Séminaire de probabilités (Strasbourg)

David Nualart

Application du calcul de Malliavin aux équations différentielles stochastiques sur le plan

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 379-395
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__379_0>

APPLICATION DU CALCUL DE MALLIAVIN AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES SUR LE PLAN

David Nualart
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona. Espagne.

1. __Introduction.__ On considère un processus à deux indices, m-dimensionnel $X = \{(X_z^1,\dots,X_z^m),\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ solution du système d'équations différentielles stochastiques suivant:

$$X_z^i = x^i + \int_{[0,z]} [A_j^i(X_r)dW_r^j + A_0^i(X_r)dr], \qquad i=1,\dots,m,$$

où $W = \{(W_z^1,\dots,W_z^d),\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est un drap brownien d-dimensionnel, x est un point fix de $\mathbb{R}^m$ qui représente la valeur constante du processus X sur les axes, et les coefficients A_j^i $(1 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq d)$ sont des fonctions C^∞ avec toutes les dérivées bornées.

Dans ce cas, on sait (voir [2], [4] et [11]) que ce système admet une solution continue unique. Alors, l'objet de cet article et d'étudier le problème suivant:

Problème: À quelles conditions de non dégénerescence sur les coefficients A_j^i la loi du vecteur aléatoire X_z admet-elle une densité, éventuellement C^∞, par rapport à la mesure de Lebesgue, pour tout point z hors des axes.

Il faut remarquer d'abord que le processus X ne vérifie pas de bonnes propriétés Markoviennes. Par exemple, la restriction de ce processus le long d'une courbe croissante et continue n'est pas une diffusion. En conséquence on ne peut pas espérer que la loi de X_z soit la solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre comme l'équation de Kolmogorov dans le cas d'un indice. Pour cette raison, les méthodes analytiques usuelles ne sont pas valables pour traiter le problème précédent.

Dans le cas des équations différentielles stochastiques ordinaires, Malliavin a introduit ([6]) des techniques probabilistes pour démontrer l'existence et la régularité de la densité de la solution sous les hypothèses du type Hörmander. Les idées de Malliavin ont été développées par Stroock ([9]), Shigekawa ([8]), Ikeda-Watanabe ([5]) et d'autres auteurs. D'autre part, Bismut ([1]) a utilisé une approche différente basée sur la transformation de Girsanov, qui permet d'obtenir une formule d'intégration par parties.

Alors, nous allons utiliser la méthode de Malliavin pour traiter le problème de l'existence d'une densité pour la loi de X_z. Le résultat principal (proposition 2.2) établit qu'une condition suffisante est que l'algèbre engendrée par les champs vectoriels $A_1,\dots,A_d$ (par rapport à l'opération $A_i^\nabla A_j$) au point x est de dimension m. On montrera aussi des versions légèrement plus fortes de ce résultat qui font intervenir le champ A_0. Il semble raisonnable de conjecturer que la densité est C^∞ sous ces hypothèses, mais nous n'étudierons pas cette question ici. Dans [7] on prouve le caractère C^∞ de la densité sous une hypothèse plus forte que celle de la proposition 2.2, en considérant seulement les produits de la forme

$$A_{i_1}^\nabla(A_{i_2}^\nabla(\dots(A_{i_{n-1}}^\nabla A_{i_n}))\dots), \qquad 1 \leq i_1,\dots,i_n \leq d ,$$

au lieu de toute l'algèbre.

On remarque d'abord que les différents critères pour l'existence et la régularité de la densité d'une fonctionnelle du mouvement brownien basés sur le calcul de Malliavin, se généralisent de façon immédiate au cas d'une fonctionnelle du drap brownien. Nous allons introduire quelques notations et définitions préliminaires.

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ sera l'espace de probabilité canonique associé au drap brownien d-dimensionnel W. C'est à dire,

$$\Omega = \{\omega : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}^d \ ; \ \omega \text{ continue et nulle sur les axes}\},$$

P est la mesure de Wiener à deux indices et $\mathcal{F}$ est la tribu de Borel de Ω complétée par P.

Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$ on écrit $R_z = [0,z]$.

Soit H l'ensemble des fonctions $\omega \in \Omega$ telles que

$$\omega^i(z) = \int_{R_z} \dot{\omega}^i(r)\, dr ,$$

pour tous $i=1,\dots,d$, $z \in \mathbb{R}_+^2$, où $\dot{\omega}^i \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$. H est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$< \omega_1, \omega_2 >_H = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}_+^2} \dot{\omega}_1^i(r)\, \dot{\omega}_2^i(r)\, dr .$$

Une fonctionnelle régulière est une application $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ du type suivant $F(\omega) = f(\omega(z_1),\dots,\omega(z_n))$, où $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{R}_+^2$ et f est une fonction C^∞ telle que elle et toutes ses dérivées sont à croissance polynomiale. On définit d'abord les opérateurs différentiels de Malliavin sur les fonctionnelles régulières:

$$D_h F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i^j} (\omega(z_1),\dots,\omega(z_n)) h^j(z_i), \qquad \text{si } h \in H, \qquad \text{et}$$

$$LF(\omega) = \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^j\, \partial x_k^j} (\omega(z_1),\dots,\omega(z_n))\, \Gamma(z_i,z_k) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i^j} (\omega(z_1),\dots,\omega(z_n))\, \omega^j(z_i),$$

où $\Gamma(z_i,z_k) = (x_i \wedge x_k)(y_i \wedge y_k)$, si $z_i = (x_i,y_i)$, $i=1,\dots,n$, désigne la fonction de covariance du drap brownien.

