M. HAKIM-DOWEK

DOMINIQUE LÉPINGLE

L'exponentielle stochastique des groupes de Lie

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 352-374

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__352_0>

L'EXPONENTIELLE STOCHASTIQUE DES GROUPES DE LIE

par M. Hakim-Dowek et D. Lépingle

INTRODUCTION

L'intérêt pour les mouvements browniens sur les groupes de Lie est fort ancien puisqu'il remonte à un article de 1928 de F.Perrin [20], suivi longtemps après par Ito [12], Yosida [24], puis McKean [16,17]. C'est ce dernier qui a introduit la notion d'intégrale stochastique multiplicative, comme procédé pour construire un mouvement brownien sur le groupe à partir d'un mouvement brownien sur l'algèbre de Lie associée au moyen de l'application exponentielle. Plus récemment, Ibero [9], Emery [5] et Karandikar [13,14] ont étudié cette intégrale sous l'angle respectivement des diffusions, des semi-martingales discontinues et du calcul stochastique basé sur une formule d'intégration par parties.

Ces trois derniers auteurs se sont bornés à l'étude des groupes de Lie de matrices, tandis que McKean utilise le théorème d'Ado pour se ramener d'un groupe de Lie quelconque à un groupe de matrices. Notre point de vue sera différent et nous allons délibérément ignorer les groupes de matrices en nous attachant essentiellement à la nature géométrique des groupes de Lie. Cela nous permettra d'utiliser le formalisme récent de la géométrie stochastique développé après Ito par Malliavin [15], Schwartz [21,22], Bismut [1], Meyer [18,19], Ikeda et Watanabe [11], Elworthy [4]; dans le cas particulier des groupes de Lie, nous dégagerons des résultats à la fois simples et non triviaux, du moins si le groupe n'est pas commutatif.

Cette manière de voir a déjà été celle de Shigekawa [23], qui parle d'équation différentielle stochastique sur G là où les précédents auteurs parlaient d'intégrale stochastique multiplicative. Nous reprendrons certains de ses calculs de façon légèrement différente, notamment lorsqu'il utilise lui aussi le théorème d'Ado pour démontrer la non-explosion de la solution. Ce point de vue géométrique nous a conduits à manipuler essentiellement l'intégrale stochastique de Stratonovitch, et nous éviterons ainsi de parler de vecteurs tangents et de formes différentielles d'ordre deux comme en [18] et [22].

La première partie introduit la notion d'exponentielle stochastique d'une semi-martingale M de l'algèbre $\mathfrak{g}$ du groupe G, comme solution X d'une équation notée $dX_t=X_t dM_t$. Nous avons repris de [14] le terme d'exponentielle et la notation $\mathcal{E}$, cependant notre exponentielle ne correspond pas au $\mathcal{E}$ de Karandikar, qui est une exponentielle d'Ito, mais à son $\mathcal{E}^*$, exponentielle de Stratonovitch: ignorant toute structure linéaire sur G et donc - momentanément- toute notion de martingale sur G, nous n'avons pas d'exponentielle d'Ito; néanmoins, ainsi que le révèlera la quatrième partie, cette équation $dX_t=X_t dM_t$ peut être considérée également comme une équation d'Ito, et c'est pourquoi nous n'y mettrons pas d'$*$, non plus que dans $\mathcal{E}$. Un résultat important sur cette exponentielle X est qu'elle peut s'approcher par des produits de termes $\exp(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})$, ce qui montre qu'elle coïncide avec l'intégrale stochastique multiplicative de McKean et Ibero.

La seconde partie introduit la notion de logarithme stochastique , noté $\mathcal{L}$, d'une semi-martingale X du groupe G. Cela correspond exactement à la lecture de X dans un repère mobile invariant à gauche. Là encore, on a un résultat d'approximation de $\mathcal{L}(X)$ à partir des sommes de termes $\log(X_{t_k}^{-1}X_{t_{k+1}})$.

La troisième partie commence par montrer que les applications $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ sont réciproques l'une de l'autre. On prouve que les diffusions sur $\mathfrak{g}$ de générateur à coefficients constants correspondent aux diffusions sur G de générateur à coefficients invariants à gauche (mouvements browniens gauches dans la littérature) et on termine par des formules pour $\mathcal{E}(M+N)$ et $\mathcal{L}(XY)$; Karandikar les appelle formules d'intégration par parties, on peut tout aussi bien les appeler formules de Campbell-Hausdorff stochastiques.

La quatrième partie définit une G-martingale comme l'exponentielle stochastique d'une martingale locale de l'algèbre: c'est donc une notion purement géométrique. Il est intéressant de noter que c'est exactement la notion de Γ-martingale de Darling [2] et Meyer [18] pour une connexion Γ tout à fait naturelle sur le groupe G. Un point à relever également est que dans ce cas, X converge p.s. à l'infini si et seulement si M converge p.s. Grâce à la formule d'intégration par parties, on obtient aisément les deux décompositions d'une semi-martingale du groupe en produit d'une G-martingale et d'un processus à variation finie, dans un sens comme dans l'autre.

Enfin la cinquième partie traite brièvement de l'exemple du groupe de Heisenberg: on y note que les puissances d'une martingale sont encore des martingales, et on y retrouve l'intégrale d'aire de Paul Lévy, comme chez Gaveau [7].

Au point de vue des notations, on se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ satisfaisant aux conditions habituelles. Tous les processus envisagés seront adaptés et auront leurs trajectoires continues, on ne le reprécisera plus. On se donne également un groupe de Lie G de dimension d finie et d'élément neutre e ; on peut le supposer connexe, et on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Le symbole C désignera l'espace des fonctions réelles C^{∞} à support compact définies sur G. En suivant Schwartz [21], nous dirons que X est une semi-martingale sur G si pour toute fonction f de C, $f(X_t)$ est une semi-martingale réelle. De même, le processus X sera dit à variation finie si $f(X_t)$ est à variation finie (sur tout intervalle borné).

Nous n'utiliserons que des résultats élémentaires sur les groupes de Lie, même pas - on l'aura compris - le théorème d'Ado. En ce qui concerne la façon de noter l'intégrale de Stratonovitch, il a fallu choisir parmi les diverses possibilités actuelles du marché: nous avons choisi l'$*$, en souvenir des moments passés à la lecture de la "Géométrie stochastique sans larmes" [18].

1. EXPONENTIELLE D'UNE SEMI-MARTINGALE DE L'ALGEBRE DE LIE.

Soit M une semi-martingale sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: elle est de la forme $M_t=M_t^iH_i$ (avec la convention d'Einstein utilisée dans toute la suite), où $(H_i, i=1,..$

.,r) est une famille de r éléments de $\mathfrak{g}$, et $(M^i, i=1,\dots,r)$ une famille de semi-martingales réelles. Nous allons donner un sens à l'équation différentielle stochastique sur G

$$(1)\qquad dX_t = X_t\, dM_t \quad .$$

Une solution X de (1) est par définition une semi-martingale sur G telle que si f est dans C, on ait

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t (H_i f)(X_s) * dM_s^i \\ &= f(X_0) + \int_0^t (H_i f)(X_s)\, dM_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t (H_i H_j f)(X_s)\, d\langle M^i, M^j\rangle_s \ . \end{aligned}$$

L'intégrale stochastique de la première ligne est au sens de Stratonovitch, celle de la seconde ligne au sens d'Ito. La valeur initiale X_0 sera une v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable quelconque à valeurs dans G. Il est clair que la solution ne dépend pas de l'écriture particulière de M, non plus que de la valeur de M_0.

