PAUL-ANDRÉ MEYER

Quelques remarques au sujet du calcul stochastique sur l'espace de Fock

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 321-330
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__321_0>

QUELQUES REMARQUES AU SUJET DU CALCUL STOCHASTIQUE SUR L'ESPACE DE FOCK

par P.A. Meyer

Cette note est un complément aux exposés IV-V des << Eléments de Probabilités Quantiques >> (référence [E] ci-dessous). Nous présentons d'abord quelques remarques sur les relations entre intégrales stochastiques d'opérateurs et intégrales stochastiques ordinaires, qui nous paraissent éclairer certains points de [E]. Ensuite, nous démontrons un résultat sur la représentation des martingales d'opérateurs : cette partie est fortement influencée par un travail récent de Parthasarathy et Sinha (exposé par K.R. Parthasarathy à Strasbourg en Octobre 85) et par des remarques (inédites) de J.L. Journé.

I. RAPPELS ET NOTATIONS.

Nous désignons par Φ, $\Phi_{t]}$, $\Phi_{[t}$, $\Phi_{[s,t]}$ les espaces de Fock symétriques construits respectivement sur les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+)$, $L^2([0,t])$, $L^2([t,\infty[)$, $L^2([s,t])$. Le plus souvent, nous identifierons Φ à l'espace $L^2(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, où Ω est l'espace des applications continues et nulles en 0 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\underline{\underline{F}}$ engendrée par le processus (B_t) des applications coordonnées, et P est la mesure de Wiener. Si l'on désigne par $\underline{\underline{F}}_{t]}$, $\underline{\underline{F}}_{[t}$, $\underline{\underline{F}}_{[s,t]}$ les tribus engendrées r spectivement par les v.a. $(B_r)_{r\leq t}$, $(B_r-B_t)_{r\geq t}$, $(B_r-B_s)_{s\leq r\leq t}$, les espaces $\Phi_{t]}$, $\Phi_{[t}$, $\Phi_{[s,t]}$ s'identifient respectivement à $L^2(\underline{\underline{F}}_t)$, $L^2(\underline{\underline{F}}_{[t})$, $L^2(\underline{\underline{F}}_{[s,t]})$ (cf. [E], exposé IV).

L'identification de Φ à $L^2(P)$ munit Φ de structures supplémentaires, et permet d'utiliser les ressources du calcul stochastique usuel. En particulier, nous appellerons <u>produit de Wiener</u> le produit de deux éléments de Φ dans l'identification à $L^2(P)$, lorsque le résultat de la multiplication appartient encore à $L^2(P)$. De même, lorsqu'on identifie l'espace de Fock à l'espace L^2 associé à un processus de Poisson compensé ([E], p. IV.14), on voit apparaître de même les <u>produits de Poisson</u> sur l'espace de Fock, dont nous ferons un usage plus limité.

Dans toute cette note, les lettres u,v,w désignent des éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$, et plus précisément des <u>fonctions en escalier à support compact</u>. On désigne par $\mathfrak{X}$ l'espace des combinaisons linéaires finies de vecteurs cohérents $\mathcal{E}(u)$ du type précédent : <u>tous les opérateurs rencontrés dans cette note ont pour domaine</u> $\mathfrak{X}$. Ce domaine est beaucoup plus petit que celui qu'emploient Parthasarathy et Simha, mais il est dense dans Φ, et son utilisation sera très commode.

Une autre différence avec Parthasarathy-Simha est l'absence d'un espace de Hilbert initial. Celui-ci est indispensable dans les applications, mais il ne nous apporterait ici que des difficultés de notation, sans intérêt mathématique.

Un opérateur $H : \mathfrak{X} \to \Phi$ est dit <u>s-adapté</u> si pour tout u on a

$$H\varepsilon(u_{s]}) \in \Phi_{s]} \ , \quad H\varepsilon(u) = (H\varepsilon(u_{s]}))\varepsilon(u_{[s}) \ .$$

Cette dernière expression contient un produit de variables aléatoires, et semble donc n'être pas intrinsèque sur l'espace de Fock. Mais il s'agit du produit ab d'un élément $a=H\varepsilon(u_{s]})$ de $\Phi_{s]}$ par un élément $b=\varepsilon(u_{[s})$ de $\Phi_{[s}$; dans ce cas, ab appartient toujours à Φ , et s'interprête sans référence à une interprétation probabiliste, comme image de $a\otimes b$ dans l'isomorphisme canonique de $\Phi_{s]}\otimes\Phi_{[s}$ sur Φ .