L'opérateur L peut être introduit aussi comme l'opérateur de multiplication par $-n$ sur chaque composante de la décomposition de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ en chaos de Wiener:

$$L^2(\Omega,\mathcal{F},P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} Z_n .$$

Alors le domaine de l'opérateur L, Dom L est l'ensemble des fonctionnelles $F \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 E[\mathrm{proj}_{Z_n}(F)^2] < \infty .$$

Les fonctionnelles régulières forment un sousensemble dense de Dom L pour la norme $\|F\|_2 + \|DF\|_2 + \|LF\|_2$.

On peut énoncer le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.1. (cf. [5],[6],[8],[12]). Soit $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (F^1,\dots,F^m)$ une application mesurable telle que,

(i) F^i et $<DF^i, DF^j>_H$ sont dans Dom L pour tous $i,j=1,\ldots,m$.
(ii) Le déterminant de Malliavin $\Delta=\det(<DF^i,DF^j>_H)$ vérifie $\Delta>0$, p.s.

Alors sous ces conditions, la loi du vecteur aléatoire F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. **Application aux équations différentielles stochastiques.** Soit $W=\{(W_z^1,\ldots,W_z^d), z\in\mathbb{R}_+^2\}$ un processus de Wiener à deux indices, d-dimensionnel, défini dans l'espace de probabilité canonique $(\Omega,\mathcal{F},P)$. On choisit des fonctions infiniment différentiables A_j^i, $i=1,\ldots,m$, $j=0,1,\ldots,d$, avec toutes les dérivées bornées. Alors, on peut considérer le processus stochastique $X=\{X_z^i, z\in\mathbb{R}_+^2, i=1,..,m\}$ solution du système d'équations différentielles stochastiques

$$X_{st}^i = x^i + \int_{R_{st}} A_j^i(X_r)\, dW_r^j \quad , \tag{2.1}$$

avec $x\in\mathbb{R}^m$, et en supposant $dW_r^o = dr$.

Il s'agit d'imposer certaines conditions de non-dégénerescence aux coefficients A_j^i de façon que, en un point (s,t) hors des axes, le vecteur aléatoire X_{st} ait une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela il faut introduire d'abord quelques notations.

Si $B_1,B_2,\ldots$ sont des champs vectoriels C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ et $\tau_1,\tau_2,\ldots$ sont des nombres réels non negatifs, on écrira

$$B_1(\tau_1) = B_1 \quad ,$$

$$(B_1*B_2)(\tau_1,\tau_2) = B_1^\nabla B_2 \; 1_{\{\tau_1\le\tau_2\}} = \begin{cases} B_1^j D_j B_2 & \text{si } \tau_1\le\tau_2 \;, \\ 0 & \text{si } \tau_1>\tau_2 \;, \end{cases}$$

$$[B_1*(B_2*B_3)](\tau_1,\tau_2,\tau_3) = B_1^j(D_jB_2^k)(D_kB_3)\; 1_{\{\tau_1\le\tau_2\le\tau_3\}} + $$
$$+ B_1^jB_2^k(D_jD_kB_3)\; 1_{\{\tau_1\le\tau_3,\ \tau_2\le\tau_3\}} \;.$$

En général, si $\mathcal{Y}_n$ désigne l'ensemble des applications

$$\nu : \{1,2,\ldots,n-1\} \longrightarrow \{2,\ldots,n\}$$

telles que $\nu(i)>i$ pour tout i, on écrira

$$[B_1*(B_2*\dots(B_{n-1}*B_n)\dots)]^{l_n}(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n) =$$

$$= \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_n} \; \sum_{l_1,\dots,l_{n-1}=1}^{m} \; \prod_{i=1}^{n} \left\{ \left(\prod_{\{j:\nu(j)=i\}} 1_{[0,\tau_i]}(\tau_j) \right) \left(\prod_{\{j:\nu(j)=i\}} D_{l_j} \right) B_i^{l_i} \right\}, \tag{2.2}$$

avec la convention

$$\prod_{\{j:\ \nu(j)=i\}} D_{l_j} = \text{identité}, \qquad \text{et} \qquad \prod_{\{j:\ \nu(j)=i\}} 1_{[0,\tau_i]}(\tau_j) = 1,$$

si l'ensemble $\{j:\ \nu(j)=i\}$ est vide.

On remarque la propriété suivante de cette opération qu'on vient d'introduire:

Si $\tau_1 \le \tau_2 \le \dots \le \tau_n$, alors,

$$[B_1*(B_2*(\dots(B_{n-1}*B_n)\dots)](\tau_1,\dots,\tau_n) = B_1^{\nabla}(B_2^{\nabla}(B_3^{\nabla}(\dots(B_{n-1}^{\nabla}B_n)\dots).$$

D'autre part, pour $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$, cette opération donne une valeur égale à zero.