LEMME 1. <u>Soit</u> Y_t <u>une solution de l'équation</u> (1), <u>de valeur initiale</u> $Y_0=e$. <u>Alors, pour toute</u> v.a. X_0 $\mathcal{F}_0$<u>-mesurable à valeurs dans</u> G, $X_t=X_0Y_t$ <u>est solution de</u> (1) <u>avec</u> X_0 <u>pour valeur initiale</u>.

DEMONSTRATION. a) Supposons tout d'abord que X_0 soit égale à une constante g du groupe G. Pour $f\in C$, si l'on pose $h(x)=f(gx)$ sur G, on a

$$f(X_t) = h(Y_t) = h(e) + \int_0^t (H_i h)(Y_s) * dM_s^i = f(g) + \int_0^t (H_i f)(X_s) * dM_s^i$$

en vertu de l'invariance à gauche des (H_i).

b) Soit X_0 dénombrablement étagée, à valeurs (g_k) sur les éléments (A_k) d'une $\mathcal{F}_0$-partition dénombrable de Ω. Si l'on pose $X_t^k = g_k Y_t$, on aura

$$\begin{aligned} f(X_t) = \Sigma_k\, 1_{A_k} f(X_t^k) &= \Sigma_k\, 1_{A_k} \Big[f(g_k) + \int_0^t (H_i f)(g_k Y_s) * dM_s^i \Big] \\ &= f(X_0) + \int_0^t (H_i f)(X_s) * dM_s^i \ . \end{aligned}$$

c) Soit X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable. Par uniforme continuité de f et des $H_i f$ par rapport à la structure uniforme à droite de G, il existe pour tout n un voisinage V^n de e tel que $gh^{-1}\in V^n$ entraîne simultanément

$$|f(g)-f(h)| < \frac{1}{n} \qquad\qquad |H_i f(g) - H_i f(h)| < \frac{1}{n} \quad \text{pour } i=1,\dots,r \ .$$

Puisque G est dénombrable à l'infini, on peut extraire du recouvrement de G par les ensembles $\{V^n g,\ g\in G\}$ un sous-recouvrement dénombrable $\{V^n g^n_k, k\geq 1\}$. Posons

$$W^n_1 = V^n g^n_1$$

$$W^n_k = V^n g^n_k \setminus (W^n_1 \ \dots \ W^n_{k-1}),$$

puis

$$A^n_k = \{X_0 \in W^n_k\}$$

$$X^n_t = g^n_k Y_t \quad \text{sur chaque } A^n_k \quad .$$

Alors, d'après b),

$$f(X^n_t) = f(X^n_0) + \int_0^t (H_i f)(X^n_s) * dM^i_s$$

et comme sur A^n_k on a

$$X_t (X^n_t)^{-1} = X_0 Y_t Y_t^{-1} (g^n_k)^{-1} \in V^n ,$$

on en tire

$$|f(X^n_t) - f(X_t)| < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |(H_i f)(X^n_s) - (H_i f)(X_s)| < \frac{1}{n} ,$$

ce qui prouve la convergence en probabilité de $f(X^n_t)$ vers $f(X_t)$ et celle de $\int_0^t (H_i f)(X^n_s) * dM^i_s$ vers $\int_0^t (H_i f)(X_s) * dM^i_s$. ■

THEOREME 1. <u>L'équation</u> (1) <u>admet pour toute valeur initiale</u> X_0 <u>une solution unique sur</u> $[0,\infty[$.

DEMONSTRATION. On peut se restreindre au cas où $M_0=0$ et dans ce cas M^i se décompose en $N^i + A^i$, où N^i est une martingale locale réelle nulle en 0 et A^i un processus à variation finie nul en 0. Posons

$$Q_t = \Sigma^r_{i=1} \Sigma^r_{j=1} \int_0^t |d\langle N^i, N^j\rangle_s| + \Sigma^r_{i=1} \left(\int_0^t |dA^i_s|\right)^2 \quad .$$

Par arrêt, on peut supposer $Q_\infty = \lim_{t\to\infty} Q_t$ inférieur p.s. à une constante c>0. Soient a>0 et (V,ϕ) une carte locale de domaine contenant e, tels que $\phi(e)=0$ et $\phi(V) \supset \overline{B(0,2a)}$. Soient ϕ^j des fonctions de C égales aux composantes de ϕ sur $\phi^{-1}(\overline{B(0,a)})$ et nulles sur le complémentaire de $\phi^{-1}(B(0,2a))$. Considérons le système différentiel stochastique sur $\mathbb{R}^d$

$$(2)\begin{cases} Y_0 = 0 \\ dY_t^j = \lambda_i^j(Y_t)*dM_t^i \\ \qquad = \lambda_i^j(Y_t)\ dM_t^i + \frac{1}{2}\lambda_1^k(Y_t)\ D_k(\lambda_i^j)(Y_t)\ d\langle N^i,N^1\rangle_t \end{cases}$$

$$\text{où } \lambda_i^j(y) = (H_i\phi^j)\ (\phi^{-1}(y)) \qquad \text{si } |y| < 2a$$
$$= 0 \qquad \text{si } |y| \geqslant 2a\ .$$

Comme les coefficients vérifient une condition de Lipschitz uniforme, il est bien connu qu'il existe une unique solution non explosive, qui vérifie pour tout temps d'arrêt T

$$E\left[|Y_T|^2\right] \leqslant M\ E\left[Q_T\right].$$

En particulier, pour

$$T_1 = \inf\ \{t>0: |Y_t|>a\}\ ,$$

il vient

$$a^2\ P(T_1<\infty) \leqslant M\ E\left[Q_{T_1}\right]\ .$$

Remplaçant ensuite dans (2) M_t par $M'_t=(M_{t+T_1}-M_{T_1})1_{\{T_1<\infty\}}$ et $\mathcal{F}_t$ par $\mathcal{F}'_t=\mathcal{F}_{t+T_1}$, puis posant, si Y' est la solution de (2'),

$$T_2 = \inf\ \{t>0: |Y'_t|>a\}\ ,$$

on obtient

$$a^2\ P(T_2<\infty) \leqslant M\ E\left[(Q_{T_1+T_2}-Q_{T_1})1_{\{T_1<\infty\}}\right]\ ,$$

et par itération

$$a^2\ \Sigma_n\ P(T_n<\infty) \leqslant M\ E\left[Q_\infty\right] \leqslant M\ c < \infty\ .$$

Ainsi, $P(T_n<\infty)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Posant alors

$$X_t = X_0\phi^{-1}(Y_t) \qquad \text{sur } [0,T_1]$$
$$= X_{T_1}\phi^{-1}(Y'_{t-T_1}) \qquad \text{sur } [T_1,T_1+T_2]$$

et ainsi de suite, on vérifie aisément que X est solution de (1) sur $[0,\infty[$. L'unicité s'obtient comme d'habitude [11] en se ramenant dans une carte locale. ∎

Nous allons voir grâce à l'approximation suivante que la solution de (1) n'est pas autre chose que l'intégrale stochastique multiplicative de McKean et Ibero.

