

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MONIQUE PONTIER

CHRISTOPHE STRICKER

JACQUES SZPIRGLAS

**Sur le théorème de représentation par rapport à l'innovation**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 20 (1986), p. 34-39

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1986\\_\\_20\\_\\_34\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__34_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE THEOREME DE REPRESENTATION

PAR RAPPORT A L'INNOVATION

M. PONTIER, C. STRICKER, J. SZPIRGLAS

°°°°

Nous généralisons un peu, dans ce papier, le théorème de représentation prévisible par rapport à l'innovation qui a été établi par FUJISAKI, KALLIANPUR et KUNITA [3].

On considère le modèle de filtrage suivant : le processus d'observation  $Y$  d'un signal  $X$ , définis tous deux sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \underline{A}, \underline{F}, \mathbb{P})$ , et une  $\underline{F}$ -semi-martingale continue de la forme :

$$(1) \quad Y_t = \int_0^t h_s ds + W_t$$

où  $W$  est un  $(\underline{F}, \mathbb{P})$ -mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $h$  est un processus  $\underline{F}$ -progressivement mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$(2) \quad \int_0^t \|h_s\|^2 ds < \infty \quad , \mathbb{P} \text{ p.s. } , \forall t \geq 0$$

Sous les hypothèses (1) et (2), on sait d'après ([6], corollaire 2) que  $Y$  est pour sa filtration naturelle,  $\underline{G}^Y$ , complétée et rendue continue à droite, une semi-martingale spéciale admettant une décomposition vérifiant des conditions analogues à (1) et (2), à savoir :

$$(3) \quad Y_t = \int_0^t \hat{h}_s ds + I_t$$

où  $I$ , appelé "processus d'innovation" de  $Y$ , est une  $\underline{G}^Y$ -martingale de processus croissant  $t$  (c'est donc un  $\underline{G}^Y$ -mouvement brownien) et  $\hat{h}$  est un processus adapté tel que :

$$(4) \quad \int_0^t \|\hat{h}_s\|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s. } \forall t \geq 0.$$

Par l'unicité de la décomposition des semi-martingales spéciales, dès que l'on peut définir une  $\underline{G}^Y$ -projection prévisible du processus  $h$ , elle coïncide nécessairement avec  $\hat{h}$ .

Dans le cas où  $h$  est borné, on a le théorème de représentation par rapport à l'innovation : toute  $\underline{G}^Y$ -martingale se représente comme intégrale stochastique de processus  $\underline{G}^Y$ -prévisibles par rapport à l'innovation  $I$ . On montre ici que le résultat est encore vrai sous les hypothèses (1) et (2) qui généralisent un peu celles de [3] et, dans le même temps, on précise leur démonstration.

On introduit maintenant quelques notations et définitions. Pour un processus générique  $Z$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \underline{A}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \underline{F})$ , on considère les filtrations suivantes : la filtration naturelle de  $Z$  complétée des ensembles  $\mathbb{P}$ -négligeables de  $\underline{A}$ ,  $\underline{N}$ , que l'on note  $\underline{F}^Z$  :

$$(5) \quad \underline{F}_t^Z = \sigma(Z_s ; s \leq t) \vee \underline{N}$$

et la régularisée à droite de  $\underline{F}^Z$ , notée  $\underline{G}^Z$  :

$$(6) \quad \underline{G}_t^Z = \bigwedge_{\varepsilon > 0} \underline{F}_{t+\varepsilon}^Z$$

Cette filtration  $\underline{G}^Z$  vérifie les conditions usuelles de (1).

Pour une filtration  $\underline{F}$  sur  $(\Omega, \underline{A}, \mathbb{P})$  et un  $\underline{F}$ -temps d'arrêt  $T$ , on définit les tribus suivantes : celle des événements antérieurs à  $T$ , notée  $\underline{F}_T$  et formée des éléments  $A$  de  $\underline{F}_\infty$  tels que

$$(7) \quad A \cap \{T \leq t\} \in \underline{F}_t \quad \forall t \geq 0 ;$$

et la tribu des événements strictement antérieurs à  $T$ , notée  $\underline{F}_T^-$  et engendrée par  $\underline{F}_0$  et les ensembles de la forme

$$(8) \quad A \cap \{t < T\}, \text{ où } A \in \underline{F}_t \text{ et } t \geq 0.$$

On rappelle que le couple  $(X, \underline{F})$  - où  $X$  est une  $\underline{F}$ -martingale continue - possède la propriété de représentation prévisible si toute  $\underline{F}$ -martingale  $Y$  admet une version séparable qui peut se représenter comme une intégrale stochastique de  $X$ , soit :

$$(9) \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t f_s \cdot dX_s$$

avec  $f$  processus  $\underline{F}$ -prévisible tel que  $E \int_0^t f_s^2 d\langle X, X \rangle_s$  est fini pour tout  $t$  positif, où  $\langle X, X \rangle$  désigne le processus croissant de  $X$ . Il est connu que lorsque  $X$  est un mouvement brownien, les filtrations  $\underline{F}^X$  et  $\underline{G}^X$  coïncident et  $(X, \underline{F}^X)$  possède la propriété de représentation prévisible.