On considère les champs vectoriels de la forme

$$\int_{[0,1]^k} [A_{i_1}*(A_{i_2}*(\dots(A_{i_{n-1}}*A_{i_n})\dots)]\,(\tau_1,\dots,\tau_{n-1},1) \prod_{\{j:i_j=0\}} d\tau_j, \tag{2.3}$$

où $k = \operatorname{card}\{j:\ i_j=0\}$, $i_1,\dots,i_n = 0,1,\dots,d$, $i_n \neq 0$, et $\tau_j \in [0,1]$ pour $j=1,\dots,n-1$. Par convention, si l'ensemble $\{j:\ i_j=0\}$ est vide, on prend simplement le champ

$$A_{i_1}*(A_{i_2}*(\dots(A_{i_{n-1}}*A_{i_n})\dots)(\tau_1,\dots,\tau_{n-1},1).$$

On peut énoncer alors le résultat suivant.

Théorème 2.1. <u>On suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite</u>:

(H) <u>L'espace vectoriel engendré par les champs de la forme</u> (2.3) <u>au point</u> x <u>a une dimension égale à</u> m.

<u>Alors, sous cette condition, la loi du vecteur</u> X_{st} <u>en un point</u> (s,t) <u>tel que</u> $st\neq 0$, <u>est absolument continue</u>.

<u>Démonstration</u>. On fixe un point $z=(s,t)$ avec $st\neq 0$. Nous allons vérifier que le vecteur X_{st} satisfait les deux conditions du théorème 1.1. On suppose connu le fait que la condition (i) est satisfaite (cf. [7]). En plus, on sait que la matrice de Malliavin de X_{st} est égale à

$$< DX^i_{st}, DX^j_{st} >_H = \sum_{h=1}^{d} \int_{R_{st}} \xi^i_h(z,r)\, \xi^j_h(z,r)\, dr, \tag{2.4}$$

où $\{\xi^i_j(z,r),\ r\leq z\}$ est la solution de l'équation linéaire

$$\xi^i_j(z,r) = A^i_j(X_r) + \int_{[r,z]} \frac{\partial A^i_h}{\partial x_l}(X_u)\, \xi^l_j(u,r)\, dW^h_u ,$$

avec $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,d$.

En appliquant la méthode de variation des constantes on peut aussi écrire $\xi^i_j(z,r) = \zeta^i_k(z,r)A^k_j(X_r)$, où $\zeta^i_k(z,r)$ représente la solution du système linéaire

$$\zeta^i_j(z,r) = \delta^i_j + \int_{[r,z]} \frac{\partial A^i_h}{\partial x_l}(X_u)\, \zeta^l_j(u,r)\, dW^h_u . \tag{2.5}$$

Nous allons montrer d'abord que le processus $\zeta^i_j(u,r)$ a une version continue en (u,r) dans la région $\{(u,r)\in R_z:\ r\leq u\}$. Pour voir cela on va déduire les estimations suivantes, pour $r\leq u$, $r'\leq u'$ et $p\geq 2$

$$\begin{aligned} E(|\zeta(u,r)-\zeta(u',r')|^p) &\leq C_p(E(|\zeta(u,r)-\zeta(u,r')|^p)+E(|\zeta(u,r')-\zeta(u',r')|^p))\leq \\ &\leq C_p(z)(|r-r'|^{p/2}+|u-u'|^{p/2}) . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Alors, le critére de Kolmogorov et l'inégalité (2.6) permettent de choisir une version continue de $\zeta(u,r)$. La démonstration des inégalités (2.6) utilise une méthode standard basée sur l'application des inégalités de Burkholder et de Hölder. En effet, on a, d'une part

$$E(|\zeta(u,r')-\zeta(u',r')|^p) = E(|\sum_{i,j} (\int_{[r',u]\,\Delta\,[r',u']} \frac{\partial A^i_h}{\partial x_l}(X_v)\zeta^l_j(v,r)dW^h_v)^2|^{p/2})\leq$$

$$\leq C_p(z)\{\ |[r',u]\Delta[r',u']|^p \sup_{v,r\in R_z} E(|\sum_{i,l}(\frac{\partial A_0^i}{\partial x_l}(X_v))^2|^{p/2}\ |\zeta(v,r)|^p) +$$

$$+\ |[r',u]\Delta[r',u']|^{p/2} \sup_{v,r\in R_z} E(|\sum_{i,l,h}(\frac{\partial A_h^i}{\partial x_l}(X_v))^2|^{p/2}\ |\zeta(v,r)|^p)\} \leq$$

$$\leq C_p(z)\ |u-u'|^{p/2}\ ,$$

compte tenu du fait que les dérivées $\partial A_h^i/\partial x_l$ sont bornées, et que

$$\sup_{u,r\in R_z} E(|\zeta(u,r)|^p) < \infty\ .$$

D'autre part, on a

$$E(|\zeta(u,r)-\zeta(u,r')|^p) \leq C_p\{\ E(|\sum_{i,j}(\int_{[r\vee r',u]}\frac{\partial A_h^i}{\partial x_l}(X_v)(\zeta_j^l(v,r)-\zeta_j^l(v,r'))dW_v^h)^2|^{p/2})+$$

$$+\ E(|\sum_{i,j}(\int_{[r,u]-[r',u]}\frac{\partial A_h^i}{\partial x_l}(X_v)\zeta_j^l(v,r)dW_v^h)^2|^{p/2}) +$$

$$+\ E(|\sum_{i,j}(\int_{[r',u]-[r,u]}\frac{\partial A_h^i}{\partial x_l}(X_v)\zeta_j^l(v,r')dW_v^h)^2|^{p/2})\} \leq$$

$$\leq C_p(z)\ [\ |r-r'|^{p/2} + \int_{[r\vee r',u]} E(|\zeta(v,r)-\zeta(v,r')|^p)dv]\ ,$$

et le lemme de Gronwall (adapté aux fonctions de deux variables) nous permet de finir la démonstration des inégalités (2.6).