THEOREME 2. *Soit* X *la solution de l'équation* (1), *de donnée initiale* X_0, *et soit* R *un réel strictement positif. Si pour tout* $n>0$ *le processus* $\overset{n}{X}$ *est défini sur* $[0,R]$ *par*

$$\overset{n}{X}_0 = X_0$$

$$\overset{n}{X}_t = \overset{n}{X}_{t_k} \exp\{\frac{t-t_k}{R2^{-n}}(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\} \quad \underline{\text{pour}} \quad 0\leq\frac{kR}{2^n}=t_k\leq t\leq t_{k+1}=\frac{(k+1)R}{2^n}\leq R \quad ,$$

alors $\overset{n}{X}$ *converge en probabilité vers* X *uniformément sur* $[0,R]$.

DEMONSTRATION. Soient encore $a>0$ et (V,ϕ) une carte locale de domaine contenant e tels que $\phi(e)=0$ et $\phi(V)\supset\overline{B(0,3a)}$. Posons $U=\phi^{-1}(B(0,a))$, $U'=\phi^{-1}(B(0,2a))$, $U''=\phi^{-1}(B(0,3a))$. Pour tout p entier strictement positif, on pose

$$A_p = \{\omega\in\Omega \ : \ X_t^{-1}X_u\in\overline{U} \quad \text{pour} \quad 0\leq t\leq u\leq R \quad \text{et} \quad u-t\leq R2^{-p}\} \quad .$$

L'uniforme continuité de X_t sur $[0,R]$ pour la structure uniforme à gauche de G montre que $P(\bigcup_p A_p)=1$. Pour $\varepsilon>0$, on choisit p tel que $P(A_p)>1-\varepsilon$. Sur l'espace A_p muni de la probabilité conditionnelle $P(.\cap A_p)/P(A_p)$, la solution X de (1) reste identique à ce qu'elle était pour P [19,p.170]. On supposera désormais sans changer de notation que $A_p=\Omega$ p.s.

Etudions sur $[0,R_p]$, où $R_p=R2^{-p}$, la solution Y_t de l'équation (1) de donnée initiale $Y_0=e$: elle vaut $X_0^{-1}X_t$ et reste donc dans $\overline{U}$ p.s. Considérons sur le même intervalle le processus $\overset{n}{Y}$ défini (pour $n\geq p$) par

$$\overset{n}{Y}_0 = e$$

$$\overset{n}{Y}_t = \overset{n}{Y}_{t_k} \exp\{c_n(t-t_k)(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})\} \quad \text{où } c_n=\frac{2^n}{R} \quad \text{et} \quad 0\leq\frac{kR}{2^n}=t_k\leq t\leq t_{k+1}=\frac{(k+1)R}{2^n}\leq R_p .$$

Pour toute fonction f de C,

$$df(\overset{n}{Y}_t) = c_n\,(M^i_{t_{k+1}}-M^i_{t_k})\,(H_i f)(\overset{n}{Y}_t)\,dt \qquad \text{sur }]t_k,t_{k+1}[\ .$$

Soient $(\phi^j, j=1,\dots,d)$ des éléments de C qui coïncident sur $\overline{U}'$ avec les composantes de ϕ et soient nuls sur le complémentaire de U''. Posons alors

$$\lambda_i^j(y) = H_i\phi^j(\phi^{-1}(y)) \qquad \text{si} \quad |y| < 3a$$
$$= 0 \qquad \text{si} \quad |y| \geqslant 3a \quad .$$

Sur $[0,R_p]$, le processus $Z_t=\phi(Y_t)$ est solution du système différentiel stochastique

$$dZ_t^j = \lambda_i^j \, dM_t^i + \frac{1}{2} \lambda_l^k \, D_k(\lambda_i^j) \, d\langle M^i, M^l\rangle_t \quad ,$$

tandis que si l'on pose

$$T_n = \inf \{t>0 : \overset{n}{Y}_t \notin \overline{U}'\} \quad ,$$

le processus $\phi(\overset{n}{Y}_t)$ coïncide sur $[0, T_n \wedge R_p]$ avec le processus $\overset{n}{Z}_t$ nul en 0, continu sur $[0,R_p]$ et solution dans chaque intervalle $]t_k, t_{k+1}[$ de

$$d\overset{n}{Z}{}_t^j = c_n \, (M^i_{t_{k+1}} - M^i_{t_k}) \, \lambda_i^j \, dt \quad .$$

Mais on sait [1,19] que $\overset{n}{Z}$ converge uniformément en probabilité vers Z sur $[0,R_p]$, et par conséquent pour tout $\alpha>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{0\leqslant t\leqslant R_p} |Z_t - \overset{n}{Z}_t| \leqslant \alpha) = 1 \quad ,$$

d'où encore pour $0<\alpha<a$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{T_n \geqslant R_p\} \cap \{\sup_{0\leqslant t\leqslant R_p} |\phi(Y_t) - \phi(\overset{n}{Y}_t)| \leqslant \alpha\}) = 1 \quad .$$

L'uniforme continuité de ϕ^{-1} sur $\phi(\overline{U}')$ pour la structure uniforme à gauche de G montre que pour tout voisinage fermé W de e dans G et tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que

$$P(\bigcup_{0\leqslant t\leqslant R_p} \{\overset{n}{Y}{}_t^{-1} Y_t \notin W\}) < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n>n_0 \quad .$$

Approchant de même $Y_t = X_{s_k}^{-1} X_t$ par $\overset{n}{Y}_t$ dans $]s_k, s_{k+1}]$, où $s_k = kR_p$ et $k=1,\dots,2^p-1$, il vient pour n supérieur à un certain n_1

$$P(\bigcup_k \bigcup_{s_k\leqslant t\leqslant s_{k+1}} \{\overset{n}{Y}{}_t^{-1} Y_t \notin W\}) < 2^p\varepsilon \quad .$$

Mais la compacité de $\overline{U}$ permet de montrer que pour tout voisinage fermé W' de e dans G, il existe un voisinage fermé W de e dans G tel que, pour $r=2^p$, si

$x_1,\dots,x_r$ sont dans W et $g_2,\dots,g_r$ dans $\overline{U}$, on ait

$$x_r g_r^{-1} x_{r-1} \dots g_2^{-1} x_1 g_2 g_3 \dots g_{r-1} g_r \in W' \quad .$$

Appliquant ce résultat lorsque $s_k < t \leq s_{k+1}$ à

$$\mathfrak{X}_t^{-1} X_t = \mathfrak{Y}_t^{-1} Y_t Y_t^{-1} \mathfrak{Y}_{s_k}^{-1} Y_{s_k} \dots Y_{s_2}^{-1} \mathfrak{Y}_{s_1}^{-1} Y_{s_1} Y_{s_2} \dots Y_{s_k} Y_t$$

il vient

$$P(\bigcup_{0 \leq t \leq R} \{\mathfrak{X}_t^{-1} X_t \notin W'\}) < 2^p \varepsilon \quad . \quad \blacksquare$$

On obtient ainsi en particulier que X_R est la limite en probabilité de $X_0 \prod_k \exp(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$. C'est la convergence de ces produits qui sert de base à la définition de l'intégrale stochastique multiplicative chez McKean et Ibero.

