfrac{x}{a}) \leq \|\sigma\|\ \|f\|_2^2$$

et la fonction $f{*}\check{f}$ est continue bornée sur R^d puisque $f \in L^2$, de sorte que le second membre tend vers $\sigma(R^d)\, f{*}\check{f}(o)$ lorsque $a \uparrow \infty$. Notons que la formule (2) qui montre que

$$a^{-d} \int N(dx)\, f(\tfrac{x}{a}) \to \theta \int dx\, f(x)$$

dans $L^2(\Omega)$ lorsque $a \uparrow \infty$ si $f \in L^1 \cap L^2$, entraîne par un argument de densité que cette convergence a lieu aussi dans $L^1(\Omega)$ pour toute $f \in L^1(R^d)$.

Nous dirons ensuite qu'un processus ponctuel stationnaire est <u>asymptotiquement gaussien</u> s'il est du second ordre et si pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^2$, la variable aléatoire

(3) $$a^{d/2}[a^{-d} \int N(dx)\, f(\tfrac{x}{a}) - \theta \int dx\, f(x)]$$

tend en loi vers une v.a. gaussienne (nécessairement centrée et de variance égale à $\sigma(R^d) \int dx\, f(x)^2$ d'après ce qui précède). Il est bien connu que les processus ponctuels de Poisson stationnaires sont asymptotiquement gaussiens au sens précédent, mais à la différence des processus de Poisson, les processus asymptotiquement gaussiens jouissent de la propriété de stabilité par branchement que décrit le lemme ci-dessous.

Soit Q une probabilité définie sur l'espace M_b^+ des mesures ponctuelles bornées sur R^d telle que

$$c := \int_{M_b^+} [\nu(R^d)]^2\, Q(d\nu) < \infty .$$

Associons lui un réel $m \geq o$, une probabilité μ sur R^d et une mesure signée bornée et symétrique C sur $R^d \times R^d$ par les formules

(4)
$$\int_{M_b^+} \nu(\cdot)\, Q(d\nu) = m\, \mu(\cdot) \quad \text{et donc} \quad \int_{M_b^+} \nu(R^d)\, Q(d\nu) = m\,,$$
$$\int_{M_b^+} \nu\otimes\nu(\cdot)\, Q(d\nu) = m^2\ \mu\otimes\mu + C \quad \text{sur} \quad R^d \times R^d\ ;$$

la variable aléatoire $\nu \to \nu(f)$ sur (M_b^+, Q) possède donc alors l'espérance $m\,\mu(f)$ et la variance $C(f\otimes f)$, pour toute fonction borélienne bornée $f : R^d \to R$. Remarquons aussi que si $\check{\mu}$ désigne l'image de μ par l'application $x \to -x$ de R^d dans R^d, le produit de convolution $\mu * \check{\mu}$ est l'image de la mesure produit $\mu\otimes\mu$ par l'application $(x,y) \to x - y$ de $R^d \times R^d$ dans R^d de sorte que si γ désigne l'image de la mesure C ci-dessus par cette même application, la dernière formule (4) entraîne que

(4') $$\int \nu * \check{\nu}\ Q(d\nu) = m^2\ \mu * \check{\mu} + \gamma \quad \text{sur} \quad R^d.$$

Etand donné un processus ponctuel stationnaire N_0 sur R^d et une probabilité Q sur M_+^p, considérons alors un second processus ponctuel N_1 dont la loi conditionnelle en N_0 soit celle de

$$\sum_j \varepsilon_{x_j} * \nu_j \qquad \text{si} \quad N_0 = \sum_j \varepsilon_{x_j}$$

et si les ν_j sont des processus ponctuels indépendants de même loi Q (ne dépendant donc pas de N_0). Dans ces conditions, on a la propriété de stabilité suivante :

LEMME 1.- *Pourvu que* $\int \nu(R^d)\, Q(d\nu) < \infty$, *le processus ponctuel* N_1 *est stationnaire de carré intégrable dès que* N_0 *l'est et plus précisément*