Soit $\Delta = \det(<DX_{st}^i, DX_{st}^j>_H)$ le déterminant de Malliavin associé au vecteur aléatoire X_{st}. On doit montrer que $\Delta > 0$, p.s. Supposons, au contraire, que $P\{\det\Delta=0\} > 0$ et nous allons voir que cela est contradictoire avec l'hypothèse (H). On introduit d'abord les espaces vectoriels

$$K_\sigma(\omega) = <A_j(X_{\xi t}(\omega)),\quad 0\leq\xi\leq\sigma,\quad j=1,\ldots,d>,$$

et

$$K_{0^+}(\omega) = \bigcap_{\sigma\geq 0} K_\sigma(\omega)\quad ,$$

pour tout $\omega\in\Omega$ et $\sigma\in(0,s]$.

Ces espaces ont les propriétés suivantes:

(a) L'espace $K_{0^+}(\omega)$ est p.s. constant, à cause de la loi du 0-1.

(b) Soit $\rho(\omega) = \inf\{\sigma \geq 0: \dim K_\sigma(\omega) > \dim K_{0^+}\}$. Alors $\rho(\omega) > 0$ p.s., et ρ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_{\sigma t}, \sigma \geq 0\}$.

Soit Q la forme quadratique associée à la matrice $\langle DX^i_{st}, DX^j_{st}\rangle_H$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^m$ on a

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{d} \int_{R_{st}} (\lambda_i \xi^i_j(z,r))^2 \, dr.$$

On sait que $0 < P\{\det \Delta = 0\} = P\{\inf_{|\lambda|=1} Q(\lambda) = 0\}$. Par la continuité en r du processus $\xi(z,r)$ on obtient

$$P\ \{\exists \lambda \in \mathbb{R}^m: |\lambda|=1, \sum_{j=1}^{d} (\lambda_i A^i_j(X_{\sigma t}))^2 = 0, \quad \forall \sigma \leq s\} > 0.$$

En utilisant les propriétés (a) et (b) on en déduit l'existence d'un élément λ, $|\lambda|=1$, orthogonal à K_{0+}. C'est à dire, tel que, p.s.,

$$\lambda_i A^i_j(X_{\sigma t}) = 0, \qquad \text{pour} \quad \sigma < \rho(\omega) \quad \text{et} \quad j=1,..,d. \tag{2.7}$$

Nous allons voir que cet élément λ est orthogonal à tout champ vectoriel de la forme (2.3), évalué au point x, ce qui nous amène à une contradiction avec l'hypothèse (H). Pour poursuivre la démonstration nous avons besoin de quelques définitions préliminaires. Soit Γ l'ensemble des courbes continues $\phi : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si $Y: \mathbb{R}^m \times \overset{n)}{\dots} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction C^∞ et μ est une mesure finie sur $[0,t]^n$ on définit l'application $Y^{(\mu)}: \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ par

$$Y^{(\mu)}(\phi) = \int_{[0,t]^n} Y(\phi(\tau_1),\dots,\phi(\tau_n)) \, \mu(d\tau_1,\dots,d\tau_n).$$

On écrira aussi $Y^{(\mu)}(\phi) = \langle Y(\phi), \mu\rangle$. En particulier, si $n=1$ et μ est égale à δ_τ nous écrirons Y^τ au lieu de $Y^{(\delta_\tau)}$ et nous aurons $Y^\tau(\phi) = Y(\phi(\tau))$. Le nombre $n \geq 1$ sera appelé l'ordre de l'élément $Y^{(\mu)}$.

Soit V l'ensemble des combinaisons linéaires finies $\sum_{j=1}^{J} a^j Y_j^{(\mu_j)}$. Remarquons qu'un élément $Y^{(\mu)}$ est considéré ici comme un couple (Y,μ) : c'est à dire, que deux éléments $Y^{(\mu)}$, $Z^{(\nu)}$ différents peuvent donner lieu à la même application de Γ dans $\mathbb{R}^m$.

Si $Z^{(\nu)}$ est un élément d'ordre 1 et $Y^{(\mu)}$ est d'ordre n, on définit un nouvel élément $Z^{(\nu)}*Y^{(\mu)}\in V$ de la façon suivante

$$[Z^{(\nu)}*Y^{(\mu)}](\phi) = \int_{[0,t]^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} Z^i(\phi(\sigma)) \frac{\partial Y}{\partial x_i^k} (\phi(\tau_1),\ldots,\phi(\tau_n))1_{\{\sigma\leq\tau_k\}}\nu(d\sigma)\cdot$$

$$\cdot\,\mu(d\tau_1,\ldots,d\tau_n). \tag{2.8}$$

Nous allons considérer les éléments de la forme A_j^τ, $j=1,..,d$, $\tau\in[0,t]$ et $A_0^{(1)}$, où l désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,t]$. C'est à dire,

$$A_j^{(\tau)}(\phi) = A_j(\phi(\tau)),$$

et

$$A_0^{(1)}(\phi) = \int_0^t A_0(\phi(\tau))\,d\tau.$$

Soit $V_0 = \{A_j^t,\ j=1,..,d\}$, et

$$V_j = \{A_0^{(1)}*\eta,\ A_h^\tau*\eta\ ;\ \text{où}\ \eta\in V_{j-1},\ h=1,..,d\ \text{et}\ \tau\in[0,t]\},$$

pour $j\geq 1$.