On notera désormais $\mathcal{E}(M)$ la solution de $dX_t = X_t dM_t$ de donnée initiale $X_0 = e$, et on l'appellera exponentielle stochastique de M. Elle ne dépend pas de la valeur de M_0.

Une conséquence immédiate du théorème 2 est le résultat suivant.

COROLLAIRE. Si $M_t = M_t^i H_i$, $\mathcal{E}(M)$ prend ses valeurs p.s. dans le sous-groupe fermé engendré par $\exp(\mathcal{K})$, où $\mathcal{K}$ est la sous-algèbre de Lie engendrée par les $(H_i, i=1,\dots,r)$.

2. LOGARITHME D'UNE SEMI-MARTINGALE DU GROUPE DE LIE.

Du point de vue des notations nous identifierons désormais les fonctions sur le domaine V d'une carte locale (V,ϕ) et les fonctions sur $\phi(V)$. Les fonctions $(\phi^j,\ j=1,\dots,d)$ désigneront des éléments de C coïncidant avec les composantes de ϕ sur le domaine V (toujours supposé relativement compact).

Dans cette deuxième partie, on associe de façon très simple une semi-martingale sur l'algèbre $\mathfrak{g}$ à une semi-martingale donnée sur le groupe G . Il faut pour cela rappeler brièvement la notion d'intégrale d'une forme différentielle le long d'une semi-martingale sur une variété [10,1,18].

Si η est une forme différentielle sur G, si X est une semi-martingale sur G, on considère un recouvrement localement fini (U^α) de G par des domaines de cartes locales, et une partition de l'unité (h^α) qui lui est subordonnée. Si dans la carte de domaine U^α la forme différentielle η s'écrit sous la forme $a_j(x)\,dx^j$, on pose

$$\int_{X_0^t} \eta = \Sigma_\alpha Y_t^\alpha \quad ,$$

où

$$Y_t^\alpha = \int_0^t h^\alpha(X_s)a_j(X_s)*d\phi^j(X_s).$$

Si X est une semi-martingale sur G, on appelle <u>logarithme stochastique</u> de X et on note $\mathcal{L}(X)$ la semi-martingale M sur $\mathcal{G}$, nulle en 0, définie par l'égalité

$$(M_t,\theta) = \int_{X_0^t} \theta$$

pour toute forme différentielle θ invariante à gauche.

Si l'on considère une base $(H_i, i=1,\dots,d)$ de $\mathcal{G}$, les composantes M^i de M dans cette base forment exactement au sens de [18,p.87] la lecture de X dans le repère mobile (H_i).

Tout comme l'exponentielle, le logarithme stochastique peut s'obtenir par approximation. Dans le cas des groupes de matrices, ce résultat est dû à Karandikar [14].

LEMME 2. <u>Le logarithme stochastique de</u> X <u>ne dépend pas de la valeur initiale</u> X_0 <u>mais seulement de</u> $Y=X_0^{-1}X$.

DEMONSTRATION. Posons donc pour tout $t\geqslant 0$ $Y_t=X_0^{-1}X_t$ et montrons d'abord le résultat lorsque X_0 est un élément constant g de G. Au recouvrement U^α et à la partition de l'unité h^α on associe le recouvrement $V^\alpha=g^{-1}U^\alpha$ et la partition de l'unité k^α définie par $k^\alpha(y)=h^\alpha(gy)$. Si les (ϕ^j) prolongent les coordonnées dans U^α, on pose $\psi^j(y)=\phi^j(gy)$ et on a alors

$$h^\alpha(X_s)*d\phi^j(X_s) = k^\alpha(Y_s)*d\psi^j(Y_s) \quad .$$

Si $(D_j, j=1,\dots,d)$ est la base associée à (ϕ^j) dans chaque espace tangent $T_x(G)$, où $x\in U^\alpha$, et (D_j') la base associée à (ψ^j) dans $T_y(G)$, où $y\in V^\alpha$, on a pour θ invariante à gauche

$$(D_j',\theta)(y) = (D_j,\theta)(gy)$$

d'où

$$h^\alpha(X_s)\ (D_j,\theta)(X_s)*d\phi^j(X_s) = k^\alpha(Y_s)\ (D_j',\theta)(Y_s)*d\psi^j(Y_s) \quad ,$$

ce qui montre que

$$(M_t,\theta) = \int_{Y_0}^{t} \theta \ .$$

Si maintenant X_0 n'est pas constante, on termine la démonstration comme dans le lemme 1. ■

Soit U un voisinage ouvert de e dans G tel que l'application exponentielle exp soit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur U, et soit log la fonction sur G définie par

$$\begin{aligned} \log x &= y \quad \text{pour } x = \exp y \quad \text{si } x \in U \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } x \notin U \quad . \end{aligned}$$

THEOREME 3. <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale sur</u> G <u>et soit</u> R>0. <u>Le processus</u> $\overset{n}{M}$ <u>défini sur</u> $[0,R]$ <u>pour tout</u> n>0 <u>par</u>

$$\overset{n}{M}_t = \Sigma_{l=0}^{k-1} \log X_{t_l}^{-1} X_{t_{l+1}} + c_n(t-t_k) \log X_{t_k}^{-1} X_{t_{k+1}}$$

<u>(avec les notations du théorème</u> 2) <u>converge en probabilité vers</u> $M=\mathcal{L}(X)$ <u>uniformément sur</u> $[0,R]$.

DEMONSTRATION. Soient (V,ϕ) une carte de domaine V contenant e et a un réel strictement positif tels que l'application exponentielle soit un difféomorphisme de $B(0,a)$ sur $U=\exp B(0,a)$ et que $U.U \subset V$. Comme dans la démonstration du théorème 2, on peut supposer qu'on a choisi un entier positif p tel que $X_t^{-1}X_u \in U$ pour $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant R$ et $u-t \leqslant R2^{-p} = R_p$. On pose $Y_t = X_0^{-1}X_t$ et on étudie d'abord M_t et $\overset{n}{M}_t$ sur $[0,R_p]$. Pour chaque forme différentielle θ invariante à gauche,

$$d(M_t,\theta) = (D_j,\theta)(Y_t)*d\phi^j(Y_t) \quad .$$

Posons

$$\overset{n}{Y}_0 = e$$

$$\overset{n}{Y}_t = Y_{t_k} \exp\{c_n(t-t_k) \log Y_{t_k}^{-1} Y_{t_{k+1}}\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \frac{kR}{2^n} = t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1} = \frac{(k+1)R}{2^n} \leqslant R_p \ .$$

Pour $0\leq t\leq R_p$, $\tilde{Y}_t$ a p.s. ses valeurs dans V et

$$d\phi^j(\tilde{Y}_t) = c_n\ (\log Y_{t_k}^{-1} Y_{t_{k+1}})(\phi^j)(\tilde{Y}_t)\ dt \qquad \text{sur }]t_k, t_{k+1}[\ ;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}(D_j,\theta)(\tilde{Y}_t) * d\phi^j(\tilde{Y}_t) &= c_n\ (\log Y_{t_k}^{-1} Y_{t_{k+1}},\theta)(\tilde{Y}_t)\ dt \\ &= c_n\ (\log Y_{t_k}^{-1} Y_{t_{k+1}},\theta)\ dt \\ &= d(\tilde{M}_t,\theta)\ .\end{aligned}$$