(5) $$\theta_1 = m\,\theta_0\ ,\quad \sigma_1(\cdot) = m^2\ \sigma_0 * (\mu * \check{\mu}) + \theta_0\,\gamma\ .$$

De plus N_1 *est asymptotiquement gaussien dès que* N_0 *l'est.*

<u>Démonstration</u> : La première partie du lemme est classique et facile à démontrer. Puisque $N_1(f) = \sum_j \int \nu_j(dy)\ f(x_j + y)$ lorsque $N_0 = \sum_j \varepsilon_{x_j}$, les propriétés des ν_j entraînent que

$$E[N_1(f)/N_0] = \sum_j m\int\mu(dy)\ f(x_j + y) = m\ N_0\ (f * \check{\mu})$$

$$\begin{aligned} &E[(N_1(f) - E[N_1(f)/N_0])^2/N_0] \\ &\quad = \sum_j \iint C(dydz)\ f(x_j + y)\ f(x_j + z) \\ &\quad = \int N_0(dx) \iint C(dydz)\ f(x + y)\ f(x + z)\ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$E[N_1(f)] = m\ \theta_0\ \lambda(f * \check{\mu}) = m\ \theta_0\ \lambda(f)$$

de sorte que $\theta_1 = m\ \theta_0$, et que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[N_1(f)] &= \mathrm{Var}(N_1(f) - E[N_1(f)/N_0]) + \mathrm{Var}(E[N_1(f)/N_0]) \\ &= \theta_0 \int dx \iint C(dydz)\ f(x + y)\ f(x + z) + m^2\ \sigma_0(f * \check{\mu} * \check{f} * \mu) \\ &= \theta_0 \int \gamma(du)\ f * \check{f}(u) + m^2\ \sigma_0 * \mu * \check{\mu}\ (f * \check{f}) \end{aligned}$$

ce qui donne σ_1 .

Pour établir la seconde partie du lemme, il s'agit d'étudier le comportement asymptotique ($a \uparrow \infty$) de la loi de la variable aléatoire

$$\int N_1(dx)\ f\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_j \int \nu_j(dy)\ f\left(\frac{x_j + y}{a}\right)$$

Mais asymptotiquement les mesures ponctuelles ν_j n'interviennent que par leurs masses totales car lorsque $a \uparrow \infty$

$$a^{-d} E\left(\left[\sum_j \nu_j(dy)\ f\left(\frac{x_j + y}{a}\right) - \sum_j \nu_j(R^d)\ f\left(\frac{x_j}{a}\right)\right]^2\right) \to 0$$

si $f \in L^1 \cap L^2$. En effet le premier membre vaut encore

$$a^{-d}\, \theta_0 \int dx \int Q(d\nu)\, [\int \nu(dy)\, f(\frac{x+y}{a}) - \nu(R^d)\, f(\frac{x}{a})]^2$$

$$= \iiint Q(d\nu)\, \nu(dy)\, \nu(dz)\, [f * \check{f}(\frac{y-z}{a}) - f * \check{f}(\frac{y}{a}) - f * \check{f}(\frac{z}{a}) + f * \check{f}(0)]$$

et tend vers zéro lorsque $a \uparrow \infty$ par la continuité de $f * \check{f}$. Il s'agit donc de démontrer que les lois des v.a.

$$Z_a = a^{d/2}\, [a^{-d} \sum_j \nu_j(R^d)\, f(\frac{x_j}{a}) - \theta_1 \int dx\, f(\frac{x}{a})]$$

tendent vers une loi gaussienne lorsque $a \uparrow \infty$.