On écrit aussi

$$V_\infty = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j \quad .$$

Nous allons voir que, p.s., pour tout $\eta\in V_\infty$ on a

$$\lambda_i\ \eta^i(X_{\sigma\cdot}) = 0\ , \tag{2.9}$$

pour tout $\sigma<\rho(\omega)$.

En prenant $\sigma=0$, (2.9) entraîne l'orthogonalité de λ avec tout champ de la forme (2.3). En effet, en utilisant la définition (2.8) dans le cas d'une fonction constante $\phi(\tau)=x$, on obtient recursivement que pour tous $i_1,\ldots,i_n=$ $=0,1,\ldots,d$, et $\tau_j\in[0,t]$ on a

$$A_{i_1}^{\tau_1}*(A_{i_2}^{\tau_2}*(\ldots(A_{i_{n-1}}^{\tau_{n-1}}*A_{i_n}^t)\ \ldots)\ (x) =$$

$$= \int_{[0,t]^k} [A_{i_1} * (A_{i_2} (* \ldots (A_{i_{n-1}} * A_{i_n}) \ldots)](\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, t) \prod_{\{j:\ i_j=0\}} d\tau_j ,$$

où $k = \text{card}\,\{j:\ i_j=0\}$ et on convient que $A_{i_j}^{\tau_j} = A_0^{(1)}$ si $i_j = 0$.

La démonstration de (2.9) se fera par induction sur n. Il est clair que (2.9) est vrai si $\eta \in V_0$. Supposons que (2.9) est satisfait par $\eta \in V_{n-1}$. Un élément $\eta \in V_{n-1}$ est une combinaison linéaire finie d'éléments d'ordre n, c'est à dire,

$$\eta(\phi) = \sum_{j=1}^{M} \int_{[0,t]^n} Y_j(\phi(\tau_1), \ldots, \phi(\tau_n))\ \mu_j(d\tau_1, \ldots, d\tau_n).$$

On sait par hypothèse, que

$$Z_\sigma = \lambda_i \sum_{j=1}^{M} \int_{[0,t]^n} Y_j^i(X_{\sigma\tau_1}, \ldots, X_{\sigma\tau_n})\ \mu_j(d\tau_1, \ldots, d\tau_n) = 0 \tag{2.10}$$

pour $\sigma < \rho(\omega)$.

Le processus $\{Z_\sigma, \sigma \geq 0\}$ est une semimartingale continue qui admet une représentation intégrale du type suivant:

$$Z_\sigma = Z_0 + \int_{[0,t]^n} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{R_{\sigma\tau_k}} \lambda_i \frac{\partial Y_j^i}{\partial x_1^k} (X_{\xi\tau_1}, \ldots, X_{\xi\tau_n}) A_h^1(X_{\xi\tau}) dW_{\xi\tau}^h \right] \mu(d\tau_1, \ldots, d\tau_n) +$$
$$+ \int_{[0,t]^n} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k,k'=1}^{n} \left[\int_{R_{\sigma,\tau_k \wedge \tau_{k'}}} \lambda_i \frac{\partial^2 Y_j^i}{\partial x_1^k \partial x_{1'}^{k'}} (X_{\xi\tau_1}, \ldots, X_{\xi\tau_n}) \sum_{h=1}^{d} A_h^1(X_{\xi\tau}) A_h^{1'}(X_{\xi\tau}) d\xi d\tau \right]$$
$$\cdot\ \mu(d\tau_1, \ldots, d\tau_n).$$

La variation quadratique de cette semimartingale doit être nulle pour $\sigma < \rho(\omega)$, ce qui entraîne

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \int_{[0,t]^n} \frac{\partial Y_j^i}{\partial x_1^k} (X_{\xi\tau_1}, \ldots, X_{\xi\tau_n}) A_h^1(X_{\xi\tau}) 1_{\{\tau \leq \tau_k\}}\ \mu(d\tau_1, \ldots, d\tau_n) = 0 \tag{2.11}$$

pour tous $\xi < \rho(\omega)$, $\tau \leq t$, $h=1,\ldots,d$. C'est à dire,

$$\lambda_i (A_h^\tau * \eta)^i (X_{\sigma\cdot}) = 0 \quad ,$$

pour $\sigma < \rho(\omega)$, $\tau \leq t$, $h=1,\dots,d$.

D'autre part, en dérivant par rapport à σ la partie à variation finie de la semimartingale Z_σ, on obtient