Il résulte alors du théorème 3 de [19] que $\tilde{M}$ converge en probabilité vers M uniformément sur $[0, R_p]$. La convergence sur les autres intervalles de $[0, R]$ s'obtient de façon identique, d'où la convergence globale de $\tilde{M}$ vers M sur tout $[0,R]$. ∎

REMARQUE. Si l'on consulte la démonstration du théorème 3 de [19], on voit qu'il faut introduire une connexion sur le groupe G, ou tout au moins sur l'ouvert $\phi(V)$ de $\mathbb{R}^d$. Mais d'après l'exposé d'Emery [6], il suffit en fait de disposer d'une fonction d'interpolation, qui nous est fournie ici par l'application exponentielle. De toute manière, nous verrons dans la quatrième partie que cette application exponentielle détermine les géodésiques d'une connexion sur le groupe G; au lieu d'utiliser le résultat de Meyer, on aurait pu citer aussi le théorème A de [3], qui donne directement le résultat sur une variété mais utilise des découpages un peu différents de $[0,R]$.

3. <u>PROPRIETES DE L'EXPONENTIELLE ET DU LOGARITHME.</u>

Le premier travail sera de montrer que les applications $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ sont réciproques l'une de l'autre, modulo la donnée initiale.

THEOREME 4. <u>Soient</u> X <u>une semi-martingale sur</u> G <u>vérifiant</u> $X_0=e$ <u>et</u> M <u>une semi-martingale sur</u> $\mathfrak{g}$ <u>vérifiant</u> $M_0=0$. <u>Alors</u> $X=\mathcal{E}(M)$ <u>si et seulement si</u> $M=\mathcal{L}(X)$.

DEMONSTRATION. a) Supposons $M=M^i H_i$ et posons $X=\mathcal{E}(M)$, puis $N=\mathcal{L}(X)$. Pour toute forme différentielle θ invariante à gauche,

$$\begin{aligned}
(N_t,\theta) &= \Sigma_\alpha \int_0^t h^\alpha(X_s)\ (D_j,\theta)(X_s)*d\phi^j(X_s) \\
&= \Sigma_\alpha \int_0^t h^\alpha(X_s)\ (D_j,\theta)(X_s)\ (H_i\phi^j)(X_s)*dM_s^i \\
&= \Sigma_\alpha \int_0^t h^\alpha(X_s)\ (H_i,\theta)(X_s)*dM_s^i \\
&= (H_i,\theta)\ M_t^i \\
&= (M_t,\theta)\ .
\end{aligned}$$

b) Inversement, si $M=\mathcal{L}(X)$, si $f\in C$ et si $(H_i, i=1,\ldots,d)$ et (θ^i) sont des bases en dualité de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, alors

$$\begin{aligned}
df(X_t) &= \Sigma_\alpha\ h^\alpha(X_t)\ D_jf(X_t)*d\phi^j(X_t) \\
&= \Sigma_\alpha\ h^\alpha(X_t)\ (H_if)(X_t)\ (D_j,\theta^i)(X_t)*d\phi^j(X_t) \\
&= (H_if)(X_t)\ (\Sigma_\alpha\ h^\alpha(X_t)\ (D_j,\theta^i)(X_t)*d\phi^j(X_t)) \\
&= (H_if)(X_t)*d(M_t,\theta^i)\ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Voici maintenant deux propriétés à peu près évidentes de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$.

PROPOSITION 1. _Si_ $X=\mathcal{E}(M)$ _avec_ $M_0=0$, X _et_ M _engendrent la même filtration_.

DEMONSTRATION. C'est clair puisque dans un sens on résoud une équation lipschitzienne pour obtenir X à partir de M, dans l'autre on effectue une simple intégration stochastique pour obtenir M à partir de X. C'est évident également d'après les théorèmes 2 et 3 d'approximation. $\blacksquare$

PROPOSITION 2. _Si_ h _est un homomorphisme de groupes de Lie de_ G _dans_ H, _d'application tangente_ h_* , _alors_

$$\mathcal{E}(h_*(M)) = h(\mathcal{E}(M)) \qquad \text{et} \qquad h_*(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(h(X))\ .$$

DEMONSTRATION. Pour la première égalité par exemple, on a

$$df(h(X_t)) = d(f\circ h)(X_t) = h_*(H_i)(f)(h(X_t))*dM_t^i\ . \quad \blacksquare$$

Dans [8], He, Yan et Zheng ont introduit la notion de convergence parfaite d'une semi-martingale vectorielle: disons pour reprendre leur définition que sur une variété V, une semi-martingale X converge parfaitement sur un ensemble F de

$\mathfrak{G}$ si, lorsque l'on conditionne par F, la semi-martingale X est prolongeable en une semi-martingale sur $[0,\infty]$.

PROPOSITION 3. <u>Les ensembles de convergence parfaite de</u> M <u>et</u> $X=\mathfrak{L}(M)$ <u>sont</u> p.s. <u>égaux</u>.

DEMONSTRATION. a) Si M converge parfaitement sur l'ensemble F, cela veut dire avec les notations de la démonstration du théorème 1 que $Q_\infty<\infty$ p.s. sur F. Si pour un p strictement positif

$$S_p = \inf\{t>0 : Q_t>p\} ,$$

alors $F \subset \bigcup_p \bigcup_n (\{S_p=\infty\} \cap \{T_n=\infty\})$. Comme $X^{S_p\wedge T_n}$ est parfaitement convergente d'après sa construction , il en résulte que X converge parfaitement sur F.
b) Si X converge parfaitement sur F, on peut en conditionnant par F transformer X en une semi-martingale jusqu'à l'infini (infini compris) dont le logarithme stochastique, qui n'est pas changé sur F par la nouvelle probabilité, est aussi une semi-martingale jusqu'à l'infini puisqu'il est obtenu par intégration stochastique. Donc M converge parfaitement sur F. ■

On va maintenant retrouver les mouvements browniens gauches de McKean [17] en montrant que les diffusions à coefficients constants sur $\mathfrak{G}$ correspondent aux diffusions sur G de générateurs invariants à gauche.

PROPOSITION 4. <u>Soient</u> H_0 <u>un élément de</u> $\mathfrak{G}$, $(H_i, i=1,\dots,r)$ <u>un système libre de</u> $\mathfrak{G}$ <u>et</u> $(B^i, i=1,\dots,r)$ <u>un mouvement brownien sur</u> $\mathbb{R}^r$. <u>Si</u> M <u>est la diffusion sur</u> $\mathfrak{G}$ <u>à coefficients constants obtenue en posant</u> $M_t=B_t^iH_i+tH_0$, <u>alors</u> $\mathfrak{L}(M)$ <u>est une diffusion sur</u> G <u>de générateur</u> $\frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^r H_i^2+H_0$, <u>et inversement toute diffusion de générateur invariant à gauche sur</u> G <u>a pour logarithme stochastique une diffusion</u> M <u>du type ci-dessus</u>.