Après avoir posé $U_j = \nu_j(R^d) - m$, écrivons que

$$Z_a = a^{-d/2} \sum_j U_j\, f(\frac{x_j}{a}) + m I_a$$

où

$$I_a = a^{d/2}\, [a^{-d} \int N_0(dx)\, f(\frac{x}{a}) - \theta_0 \int dx\, f(x)]$$

puis, en désignant par φ la fonction caractéristique commune des U_j que

$$E[\exp[it\, a^{-d/2} \sum_j U_j\, f(\frac{x_j}{a})]/N_0] = \prod_j \varphi[t a^{-d/2}\, f(\frac{x_j}{a})]$$

Mais comme les U_j sont des v.a. centrées de variances c, on peut trouver une fonction positive continue bornée η sur R_+, nulle à l'origine telle que

$$|\varphi(t) - \exp(-\frac{c}{2} t^2)| \leq t^2\, \eta(|t|) \qquad (t \in R)$$

et alors

$$E|\prod_j \varphi[t a^{-d/2} f(\frac{x_j}{a})] - \exp[\frac{-c}{2} t^2\, a^{-d} \sum_j f^2(\frac{x_j}{a})]|$$

$$\leq t^2\, a^{-d}\, E(\sum_j f^2(\frac{x_j}{a})\, \eta[|t| a^{\frac{-d}{2}}|\, f(\frac{x_j}{a})|])$$

$$= t^2\, \theta_0 \int dx\, f^2(x)\, \eta[|t| a^{-d/2}\, |f(x)|]$$

$\to 0$ lorsque $a \uparrow \infty$ par convergence dominée. Il résulte de ces calculs que

$$E[\exp(itZ_a)]$$

$$= E(E(\exp[it\, a^{-d/2} \sum_j U_j\, f(\frac{x_j}{a})]/N_0)\ .\ \exp(itm\, I_a))$$

$$= E(\exp[\frac{-c}{2} t^2 a^{-d} \int N_o(dx) f^2(\frac{x}{a})] . \exp(itm I_a)) + o(1)$$

lorsque $a \uparrow \infty$.

Mais d'une part la v.a. réelle positive $a^{-d} \int N_o(dx) f^2(\frac{x}{a})$ converge dans L^1 vers $\theta_o \int dx f^2(x)$ lorsque $a \uparrow \infty$ puisque $f^2 \in L^1(R^d)$ tandis que d'autre part, la loi de I_a tend, par hypothèse, vers une loi gaussienne centrée de variance $\sigma_o(R^d) \int dx f^2(x)$ lorsque $a \uparrow \infty$. Cela implique facilement que

$$E[\exp(itZ_a)] \to \exp[\frac{-1}{2} t^2 [c \theta_o + m^2 \sigma_o(R^d)] \int dx f^2(x)]$$

lorsque $a \uparrow \infty$ pour tout $t \in R$ et termine la démonstration □

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PROCESSUS DE BRANCHEMENT SUPER CRITIQUES

Etant donné une probabilité Q sur l'espace M_b^p des mesures ponctuelles finies sur R^d , une suite $(N_n, n \geq 0)$ de processus ponctuels sur R^d définis sur un même espace de probabilité sera appelé un processus de branchement de loi Q si pour tout $n \in N$, le processus ponctuel N_{n+1} suit conditionnellement par rapport à la tribu $\mathfrak{F}_n$ engendrée par $N_o, N_1, ..N_n$ la même loi que $\sum_j \varepsilon_{x_j} * \nu_j$ lorsque $N_n = \sum_j \varepsilon_{x_j}$ et lorsque les processus ponctuels finis ν_j sont indépendants entre eux et de même loi Q (ne dépendant donc pas de $\mathfrak{F}_n$). Sur la loi Q , nous supposerons que $c : = \int \nu(R^d)^2 Q(d\nu) < \infty$ et conserverons les notations du paragraphe précédent. Sur le processus ponctuel initial N_0 , nous supposerons soit que $\theta_o : = E[N_o(R^d)] < \infty$

soit que la loi de N_0 est stationnaire et que

$$E[N_o(\cdot)] = \theta_o \lambda(\cdot) \qquad (\lambda : \text{mesure de Lebesgue})$$

pour un $\theta_o < \infty$; dans le deuxième cas il est clair que les processus ponctuels N_n ont tous une loi stationnaire (parce que la loi Q des ν_j ne dépend pas des x_j) .