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \int_{[0,t]^n} \left[\int_0^{\tau_k} A_0^l(X_{\sigma\tau}) \frac{\partial Y_j^i}{\partial x_l^k} (X_{\sigma\tau_1},\dots,X_{\sigma\tau_n}) d\tau \right] \mu(d\tau_1,\dots,d\tau_n) +$$

$$+ \lambda_i \sum_{j=1}^{M} \sum_{k,k'=1}^{n} \int_{[0,t]^n} \left[\int_0^{\tau_k \wedge \tau_{k'}} \frac{\partial^2 Y_j^i}{\partial x_l^k \partial x_{l'}^{k'}} (X_{\sigma\tau_1},\dots,X_{\sigma\tau_n}) \sum_{h=1}^{d} A_h^l(X_{\sigma\tau}) A_h^{l'}(X_{\sigma\tau})\, d\tau \right] \cdot$$

$$\cdot\, \mu(d\tau_1,\dots,d\tau_n) = 0 \,. \tag{2.12}$$

Le deuxième terme de l'expression (2.12) est nul. Pour voir cela on écrit que la variation quadratique de la semimartingale (2.11) est nulle:

$$\lambda_i \sum_{j=1}^{M} \sum_{k,k'=1}^{n} \int_{[0,t]^n} \frac{\partial^2 Y_j^i}{\partial x_{l'}^{k'} \partial x_l^k} (X_{\xi\tau_1},\dots,X_{\xi\tau_n})\, A_h^l(X_{\xi\tau}) A_{h'}^{l'}(X_{\xi\tau'}) \cdot$$

$$\cdot\, 1_{\{\tau \leq \tau_k\}} 1_{\{\tau' \leq \tau_{k'}\}}\, \mu(d\tau_1,\dots,d\tau_n) +$$

$$+ \lambda_i \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \int_{[0,t]^n} \frac{\partial Y_j^i}{\partial x_l^k} (X_{\xi\tau_1},\dots,X_{\xi\tau_n}) \frac{\partial A_h^l}{\partial x_{l'}} (X_{\xi\tau}) A_{h'}^{l'}(X_{\xi\tau'}) 1_{\{\tau \leq \tau_k\}} 1_{\{\tau' \leq \tau\}} \cdot$$

$$\cdot\, \mu(d\tau_1,\dots,d\tau_n) = 0, \tag{2.13}$$

pour tous $\xi < \rho(\omega)$ et $h,h'=1,\dots,d$.

Si on prend $h=h'$, le premier terme de (2.13) est symétrique en (τ,τ') tandis que le deuxième est nul pour $\tau' > \tau$. Cela entraîne, par continuité que le premier terme est nul pour tout couple (τ,τ') et, en particulier, pour $\tau = \tau'$. En conséquence, (2.12) implique

$$\lambda_i (A_0^{(1)} * \eta)^i (X_{\sigma\cdot}) = 0,$$

ce qui complète la démonstration du théorème. □

Les champs vectoriels de la forme (2.3) peuvent être calculés recursivement. Cependant il serait intéressant d'avoir une formulation plus explicite de la condition (H). Comme conséquence du théorème 2.1, nous avons d'abord le résultat suivant.

Proposition 2.2. On suppose l'hypothèse suivante:
(H') L'algèbre engendrée par les champs vectoriels $A_1,\dots,A_d$ (par rapport à l'opération $A_i^{\nabla}A_j$) au point x est de dimension m.

Alors, sous cette condition la loi du vecteur X_{st} en un point (s,t) hors des axes est absolument continue.

Démonstration. Il suffit de voir que (H') entraîne (H). On introduit les espaces vectoriels suivants:

$\mathcal{A}_0$ = algèbre (par rapport à l'opération $A_i^{\nabla}A_j$) engendrée par les champs vectoriels $A_1,\dots,A_d$ au point x.

$\mathcal{A}_1$ = espace vectoriel engendré par les champs de la forme (2.3), au point x.

$\mathcal{A}_2$ = espace vectoriel engendré par les champs $A_1(x),\dots,A_d(x)$, et

$$\sum_{l_1,\dots,l_{n-1}=1}^{m} \prod_{i=1}^{n}\Big(\prod_{\{j:\nu(j)=i\}} D_{l_j}\Big) A_{k_i}^{l_i}(x)\ \Big)\ ,$$

où $n \geq 2$, $\nu \in \mathcal{Y}_n$, et $k_1,\dots,k_n=1,\dots,d$.

On sait que $\dim \mathcal{A}_0 = m$ et il faut voir que $\dim \mathcal{A}_1 = m$. Il est clair que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_2$. Alors nous allons montrer que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Pour toute $\nu \in \mathcal{Y}_n$, $n \geq 2$, on considère l'ensemble défini par

$$D_\nu = \{ (\tau_1,\dots,\tau_{n-1}) \in [0,1]^{n-1} :\ \tau_i \leq \tau_{\nu(i)} \quad \text{pour} \quad i=1,\dots,n-1\}\ ,$$

où $\tau_n=1$. L'inclusion $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ découle alors de la formule (2.2) et du fait que les fonctions $\{ 1_{D_\nu}\ ,\ \nu\in \mathcal{Y}_n\}$ sont linéairement indépendantes. Nous allons prouver cette indépendance linéaire par induction. Pour $n=2$ cette propriété est evi̲dente. On considère, pour $n > 2$, une combinaison linéaire

$$\sum_{\nu \in \mathcal{Y}_n} a_\nu 1_{D_\nu} = 0\ .$$

Pour toute $\nu \in \mathcal{Y}_n$ on définit $\hat{\nu} \in \mathcal{Y}_{n-1}$ par $\hat{\nu}(i) = \nu(i+1)$ et on écrit $a_{\hat{\nu}}^k = a_\nu$ si $\nu(1) = k$, $k=2,\dots,n$. On sait que