DEMONSTRATION. a) Si $M_t=B_t^iH_i+tH_0$, pour f dans C

$$\begin{aligned} df(X_t) &= (H_if)(X_t)*dB_t^i + (H_0f)(X_t)\,dt \\ &= (H_if)(X_t)\,dB_t^i + (\tfrac{1}{2}\,\Sigma_i\, H_i^2 + H_0)(f)(X_t)\,dt . \end{aligned}$$

b) Si X est une diffusion invariante à gauche, il existe H_0 dans $\mathfrak{g}$ et un système libre $(H_i, i=1,\dots,r)$ dans $\mathfrak{g}$ tels que X ait pour générateur $L = \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{r} H_i^2 + H_0$. Cela signifie précisément que pour tout élément f de C,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\, ds$$

est une martingale locale. Supposons pour alléger l'écriture que la diffusion X reste dans le domaine d'une carte locale (V,ϕ). Considérons alors une base $(\theta^k, k=1,\dots,d)$ de $\mathfrak{g}^*$ telle que

$$(H_i, \theta^k) = \delta_i^k \qquad \text{pour } i=1,\dots,r \quad k=1,\dots,d \quad ,$$

et posons

$$\lambda_i^l = H_i\phi^l \qquad i=1,\dots,r \quad l=1,\dots,d$$

$$a_j^k = (D_j, \theta^k) \qquad j=1,\dots,d \quad k=1,\dots,d$$

de sorte qu'on aura

$$\lambda_i^j a_j^k = \delta_i^k \qquad i=1,\dots,r \quad k=1,\dots,d \quad .$$

Identifions $\mathfrak{g}$ à $\mathbb{R}^d$ par l'application qui à H associe $((H,\theta^k), k=1,\dots,d)$. Si g est une fonction réelle à support compact sur $\mathbb{R}^d$ et C^∞,

$$\begin{aligned} dg(M_t) &= \partial_k g(M_t) * dM_t^k \\ &= \partial_k g(M_t)\ a_j^k(X_t) * d\phi^j(X_t) \\ &= \partial_k g\ a_j^k\ L\phi^j\ dt + \frac{1}{2}\ a_j^k\ (\partial_l \partial_k g)\ a_m^l\ (L(\phi^m \phi^j) - \phi^m L\phi^j - \phi^j L\phi^m)\ dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\ \partial_k g\ (L(a_j^k \phi^j) - a_j^k L\phi^j - \phi^j L a_j^k)\ dt + d(\text{martingale locale}) \quad . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} a_j^k\ a_m^l\ (L(\phi^m \phi^l) - \phi^m L\phi^j - \phi^j L\phi^m) &= \frac{1}{2}\ a_j^k\ a_m^l\ \Sigma_{i=1}^r (H_i^2(\phi^m\phi^j) - \phi^m H_i^2 \phi^j - \phi^j H_i^2 \phi^m) \\ &= a_j^k\ a_m^l\ \Sigma_{i=1}^r (H_i\phi^m)(H_i\phi^j) \\ &= \Sigma_{i=1}^r \delta_i^k\ \delta_i^l \quad , \end{aligned}$$

tandis que

$$\frac{1}{2}\ (L(a_j^k\phi^j) - a_j^k L\phi^j - \phi^j L a_j^k) = a_j^k H_0 \phi^j + \frac{1}{4}\ \Sigma_i (2(H_i a_j^k)(H_i\phi^j) + 2 a_j^k H_i^2 \phi^j)$$

$$= a_j^k H_0 \phi^j + \frac{1}{2} \Sigma_i (\lambda_i^j H_i a_j^k + a_j^k H_i \lambda_i^j)$$

$$= a_j^k H_0 \phi^j + \frac{1}{2} \Sigma_i H_i (\lambda_i^j a_j^k)$$

$$= (H_0, \theta^k) .$$

Il en résulte que si ∂_0 représente la dérivation dans la direction de H_0,

$$g(M_t) - \int_0^t (\frac{1}{2} \Sigma_i \partial_{ii} + \partial_0)(g)(M_s) \, ds$$

est une martingale locale, et on sait bien que cela entraîne la représentation voulue pour M. ■

Le reste de cette partie est consacré à l'étude d'une formule du type Campbell-Hausdorff pour les logarithme et exponentielle stochastiques. Rappelons que si H et K sont dans $\mathfrak{g}$, si g est dans G, on note R_g la multiplication à droite par g sur G, L_g la multiplication à gauche par g, et on pose

$$Ad(g)H = gHg^{-1} = L_{g*}(R_{g^{-1}*}(H))$$

$$ad(H)K = [H,K] .$$

Le résultat suivant a été obtenu par Karandikar [14] pour les groupes de matrices et implicitement par Shigekawa [23] dans le cas général.

PROPOSITION 5. <u>Si</u> M <u>et</u> N <u>sont deux semi-martingales sur</u> $\mathfrak{g}$,

$$\mathcal{E}(M+N) = \mathcal{E}(Ad(\mathcal{E}(N))_* M) \, \mathcal{E}(N) .$$

<u>Inversement</u>, <u>si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux semi-martingales sur</u> G,

$$\mathcal{L}(XY) = Ad(Y^{-1})_* \mathcal{L}(X) + \mathcal{L}(Y) .$$

DEMONSTRATION. La deuxième formule se déduisant immédiatement de la première, c'est celle-ci que nous démontrerons. Posons

$$Y = \mathcal{E}(N) \quad , \qquad X = \mathcal{E}(Ad(Y)_* M) \quad ,$$

où $Ad(Y)_* M$ désigne la semi-martingale sur $\mathfrak{g}$ définie, si $M_t = M_t^i H_i$, par

$$(Ad(Y)_* M)_t = \int_0^t Ad(Y_s) H_i * dM_s^i \quad .$$

Supposons encore que nous n'ayons besoin que d'une seule carte. Alors, pour f dans C, si l'on pose à t fixé

$$h(x) = f(xY_t) \quad \text{et} \quad k(y) = f(X_t y) \quad ,$$

on a

$$\begin{aligned} df(X_tY_t) &= D_k h(X_t) * d\phi^k(X_t) + D_l h(Y_t) * d\phi^l(Y_t) \\ &= D_k h(X_t) \ (Y_t H_i Y_t^{-1})(\phi^k)(X_t) * dM_t^i + D_l k(Y_t)(H_i \phi^l)(Y_t) * dN_t^i \\ &= (Y_t H_i Y_t^{-1})(h)(X_t) * dM_t^i + (H_i k)(Y_t) * dN_t^i \quad . \end{aligned}$$

Mais pour x,y,g dans G et H dans ,

$$\begin{aligned} (gHg^{-1})(f \circ R_g)(x) &= (Hf)(xg) \\ H(f \circ L_g)(y) &= (Hf)(gy), \end{aligned}$$

d'où

$$df(X_tY_t) = (H_i f)(X_tY_t) \ dM_t^i + (H_i f)(X_tY_t) \ dN_t^i \quad . \quad \blacksquare$$