Au premier ordre, la propriété de branchement implique que

$$E^{\mathfrak{F}_n}[N_{n+1}(f)] = m N_n * \mu(f) = m N_n(f * \check{\mu})$$

pour toute fonction borélienne $f : R^d \to R_+$, quel que soit n et donc aussi que

$$E^{\mathfrak{F}_n}[N_{n+k}(f)] = m^k N_n(f * \check{\mu}^k) \qquad (n, k \in N)$$

Cette formule suggère évidemment que dans l'étude du comportement asymptotique des N_n, la v.a. $N_{n+k}(f)$ doit être comparée à $m^k N_n(f * \check{\mu}^k)$ et non pas à $m^k N_n(f)$. Notons aussi que suivant l'hypothèse faite sur N_0, la formule précédente entraîne que

$$E[N_n(R^d)] = \theta_n \quad \text{resp. } E[N_n(\cdot)] = \theta_n \lambda(\cdot)$$

avec dans les deux cas $\theta_n = \theta_0 m^n (n \in \mathbb{N})$.

Le lemme suivant nous paraît fondamental dans l'étude asymptotique des processus de branchement super-critiques.

Lemme 2.- *Pourvu que* $m > 1$ *(cas super-critique), pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *et toute fonction borélienne* f *sur* R^d, *on a quel que soit* $k \in \mathbb{N}$

$$E([m^{-(n+k)} N_{n+k}(f) - m^{-n} N_n(f * \check{\mu}^k)]^2) \leq \frac{K\theta_0}{m^n} \|f\|^2$$

où K *désigne une constante ne dépendant que de* Q *et où* $\|f\|$ *désigne la norme* $\sup_x |f(x)|$ *si* $E[N_0(R^d)] = \theta_0$ *est supposé fini, resp. la norme de* f *dans* $L^2(R^d,\lambda)$ *si* N_0 *est supposé stationnaire d'intensité* θ_0 *finie.*

Comme la majoration précédente est uniforme en k, ce lemme ramène l'étude du comportement asymptotique de $m^{-p} N_p(f)$ $(p \to \infty)$ essentiellement à celle de la suite de fonctions $f * \check{\mu}^k (k \to \infty)$; or beaucoup de résultats sont connus sur le comportement asymptotique de $\mu^{k*}(k \to \infty)$! Le lemme précédent est aussi tout-à fait intuitif : il exprime en effet que pour un processus de branchement super-critique, en dehors de l'extinction, la loi des grands nombres s'applique au processus translaté $(N_{n+k}, k \geq 0)$ dès que n est assez grand pour que N_n soit grand, compte tenu de ce que les populations issues des individus de la énième génération sont indépendantes et équidistribuées.

Démonstration : Commençons par remarquer que conditionnellement en $\mathfrak{F}_n$ et lorsque $N_n = \sum_j \varepsilon_{x_j}$,

$$N_{n+1}(f) - m N_n(f * \check{\mu}) = \sum_j \int [\nu_j(dy) - m\mu(dy)] f(x_j + y)$$

de sorte que

$$E^{\mathfrak{F}_n}([N_{n+1}(f) - m N_n(f * \check{\mu})]^2) = \sum_j F(x_j) = \int N_n(dx) F(x)$$

si

$$F(x) := \iint C(dydz)\, f(x+y)\, f(x+z) \qquad (x \in R^d)\ .$$

Comme la mesure C est bornée par hypothèse, on a

$$\|F\|_{sup} \leqq \|C\|\ \|f\|^2_{sup} \text{ et } \|F\|_1 \leqq \|C\|\cdot\|f\|_2^2$$

si $\|C\| = \iint |C|(dydz)$. Il s'ensuit immédiatement que

$$E([N_{n+1}(f) - m\, N_n(f * \check{\mu})]^2) = \int E\, N_n(dx)\, F(x)$$
$$\leqq C\theta_n\ \|f\|^2$$

où $\|f\|$ désigne la norme $\|f\|_{sup}$ ou la norme $\|f\|_2$ selon l'hypothèse faite sur N_0 . (On notera que les v.a. $N_{n+1}(f) - m\, N_n(f * \check{\mu})$ sont de carrés intégrables par suite des hypothèses faites sur Q sans supposer nécessairement que N_0 est de carré intégrable, mais seulement que $\theta_0 < \infty$) .