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_n : \nu(1)=i} a_\nu 1_{D_\nu}(\tau) = 0 ,$$

pour tout $\tau \in [0,1]^{n-1}$. Soit $\hat\tau \in [0,1]^{n-2}$, $\hat\tau = (\hat\tau_1,\dots,\hat\tau_{n-2})$. On peut ordonner les coordonnées de $\hat\tau$ en sens croissant:

$$0 < \hat\tau_{k_1} < \hat\tau_{k_2} < \dots < \hat\tau_{k_{n-2}} < 1$$

(sans perte de généralité on supposera qu'elles sont différentes). Alors, en choisissant un élément τ_1 dans chacun des intervalles $(\hat\tau_{k_{j-1}}, \hat\tau_{k_j})$ (par convention $\hat\tau_{k_0}=0$) on obtient

$$\sum_{i=j}^{n-2} \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_n : \nu(1)=k_i} a_\nu 1_{D_\nu}(\tau_1,\hat\tau_1,\dots,\hat\tau_{n-2}) = 0$$

pour $j=1,\dots,n-2$, d'où

$$\sum_{\hat\nu\in\mathcal{Y}_{n-1}} a^k_{\hat\nu} 1_{D_{\hat\nu}}(\hat\tau) = 0$$

pour tout $k=2,\dots,n$, et par induction tous les coefficients doivent être nuls.□

L'hypothèse (H') peut être renforcée moyennant l'utilisation du champ vectoriel A_0. Mais nous n'avons pas su trouver une expression simple des champs vectoriels de la forme (2.3) en termes de l'opération ∇ quand un ou plusieurs facteurs sont égaux à A_0. Pour le cas particulier de deux ou trois facteurs on a le résultat suivant:

Proposition 2.3. _La proposition 2.2 est encore vraie si dans l'hypothèse_ (H') _on prend l'espace vectoriel engendré par l'algèbre_ $\mathcal{A}_0$ _et par les champs vectoriels_

$$A_0^\nabla A_i, \quad (A_0^\nabla A_j)^\nabla A_i , \quad A_0^\nabla(A_j^\nabla A_i), \quad (A_j^\nabla A_0)^\nabla A_i, \quad A_j^\nabla(A_0^\nabla A_i)$$

_et_

$$A_0^\nabla(A_0^\nabla A_i) - \tfrac{1}{2}(A_0^\nabla A_0)^\nabla A_i, \qquad 1\le i,j \le d.$$

Démonstration. Il suffit de faire les calculs suivants:

(a) Pour ' n=1,
$$\int_0^1 (A_0 * A_i)(\tau_1,1)\, d\tau_1 = A_0^\nabla A_i .$$

(b) Pour n=2, on prend $i_1=0$, $i_2=0$ et $i_3=i$ dans (2.3) et on obtient
$$\int_{[0,1]^2} [A_0*(A_0*A_i)](\tau_1,\tau_2,1)d\tau_1 d\tau_2 = \int_{[0,1]^2} [A_0^{l_1} D_{l_1} A_0^{l_2} D_{l_2} A_i] 1_{\{\tau_1 \le \tau_2\}} d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+\int_{[0,1]^2} [A_0^{l_1} A_0^{l_2} D_{l_1} D_{l_2} A_i]\, d\tau_1 d\tau_2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}\, A_0^{l_1} D_{l_1} A_0^{l_2} D_{l_2} A_i + A_0^{l_1} A_0^{l_2} D_{l_1} D_{l_2} A_i = A_0^\nabla(A_0^\nabla A_i) - \tfrac{1}{2}(A_0^\nabla A_0)^\nabla A_i .$$

Si $i_1=0$, $i_2=j$, $i_3=i$, on a,
$$\int_{[0,1]} [A_0*(A_j*A_i)](\tau_1,\tau_2,1)d\tau_1 = \tau_2 A_0^{l_1} D_{l_1} A_j^{l_2} D_{l_2} A_i + A_0^{l_1} A_j^{l_2} D_{l_1} D_{l_2} A_i ,$$

et finalement, si $i_1=j$, $i_2=0$, $i_3=i$, on a
$$\int_{[0,1]} [A_j*(A_0*A_i)](\tau_1,\tau_2,1)d\tau_2 = (1-\tau_1) A_j^{l_1} D_{l_1} A_0^{l_2} D_{l_2} A_i + A_j^{l_1} A_0^{l_2} D_{l_1} D_{l_2} A_i ,$$

pour tous $\tau_1,\tau_2 \in [0,1]$.

On remarque que la condition (H') est strictement plus faible que la condition de Hörmander restreinte qui apparaît dans le cas des équations différentielles stochastiques à un indice. En effet, l'hypothèse de Hörmander utilise l'algèbre de Lie engendrée par les champs vectoriels $A_1,\dots,A_d$ qui est plus petite que l'algèbre engendrée par l'opération " ∇ ".