LEMME 3. <u>Si</u> $Y = \mathcal{E}(N)$ <u>et</u> $N_t = N_t^i H_i$, <u>alors</u>, <u>pour tout</u> H <u>dans</u> $\mathfrak{g}$,

$$d(Ad(Y_t^{-1})H) = [Ad(Y_t^{-1})H, H_i] * dN_t^i \quad .$$

DEMONSTRATION. Pour g dans G, H dans $\mathfrak{g}$ et θ dans $\mathfrak{g}^*$, on pose $f(g) = (Ad(g^{-1})H, \theta)$. Alors,

$$df(Y_t) = H_i(f \circ L_{Y_t}) * dN_t^i$$

avec

$$\begin{aligned} f \circ L_{Y_t}(g) &= (Ad((Y_t g)^{-1})H, \theta) \\ &= (Ad(Y_t^{-1}) Ad(g^{-1})H, \theta) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} H_i(f \circ L_{Y_t}) &= (Ad(Y_t^{-1}) ad(-H_i)H, \theta) \\ &= (Ad(Y_t^{-1})[H, H_i], \theta) \quad . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PROPOSITION 6. Si M et N sont deux semi-martingales sur $\mathcal{G}$ nulles en 0, avec $M_t = M_t^i H_i$ et $N_t = N_t^i H_i$, si u et v sont deux réels différents de 0, alors

$$\frac{\mathcal{L}(\mathcal{E}(uM)\mathcal{E}(vN)) - uM - vN}{uv}$$

converge lorsque v tend vers 0 uniformément sur tout compact en probabilité vers un processus R qui vaut

$$R_t = [H_i, H_k] \int_0^t N_s^k * dM_s^i \quad .$$

DEMONSTRATION.

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}(uM)\mathcal{E}(vN)) - uM - vN = u \operatorname{Ad}((\mathcal{E}(vN))^{-1}) - \operatorname{Id}) * M.$$

Si l'on pose pour $i=1,\ldots,r$ $Z_i^v = \operatorname{Ad}(\mathcal{E}(vN)^{-1})H_i$, alors d'après le lemme précédent

$$dZ_i^v = v[Z_i^v, H_k] * dN^k \quad ,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{v}(Z_i^v - H_i) \to [H_i, H_k]\, N^k \quad \text{en probabilité quand } v \to 0, \text{ puis}$$

$$\frac{1}{v}(Z_i^v - H_i) * M^i \to [H_i, H_k]\, N^k * M^i \quad \text{en probabilité quand } v \to 0 \ . \quad \blacksquare$$

4. MARTINGALES SUR UN GROUPE DE LIE.

Il est maintenant possible de donner une notion naturelle de martingale (locale) sur un groupe de Lie. On dira qu'une semi-martingale X sur G est une G-martingale si $\mathcal{L}(X)$ est une martingale locale sur $\mathcal{G}$.

D'après la proposition 2, cette notion est invariante par homomorphisme de groupes de Lie. La proposition 5 nous fournit directement la décomposition multiplicative des semi-martingales.

PROPOSITION 7. Si $X = X_0 \mathcal{E}(M)$ et si $M = N + A$, où N est une martingale locale et A un processus à variation finie sur $\mathcal{G}$, alors

$$X = X_0\, Y\, Z = X_0\, Z' Y' \ ,$$

où Y et Y' sont respectivement les G-martingales $\mathcal{E}(\operatorname{Ad}(\mathcal{E}(A)) * N)$ et $\mathcal{E}(N)$, et Z et Z' respectivement les processus à variation finie $\mathcal{E}(A)$ et $\mathcal{E}(\operatorname{Ad}(\mathcal{E}(N)) * A)$.

On remarquera également que ces deux décompositions sont nécessairement uniques.

PROPOSITION 8. <u>Si</u> M <u>est une martingale locale sur</u> $\mathfrak{g}$ <u>et si</u> $X=\mathfrak{E}(M)$, <u>les ensembles de convergence quand</u> t <u>tend vers l'infini de</u> M <u>et de</u> X <u>sont</u> p.s. <u>égaux</u>.

DEMONSTRATION. Si M converge p.s. sur un ensemble F, M converge parfaitement sur cet ensemble , donc également X, donc X en particulier converge p.s. sur F. Inversement, supposons que X converge p.s. sur un ensemble F. En considérant les G-martingales $(X_{n+t}, t\geqslant 0)$ arrêtées aux instants U^n où elles sortent du domaine d'une carte locale, on peut se ramener à l'étude d'une G-martingale X qui reste dans un domaine fixé et qui y converge p.s. On a alors, pour une base (H_i) de $\mathfrak{g}$,

$$d\phi^j(X_t) = \lambda_i^j \, dM_t^i + \frac{1}{2}\lambda_l^k \, D_k(\lambda_i^j) \, d\langle M^i, M^l\rangle_t .$$

D'après [25] ou encore [8], comme les coefficients sont bornés ainsi que ceux de la matrice inverse des (λ_i^j), les $\phi^j(X_t)$ ne peuvent converger p.s. que si les M_t^i le font également. ∎

Ordinairement [2,18], pour définir une bonne notion de martingale sur une variété V, il faut munir V d'une connexion Γ, sans torsion de préférence. Sur un groupe de Lie G, il est clair que la connexion à choisir doit être invariante à gauche et transformer les courbes exp tA (t réel) en géodésiques, ce qui exige que $\nabla_A A=0$ pour tout champ de vecteurs invariant à gauche A . On peut choisir de plus Γ sans torsion, ce qui détermine Γ par la condition $\nabla_A B = \frac{1}{2}[A,B]$ pour A et B dans $\mathfrak{g}$. On va plutôt choisir $\nabla_A B = 0$, qui a pour symétrisée la connexion précédente, et qui possède de surcroît deux jolies propriétés:

a) le transport parallèle stochastique d'Ito au-dessus d'une semi-martingale sur G admet au point terminal la valeur du champ invariant à gauche déterminé par le vecteur tangent au point initial;

b) le développement d'une semi-martingale X n'est autre que $\mathfrak{L}(X)$.

Pour vérifier ces propriétés, on commence par constater que si $\nabla_A B = 0$, les composantes (λ^j) dans une carte d'un champ de vecteurs invariant à gauche et les composantes (a_j) d'une forme différentielle invariante à gauche vérifient

$$\lambda^j \Gamma^k_{ij} + D_i\lambda^k = 0 \qquad a_i \Gamma^i_{jk} - D_k a_j = 0 \quad ,$$

où les Γ^i_{jk} sont les symboles de Christoffel de la connexion; les équations du transport parallèle, qui sont $dU^k_t = -\Gamma^k_{ij} U^j_t * dX^i_t$, coïncident donc avec les équations

$$d\lambda^k_t = D_i\lambda^k_t * dX^i_t = -\Gamma^k_{ij}\lambda^j_t * dX^i_t \quad ;$$

de la même façon, les équations du développement relativement à une base (H_l)

$$\lambda^k_l \, d\xi^l_t = dX^k_t + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij} \, d\langle X^i, X^j\rangle_t$$

s'écrivent aussi sous la forme

$$d\xi^l_t = a^l_k \, dX^k_t + \frac{1}{2} a^l_k \Gamma^k_{ij} \, d\langle X^i, X^j\rangle_t = dM^l_t \quad .$$

Il reste à montrer que les Γ-martingales pour cette connexion coïncident avec les G-martingales introduites ci-dessus. Or X est une Γ-martingale si par définition pour toute carte locale de domaine V, $dX^k_t + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij} d\langle X^i, X^j\rangle_t$ est une différentielle de martingale locale dans l'ouvert prévisible $\{X \in V\}$; cette condition équivaut à ce que

$$a^l_k \, dX^k_t + \frac{1}{2} a^l_k \Gamma^k_{ij} \, d\langle X^i, X^j\rangle_t = dM^l_t$$

soit une différentielle de martingale locale dans $\{X \in V\}$, et cela correspond exactement à la notion de G-martingale.