La démonstration du lemme repose alors simplement sur l'orthogonalité de la décomposition

$$m^{-(n+k)}\ N_{n+k}(f) - m^{-n}\ N_n(f * \check{\mu}^k)$$
$$= \sum_{j=o}^{k-1} [m^{-(n+j+1)}\ N_{n+j+1}(f * \check{\mu}^{k-j-1}) - m^{-(n+j)} N_{n+j}(f * \check{\mu}^{k-j})]$$

qui provient de ce que chaque terme du second membre appartient à $L^2(\mathfrak{F}_{n+j+1})$ et est orthogonal à $L^2(\mathfrak{F}_{n+j})$ resp. . Cette orthogonalité entraîne en effet avec l'inégalité ci-dessus que :

$$E([m^{-(n+k)} N_{n+k}(f) - m^{-n}\ N_n(f * \check{\mu}^k)]^2)$$
$$\leqq \sum_{j=o}^{k-1} m^{-2(n+j+1)}\ C\ \theta_{n+j}\ \|f\|^2$$

compte tenu de ce que $\|f * \check{\mu}^j\| \leqq \|f\|$ pour la norme sup comme pour la norme L^2 ; enfin puisque $\theta_{n+j} = \theta_0\ m^{n+j}$, la borne précédente est majorée pour tout $k \geqq 0$ par

$$\sum_{j=o}^{\infty} m^{-2(n+j+1)}\ C\theta_0\ m^{n+j}\ \|f\|^2 = \frac{C}{m(m-1)}\ \frac{1}{m^n}\ \|f\|^2$$

pourvu que $m > 1$ □

Pour terminer cette note, montrons que les résultats de la proposition suivante se déduisent facilement et naturellement du lemme précédent. La difficulté a priori de ces résultats tient à la double présence du paramètre n qui apparaît à la fois dans la suite N_n et dans la normalisation des fonctions $f(x/\sqrt{n})$, mais le lemme précédent permet précisément de fixer le premier de ces n...

PROPOSITION .- *On suppose que* $m > 1$ *et que la probabilité* μ *sur* R^d *est centrée de variance finie ; on désigne par* G *la loi de Gauss centrée sur* R^d *de même covariance que* μ .

a) Si $EN_0(R^d) = \theta_0 < \infty$, *la limite* $W = \lim\limits_{n\to\infty} m^{-n} N_n(R^d)$ *existe p.s. et dans* L^2. *De plus pour toute fonction continue bornée* f

$$m^{-n} \int N_n(dx)\, f(\frac{x}{\sqrt{n}}) \to W \int f dG$$

dans L^2 *lorsque* $n \to \infty$.

b) Si N_0 *est stationnaire du second ordre, pour toute fonction* f *de* $L^1 \cap L^2$

$$n^{\frac{+d}{2}}\, E([m^{-n}\, n^{\frac{-d}{2}} \int N_n(dx)\, f(\frac{x}{\sqrt{n}}) - \theta_0 \lambda(f)]^2) \to c\, \lambda[(f * G)^2]$$

lorsque $n \to \infty$, *la constante* c *étant donnée par*

$$c = \sigma_0(R^d) + \theta_0 \frac{\gamma(R^d)}{m(m-1)} .$$

En outre, si N_0 *est asymptotiquement gaussien, les variables aléatoires*

$$n^{\frac{d}{4}} [m^{-n}\, n^{\frac{-d}{2}} \int N_n(dx)\, f(\frac{x}{\sqrt{n}}) - \theta_0\, \lambda(f)]$$

convergent en loi vers des variables gaussiennes centrées de variances $c\, \lambda[(f * G)^2]$ *lorsque* $n \to \infty$, *pour tout* $f \in L^1 \cap L^2$.