Par contre, la condition (H) du théorème 2.1 n'est pas comparable à la condition de Hörmander générale. En effet, si nous développons l'hypothèse (H), nous n'obtenons pas l'algèbre engendrée par $A_0,A_1,\dots,A_d$ avec l'opération " ∇ ". En effet, d'une part, s'il y a plus d'un facteur égal à A_0 on trouve des combinaisons linéaires comme $A_0^\nabla(A_0^\nabla A_i) - \frac{1}{2}(A_0^\nabla A_0)^\nabla A_i$. D'autre part, avec la méthode employée dans la démonstration du théorème 2.1, on ne peut pas faire sortir les produits du type $A_i^\nabla A_0$. Pour faire apparaître

Dans ce cas on a

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (A_0^\nabla A_1)(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A cause de la proposition 2.3, le vecteur X_{st} a une loi absolument continue. Par contre la condition de Hörmander générale n'est pas satisfaite parce que $[A_0, A_1] = 0$. Cela concorde avec le fait que dans le cas d'un indice la solution du système stochastique précédent a une loi singulière:

$$X_t^1 + X_t^2 = e^{W_t + \frac{1}{2}t}$$
$$X_t^1 - X_t^2 = e^{W_t - \frac{3}{2}t} \ .$$

(3) Considérons l'exemple suivant,

$$X_{st}^1 = W_{st} \ ,$$
$$X_{st}^2 = \int_{R_{st}} X_z^1 \, dz \ ,$$

où

$$m=2, \quad d=1, \quad x=(0,0), \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^1 \end{pmatrix} \ .$$

Dans ce cas, l'hypothèse (H) du théorème 2.1 n'est pas satisfaite. Cependant, le vecteur aléatoire (X_{st}^1, X_{st}^2) a une loi Gaussienne 2-dimensionnelle, non-dégenerée. Cet exemple montre la nécessité d'utiliser des produits du type $A_1^\nabla A_0$ qui n'apparaissent pas dans l'hypothèse (H) comme nous avons déjà remarqué.

Finalement nous voulons indiquer deux possibles extensions du théorème 2.1:

(i) En utilisant les techniques de l'article [7] on pourrait essayer de montrer le caractère C^∞ de la densité de X_{st}, sous les hypothèses du théorème 2.1.

(ii) On peut considérer le cas où la valeur du processus X_z sur les axes n'est pas constante. C'est à dire, $X_{s0} = g(s)+f(0)$ et $X_{0t} = g(0)+f(t)$, où $g,f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions régulières. Dans cette situation, ces termes il faudrait utiliser les valeurs du processus $\xi(z,r)$ dans les points z à l'intérieur de $[0,z]$.

Exemples:

(1) On considère le système (m+1)-dimensionnel

$$X_z^1 = W_z \;,$$
$$X_z^i = \int_{R_z} X_r^{i-1} dW_r, \qquad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq m,$$
$$X_z^{m+1} = 1 + \int_{R_z} X_r^{m+1}\, dW_r \;.$$

Dans ce cas, $d=1$, et $A_1 = (1, x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^{m+1})$. Les champs vectoriels A_1, $A_1^\nabla A_1$, $A_1^\nabla(A_1^\nabla A_1), \ldots$, $A_1^\nabla(A_1^\nabla \overset{m+1}{\cdots} (A_1^\nabla A_1)\ldots)$ sont linéairement indépendants au point $(0,\ldots,0,1)$. En conséquence le vecteur aléatoire X_z a une loi absolument continue en tout point hors des axes. On remarque que les m premières coordonnées de X_z sont les intégrales stochastiques itérées

$$W_z, \quad \int_{R_z} W dW, \quad \int_{R_z} \left(\int_{R_u} W dW \right) dW_u \;, \ldots,$$

et que la dernière coordonnée est la solution de l'équation linéaire

$$Y_z = 1 + \int_{R_z} Y_r dW_r .$$

D'après les résultats de [7], on sait, en plus, que la densité de X_z es C^∞.

Dans cet exemple les conditions de Hörmander ne sont pas satisfaites et la solution du même système stochastique pour le Brownien à un paramètre a une loi singulière, d'après la formule d'Itô.

(2) Soit

$$m=2, \quad d=1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Le système stochastique est

$$X_{st}^1 = 1 + \int_{R_{st}} X_z^1 dW_z + \int_{R_{st}} X_z^2\, dz \quad ,$$
$$X_{st}^2 = \int_{R_{st}} X_z^2\, dW_z + \int_{R_{st}} X_z^1\, dz \;.$$

il faudrait écrire les conditions de non-dégénerescence en termes des fonctions f et g, et des champs vectoriels A_i.

Bibliographie

[1] J.M. Bismut: Martingales, the Malliavin Calculus and Hypoellipticity under general Hörmander's conditions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 56, 469-505 (1981).

[2] R. Cairoli: Sur une équation différentielle stochastique. C.R. Acad. Sc. Paris 274, 1739-1742 (1972).

[3] R. Cairoli, J.B. Walsh: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 111-183 (1975).

[4] B. Hajek: Stochastic equations of hyperbolic type and a two-parameter Stratonovich calculus. Ann. Probability, 10, 451-463 (1982).

[5] N. Ikeda, S. Watanabe: Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland (1981).

[6] P. Malliavin: Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proceedings of the International Conference on Stochastic Differential Equations of Kyoto 1976, pp. 195-263, Wiley (1978).

[7] D. Nualart, M. Sanz: Malliavin calculus for two-parameter Wiener functionals. Preprint.

[8] I. Shigekawa: Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures. J. Math. Kyoto Univ. 20-2, 263-289 (1980).

[9] D. W. Stroock: The Malliavin calculus, a functional analytic approach. Journal of Functional Analysis 44, 212-257 (1981).

[10] D. W. Stroock: Some application of stochastic calculus to partial differential equations. Lecture Notes in Math. 976, 267-382 (1983).

[11] J. Yeh: Existence of strong solutions for stochastic differential equations in the plane. Pacific J. Math. 97, 217-247 (1981).

[12] M. Zakai: The Malliavin Calculus. Preprint.