5. MARTINGALES SUR LE GROUPE DE HEISENBERG.

Terminons par une brève étude des martingales sur le groupe H des matrices

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'algèbre $\mathcal{H}$ est constituée par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aH_1 + bH_2 + cH_3 \quad .$$

Un calcul simple montre que $\begin{pmatrix} \lambda^j_i(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et par conséquent si $M_t=M^i_t H_i$ avec $M_0=0$ et si $X=\mathcal{E}(M)$, on trouve

$$X^1_t=M^1_t \qquad X^2_t=M^2_t \qquad X^3_t=M^3_t+\int_0^t M^1_s dM^2_s+\frac{1}{2}\langle M^1,M^2\rangle_t$$

tandis qu'inversement

$$M^1_t=X^1_t \qquad M^2_t=X^2_t \qquad M^3_t=X^3_t-\int_0^t X^1_s dX^2_s-\frac{1}{2}\langle X^1,X^2\rangle_t \quad .$$

Ces formules montrent que $X_t = \exp N_t$, où

$$N^1_t=M^1_t \qquad N^2_t=M^2_t \qquad N^3_t=M^3_t+\frac{1}{2}\int_0^t (M^1_s dM^2_s-M^2_s dM^1_s) \quad .$$

On peut remarquer que M est une martingale locale si et seulement N en est une, et que la correspondance entre M et N est bijective non linéaire. Une conséquence en est le résultat suivant.

PROPOSITION 9. <u>Si</u> X <u>est une</u> H-<u>martingale</u>, <u>pour tout entier relatif n</u>, $(X)^n$ <u>est encore une</u> H-<u>martingale</u>.

DEMONSTRATION. Soit N la martingale locale associée par la bijection précédente à $M=\mathcal{L}(X)$. On calcule facilement les composantes de $\log\,(X_0)^{-n}(X_t)^n$ qui sont

$$N^{n,1}_t=nN^1_t \qquad N^{n,2}_t=nN^2_t \qquad N^{n,3}_t=nN^3_t-\frac{1}{2}n(n-1)(X^1_0N^2_t-X^2_0N^1_t) \quad .$$

On en déduit que $\mathcal{L}((X)^n)$ a pour composantes

$$M^{n,1}_t=nM^1_t \qquad M^{n,2}_t=nM^2_t \qquad M^{n,3}_t=nM^3_t-\frac{1}{2}n(n-1)\int_0^t (M^1_s dM^2_s-M^2_s dM^1_s)$$
$$-\frac{1}{2}n(n-1)(X^1_0M^2_t-X^2_0M^1_t) \quad ,$$

c'est donc encore une martingale locale. ∎

Une dernière remarque: si $B=(B^1,B^2)$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$, si $M^1=B^1$, $M^2=B^2$ et $M^3=0$, un résultat de P.Lévy montre que la martingale N de composantes

$$N^1_t=B^1_t \qquad N^2_t=B^2_t \qquad N^3_t=\frac{1}{2}\int_0^t (B^1_s dB^2_s-B^2_s dB^1_s)$$

admet une densité strictement positive pour tout $t>0$ sur tout $\mathbb{R}^3$, et il en va de même de $X = \exp N$ sur tout le groupe H. Ici, X est exactement la diffusion de générateur $\frac{1}{2}\,(H^2_1+H^2_2)$.

REFERENCES

[1] BISMUT (J.M.). Mécanique aléatoire. L.N.in M. 866,Springer 1981.

[2] DARLING (R.W.R.). Martingales in manifolds. Definitions, examples, and behaviour under maps. Sém. Proba. XVI. Supplément. L.N.in M. 921, p.217-236,Springer 1982.

[3] DARLING (R.W.R.).Approximating Ito integrals of Differential Forms and Geodesic Deviation. Z.W. 65,p.563-572,1984.

[4] ELWORTHY (K.D.). Stochastic Differential Equations on Manifolds. Cambridge University Press, 1982.

[5] EMERY (M.). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z.W. 41,p.241-262,1978.

[6] EMERY (M.). En marge de l'exposé de Meyer: "Géométrie différentielle stochastique". Sém. Proba. XVI. Supplément. L.N.in M. 921, p.208-216, Springer 1982.

[7] GAVEAU (B.).Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta mathematica 139,p.95-153,1977.

[8] HE (S.W.),YAN (J.A.),ZHENG (W.A.). Sur la convergence des semi-martingales continues dans R^n et des martingales dans une variété. Sém. Proba. XVII. L.N.in M. 986,p.179-184,Springer 1983.

[9] IBERO (M.). Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie. Bull.Sc.Math. 100,p.175-191,1976.

[10] IKEDA (N.),MANABE (S.). Stochastic integral of differential forms and its applications. Stochastic Analysis. Academic Press,p.175-185,1978.

[11] IKEDA (N.),WATANABE (S.). Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North Holland, 1981.

[12] ITO (K.). Brownian Motions on a Lie Group. Proc.Japan Acad. 26,p.4-10,1950.

[13] KARANDIKAR (R.L.). Multiplicative decomposition of non singular matrix valued continuous semimartingales. Ann.Proba. 10,p.1088-1091,1982.

[14] KARANDIKAR (R.L.). Girsanov type formula for a Lie group valued Brownian motion. Sém. Proba. XVII. L.N.in M. 986,p.198-204,Springer 1983.

[15] MALLIAVIN (P.). Géométrie différentielle stochastique. Les Presses de l'Université de Montréal, 1978.

[16] McKEAN (H.P.). Brownian Motion on the 3-Dimensional Rotation Group. MK 33, p.25-38,1960.

[17] McKEAN (H.P.). Stochastic Integrals. Academic Press, 1969.

[18] MEYER (P.A.). Géométrie stochastique sans larmes. Sém. Proba. XV. L.N.in M. 850,p.44-102,1981.

[19] MEYER (P.A.). Géométrie différentielle stochastique (bis). Sém. Proba. XVI. Supplément. L.N.in M. 921,p.165-207,Springer 1982.

[20] PERRIN (F.). Etude mathématique du mouvement brownien de rotation. Ann. Ecole Normale Sup. 45,p.1-51,1928.

[21] SCHWARTZ (L.). Semi-martingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. L.N. in M. 780,Springer 1980.

[22] SCHWARTZ (L.). Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle. Sém. Proba. XVI. Supplément.L.N. in M. 921,p.1-148,Springer 1982.

[23] SHIGEKAWA (I.). Transformations of the Brownian Motion on a Riemannian Symmetric Space. Z.W. 65,p.493-522,1984.

[24] YOSIDA (K.). Brownian Motion in a Homogeneous Space. Pacific J.Math. 2, p.263-296,1952.

[25] ZHENG (W.A.). Sur la convergence des martingales dans une variété riemannienne. Z.W. 63,p.511-515,1983.

M. H.-D. :
Université de Paris VII

D. L. :
Université d'Orléans