Démonstration :

1) D'après le lemme, la suite $(m^{-n} N_n(R^d)\ ,\ n \geq 0)$ est une suite de Cauchy dans L^2 et sa limite, soit W, est telle que

$$E([W - m^{-n} N_n(R^d)]^2) \leq \frac{K\theta_0}{m^n} .$$

Cette majoration géométrique entraîne la convergence presque sûre. Le résultat est d'ailleurs bien connu puisque $(N_n(R^d),\ n \geq 0)$ est un processus de Galton-Watson !

Pour toute fonction borélienne bornée f sur R^d , le lemme montre que

$$\| m^{-(n+k)} \int N_{n+k}(dx)\, f(\frac{x}{\sqrt{n+k}}) - m^{-n} \int N_n(dx) \int f(\frac{x+y}{\sqrt{n+k}})\, \overset{\vee}{\mu}{}^k(dy) \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{K\theta_0}{m^n} \| f \|^2_{\sup}$$

tandis que le théorème de la limite centrale implique que pour toute fonction continue bornée f sur R^d

$$\lim_{k\to\infty} \int f\left(\frac{x+y}{\sqrt{n+k}}\right) \overset{\vee}{\mu}{}^{k}(dy) = \int f dG$$

quels que soient $x \in R^d$ et $n \in N$ fixés. Mais alors

$$m^{-n}\int N_n(dx)\int f\left(\frac{x+y}{\sqrt{n+k}}\right) \overset{\vee}{\mu}{}^{k}(dy) \to m^{-n}N_n(R^d)\int f dG$$

p.s. sur Ω car N_n est p.s. un processus ponctuel fini ; cette convergence a lieu aussi dans L^2 car le premier membre est dominé par la suite $(m^{-n} N_n(R^d)\|f\|,$ $n \geq 0)$ qui converge dans L^2. Il s'ensuit que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|m^{-(n+k)}\int N_{n+k}(dx)\ f\left(\frac{x}{\sqrt{n+k}}\right) - m^{-n}\ N_n(R^d)\int f dG\|^2 \leq \frac{K\theta_0}{m^n}\|f\|^2$$

lorsque f est une fonction continue bornée sur R^d et il ne reste plus qu'à faire tendre $n \to \infty$ dans cette inégalité pour obtenir la première partie de la proposition.

2) Soit f une fonction de L^2 à laquelle nous associerons les fonctions

$$F_k^n(z) = \int f\left(z + \frac{y}{\sqrt{n+k}}\right)\ \mu^{k*}(dy) \qquad (n,\ k \in N)$$

pour pouvoir écrire que d'après le lemme

$$(n+k)^{-d/2}\ E\left(\left[m^{-(n+k)}\int N_{n+k}(dx)\ f\left(\frac{x}{\sqrt{n+k}}\right) - m^{-n}\int N_n(dx)\ F_k^n\left(\frac{x}{\sqrt{n+k}}\right)\right]^2\right)$$

$$\leq K\theta_0\ m^{-n}\ \lambda(f^2)$$

Le théorème de la limite centrale entraîne d'autre part que les fonctions F_k^n tendent dans L^2 vers la fonction $f * G$ lorsque $k \to \infty$ car en utilisant la transformation de Fourier sur L^2

$$\begin{aligned}\int |F_k^n - f*G|^2\ dx &= \int |\hat{F}_k^n - \hat{f}\hat{G}|^2\ dt \\ &= \int \left|\hat{\mu}\left(\frac{-t}{\sqrt{n+k}}\right)^k - \hat{G}(t)\right|^2 |\hat{f}(t)|^2\ dt \\ &\to 0\end{aligned}$$

lorsque $k \to \infty$, n étant fixé

par convergence dominée. Il s'ensuit d'après (2') que

$$(n+k)^{-\frac{d}{2}} E([m^{-n}\int N_n(dx)[F_k^n(\frac{x}{\sqrt{n+k}}) - f * G(\frac{x}{\sqrt{n+k}})]]^2)$$
$$\leq m^{-2n}\|\sigma_n\| \|F_k^n - f * G\|_2^2$$
$$\to 0$$

lorsque $K \to \infty$, n étant fixé.