La démonstration de [3] utilise implicitement le fait que les tribus  $\underline{F}_T^Z$  et  $\underline{F}_\infty^{Z^T}$  coïncident pour un  $\underline{F}_T^Z$ -temps d'arrêt (où  $Z_t^T = Z_{T \wedge t}$ ) ce qui n'est pas vrai en général. Pour contourner cette difficulté, on utilise des résultats de [2] (qui ont également servi dans [5] pour l'étude des filtrations naturelles des processus à valeurs dans une variété).

On montre la proposition suivante :

Proposition 1. Sous les hypothèses (1) et (2), le couple  $(I, \underline{G}^Y)$  possède la propriété de représentation prévisible.

La démonstration s'appuie sur la proposition suivante de [2]:

Proposition 2 (prop. 4 de [2]). Soient deux processus X et Y, et T un temps d'arrêt tel que :

$$(10) \quad X^T = Y^T \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Si S est un  $\underline{G}^X$ -temps d'arrêt  $\mathbb{P}$  p.s. strictement inférieur à T, alors S est un  $\underline{G}^Y$ -temps d'arrêt et l'on a :

$$(11) \quad \underline{G}_S^X = \underline{G}_S^Y$$

Démonstration : Soit t un réel positif, A dans  $\underline{G}$ . On pose :

$$(12) \quad B = A \cap \{S < t\}$$

et  $(a_i)$  l'ensemble des dyadiques de  $[0, t[$ . Soit :

$$(13) \quad S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} 1_{\left\{ \frac{k}{2^n} \leq S < \frac{k+1}{2^n} \right\}}$$

L'évènement  $B \cap \{S_n = a_i\}$  est  $\underline{G}_{a_i}^X$  mesurable et  $\underline{G}_{a_i}^X$  est séparable

(aux ensembles négligeables près). Il existe donc un ensemble dénombrable de  $[0, a_i]$   $D_i = \{s_0^i, s_1^i, \dots, s_p^i, \dots\}$  et des fonctions boréliennes

$f_n^i$  de  $\mathbb{R}^{D_i}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ :

$$(14) \quad f_n^i(X_{s_0^i}, X_{s_1^i}, \dots) = B \cap \{S_n = a_i\}$$

Des définitions (13) et (14), on tire :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad 1_{A \cap \{S < t\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1_{A \cap \{S_n < t\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i 1_{B \cap \{S_n = a_i\}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i 1_{\{S_n = a_i\}} f_n^i(X_{s_p^i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i 1_{\{S_n = a_i\}} f_n^i(X_{s_p^i}^T)
 \end{aligned}$$

En effet, si  $S$  est supérieur ou égal à  $t$ , il est supérieur à  $s_p^i$  et  $X_{s_p^i} = X_{s_p^i}^T$  ; sinon, il existe pour  $n$  assez grand un indice  $i$  tel que, pour tout  $p$  :

$$(16) \quad s_p^i \leq a_i = S_n < T$$

Lorsque  $A = \Omega$ , on a même mieux :

$$(17) \quad 1_{\{S < t\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i f_n^i(X_{s_p^i}^T)$$

ce qui montre que  $S$  est un  $\underline{G}^Y$ -temps d'arrêt. Il en est donc de même pour les  $S_n$ . De  $X^T = Y^T$  on déduit alors que  $A$  appartient à  $\underline{G}_S^Y$  :  $\underline{G}_S^X \subset \underline{G}_S^Y$ . On a évidemment l'inverse par symétrie et donc l'égalité (11).

Démonstration de la proposition 1. Lorsque  $h$  est borné sur un intervalle de temps fini, l'idée est de faire un changement de probabilité équivalente pour laquelle  $Y$  est un mouvement brownien ; en effet, dans ce cas, la martingale locale  $L$  définie par :

$$(18) \quad L_t = \exp \left( - \int_0^t \hat{h}_u dI_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\hat{h}_u\|^2 du \right)$$

est une martingale uniformément intégrable sur  $[0, s]$  pour tout  $s$  fini. Sous l'hypothèse plus large (2) ce n'est plus le cas, et on est amené à localiser :

$$(19) \quad T_n = \inf \{ t \geq 0 / L_t \leq 1/n \text{ ou } \int_0^t \|\hat{h}_u\|^2 du \geq n \} \wedge n ; n \geq 2$$