La conjonction du lemme 2 et du théorème de la limite centrale entraîne donc que pour tout $n \in N$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (n+k)^{\frac{-d}{2}} E([m^{-(n+k)}\int N_{n+k}(dx)f(\frac{x}{\sqrt{n+k}}) - m^{-n}\int N_n(dx)f * G(\frac{x}{\sqrt{n+k}})]^2)$$
$$\leq \frac{K\theta_o}{m^n} \lambda(f^2)$$

En appliquant l'égalité (2) au processus ponctuel stationnaire N_n, on voit que

$$\lim_{k\to\infty} (n+k)^{\frac{-d}{2}} E([m^{-n}\int N_n(dx)f * G(\frac{x}{\sqrt{n+k}}) - \theta_o (n+k)^{\frac{d}{2}} \lambda(f * G)]^2)$$

$$= m^{-2n} \sigma_n(R^d) \lambda[(f * G)^2]$$

et comme d'après (5)

$$m^{-2n} \sigma_n(R^d) = \sigma_o(R^d) + \sum_{j=o}^{n-1} m^{-(j+2)} \theta_o \gamma(R^d)$$

$$\to \sigma_o(R^d) + \theta_o \gamma(R^d)/m(m-1) \quad \text{lorsque } n \uparrow \infty,$$

les premières formules de la partie (b) de la proposition se trouvent démontrées.

Supposons ensuite que N_o obéisse au théorème de la limite centrale et donc comme l'établit le lemme ci-dessous, que les N_n obéissent aussi à ce même théorème. Alors l'inégalité élémentaire

$$|E(e^{it X}) - E(e^{it Y})|^2 \leq t^2 E[(X-Y)^2] \qquad (t \in R)$$

et les résultats qui précèdent entraînent que les (fonctions caractéristiques φ_{n+k} des variables aléatoires centrées

$$(n+k)^{\frac{-d}{4}} [m^{-(n+k)}\int N_{n+k}(dx)f(\frac{x}{\sqrt{n+k}}) - (n+k)^{\frac{d}{2}} \theta_o \lambda(f)]$$

et celles Ψ_k^n des variables aléatoires centrées

$$(n+k)^{\frac{-d}{4}} [m^{-n} \int N_n(dx)\ f * G(\frac{x}{\sqrt{n+k}}) - (n+k)^{\frac{d}{2}} \theta_o \lambda(f * G)]$$

sont telles que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\varphi_{n+k}(t) - \Psi_k^n(t)|^2 \leq |t|^2 \frac{K\theta_o}{m^n} \lambda(f^2)$$

D'autre part, l'application du théorème de la limite centrale nous montre que

$$\lim_{k\to\infty} \Psi_k^n(t) = \exp[\frac{-t^2}{2} \frac{\sigma_n(R^d)}{m^{2n}} \lambda(f * G)^2]$$

pour tout n fixé et il s'ensuit bien que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \Psi_k^n(t) = \exp(\frac{-t^2}{2} c \lambda[(f * G)^2]) . \square$$

BIBLIOGRAPHIE

D.A. DAWSON & G. IVANOFF : Branching diffusions and random measures. Adv. Proba. J. Dekker 1978 pp. 61-103.

K. FLEISCHMANN : Scaling of supercritical spatially homogeneous branching processes. Coll. Math. Soc. J. Bolyai (1979) 337-354.

R.A. HOLLEY & S.W. STROOCK : Generalized Ornstein - Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motions. Publ. RIMS Kyoto Univ. 14 (1978) 741-788.