Ces temps d'arrêt sont  $\underline{G}^Y$ -prévisibles comme débuts d'ensembles prévisibles fermés à droite ; ils sont de plus strictement positifs et strictement croissants. Le processus arrêté  $L^{T_n}$  est une  $\underline{G}^Y$ -martingale de carré intégrable minorée par  $1/n$ . La probabilité  $\mathbb{P}^n = L^{T_n} \cdot \mathbb{P}$  est donc équivalente à  $\mathbb{P}$ . On pose :

$$(20) \quad Y_t^n = I_t + \int_0^{t \wedge T_n} \hat{h}_u du$$

Le théorème de Girsanov montre que  $Y^n$  est un  $(\underline{G}^Y, \mathbb{P}^n)$ -mouvement brownien. Par ailleurs, les processus  $Y$  et  $Y^n$  coïncident jusqu'au temps d'arrêt  $T_n$ . La stricte croissance de la suite  $(T_n)$  et la proposition 2 montrent que  $T_{n-1}$  est un  $\underline{G}^Y$ -temps d'arrêt et que

$$(21) \quad \underline{G}_{t \wedge T_{n-1}}^Y = \underline{G}_{t \wedge T_{n-1}}^{Y^n}$$

On peut alors conclure la démonstration : si  $Z$  est une  $(\underline{G}^Y, \mathbb{P})$ -martingale de carré intégrable,  $Z^{T_{n-1}}$  est une  $(\underline{G}_{\cdot, T_{n-1}}^Y, \mathbb{P})$ -martingale et donc  $(Z/L)^{T_{n-1}}$  est une  $(\underline{G}_{\cdot, \Lambda T_{n-1}}^Y, \mathbb{P}^n)$ -martingale et aussi  $(\underline{G}_{\cdot, \Lambda T_{n-1}}^Y, \mathbb{P}^n)$ -martingale, de carré intégrable ( $L^{T_{n-1}}$  est minorée). On obtient, par la propriété de représentation du brownien  $Y^n$  l'existence d'un processus  $\phi^n$ ,  $\underline{G}^{Y^n}$ -prévisible, tel que :

$$(22) \quad (Z/L)_t^{T_{n-1}} = Z_0 + \int_0^t \phi^n(u) dY_u^n$$

La formule de Itô appliquée au produit  $L \times Z/L$  donne :

$$(23) \quad Z_{t \wedge T_{n-1}} = Z_0 + \int_0^t \psi^n(u) dI_u$$

avec  $\psi^n = \psi^n 1_{\llbracket 0, T_{n-1} \rrbracket}$  processus  $\underline{G}^{Y^n}$ -prévisible, mais aussi, par (21),  $\underline{G}^Y$ -prévisible. On peut choisir les  $\psi^n$  de sorte que  $\psi^m = \psi^n 1_{\llbracket 0, T_{m-1} \rrbracket}$  si  $m < n$  ; et les temps d'arrêt  $T_n$  croissant vers l'infini, on peut donc définir un processus  $\psi$   $\underline{G}^Y$ -prévisible coïncidant avec  $\psi^n$  sur  $\llbracket 0, T_{n-1} \rrbracket$  tel que :

$$(24) \quad Z_t = Z_0 + \int_0^t \psi(u) dI_u,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. Comme nous l'a suggéré JACOD, il n'existe qu'une seule probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \underline{G}_\infty^Y)$  telle que  $Y$  soit une  $(\underline{G}^Y, \mathbb{P})$  semi-martingale de caractéristiques locales  $(\int_0^t \hat{h}_s ds, \delta_{ij} dt, 0)$ . Dans ce cas, le  $\underline{G}^Y$ -mouvement brownien a nécessairement la propriété de représentation prévisible, grâce à la proposition (12.21) de [4].

REFERENCES

- [ 1 ] C. DELLACHERIE & P.A. MEYER : "Probabilités et potentiels", tomes 1 et 2, Hermann, Paris (1975 et 1980).
- [ 2 ] H.J. ENGELBERT and J. HESS : "Intégral Représentation with respect to stopped Continuous Local Martingales", Stochastic 4 (1980), p. 121-142.
- [ 3 ] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR and KUNITA : "Stochastic Differential Equations for the Nonlinear Filtering Problem", Ozaka J. Math. 9 (1972), p. 19-40.
- [ 4 ] J. JACOD : "Calcul stochastique et Problèmes de Martingales", L.N. in Math n° 714, Springer-Verlag (1979).
- [ 5 ] M. PONTIER & J. SZPIRGLAS : "Filtrage non linéaire avec observation sur une variété" - A paraître dans Stochastics, 1985.
- [ 6 ] C. STRICKER : "Quelques remarques sur les semi-martingales gaussiennes et le problème de l'innovation". Filtering and Control of Random Processes ; Proc. of ENST-CNET Coll, Feb. 23-24 1983 ; L.N. in Control and Inf. Sc. n° 61, Springer-Verlag, p. 260-276.
- [ 7 ] J. SZPIRGLAS & MAZZIOTTO : "Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées", Ann. I.H.P. vol. XV n° 2 (1979) p. 147-173.
- [ 8 ] M. ZAKAI : "On the optimal filtering of diffusion processes", Zeit. für Wahrschein. 11 (1969) p. 230-249.