Parthasarathy et Simha n'imposent à leurs opérateurs aucune condition de continuité. Nous avons trouvé utile de toujours imposer que

$$(1) \qquad \forall u \ , \ \sup_{a\in\mathbb{R}} \|H\varepsilon(u_{a]})\| < \infty \ .$$

Pour un opérateur s-adapté, il suffit de vérifier cela pour $a\leqq s$.

Un <u>processus</u> (adapté) <u>d'opérateurs</u> est une famille (H_s), telle que H_s soit s-adapté pour tout s . En particulier, une <u>martingale</u> d'opérateurs est un processus (M_t) tel que $M_0=0$ (hypothèse simplificatrice) et que, pour s<t

$$(2) \qquad \forall u,v \quad < \varepsilon(v_{s]}), M_t\varepsilon(u_{s]}) > \; = \; < \varepsilon(v_{s]}), M_s\varepsilon(u_{s]}) > \ .$$

Nous renvoyons à [E] pour la définition des trois martingales fondamentales (a_t^-) (<u>annihilation</u>), (a_t^+) (<u>création</u>) , et (a_t°) (que nous appellerons désormais la martingale de <u>comptage</u>. A partir de ces trois processus, l'intégrale stochastique permet de définir les <u>martingales représentables</u>, de la forme ([E], p. V.6-9)

$$(3) \qquad M_t = \Sigma_\varepsilon \int_0^t H_r^\varepsilon da_r^\varepsilon = \Sigma_\varepsilon M_t^\varepsilon \qquad (\varepsilon = -,\circ,+)$$

où les trois processus adaptés (H_t^ε) satisfont à une hypothèse légèrement renforcée par rapport à celle de [E], dans l'esprit de (1)

$$(4) \qquad \sup_{a\in\mathbb{R}} \|H_t^\varepsilon\varepsilon(u_{a]})\| \leqq f(t,u)$$

fonction localement intégrable en t, dépendant du choix de u. Une telle condition assure que le processus (M_t) satisfait à (1).

II. EXPRESSION << EXPLICITE >> DES MARTINGALES REPRESENTABLES

Dans cette section, nous reprenons le thème de la page V.10 de [E], c'est à dire l'expression des i.s. d'opérateurs au moyen d'i.s. classiques. L'élément u de $L^2\cap L^\infty$ reste fixé, et il est inutile de le supposer étagé ; de même, les inégalités renforcées (4), (1) sont inutiles.

Nous gardons la notation (3), et nous posons pour abréger

(5) $\quad L_t = M_t\mathcal{E}(u_{t]})$, $'L_t^\varepsilon = M_t^\varepsilon\mathcal{E}(u_{t]})$, $K_t^\varepsilon = H_t^\varepsilon\mathcal{E}(u_{t]})$.

Nous nous proposons de montrer que <u>le processus ordinaire</u> (L_t) <u>est une semimartingale</u>, satisfaisant à une e.d.s. linéaire

(6) $$L_t = \int_0^t u_rL_rdB_r + \int_0^t u_rK_r^-dr + (u_rK_r^\circ+K_r^+)dB_r \quad .$$

Tout cela a lieu dans l'interprétation brownienne, mais nous verrons en fait que la même propriété reste vraie dans toutes les interprétations probabilistes (le sens de cette phrase sera expliqué plus loin), et que l'é.d.s. (6) est <u>intrinsèque</u> sur l'espace de Fock.

Cette section fournira des conditions nécessaires pour que (M_t) soit représentables. Dans la section III, nous verrons qu'un très léger renforcement de ces conditions dans l'esprit de (1), (4), les rend aussi suffisantes.

L'équation (6) étant linéaire, il suffit de traiter séparément les trois termes de la représentation.

a) Nous commençons par le cas d'une martingale d'annihilation

$$M_t = \int_0^t H_r da_r^-$$

Alors, d'après la formule explicite (14) de [E], p. V.6,

$$M_t\mathcal{E}(u) = \int_0^t H_r\mathcal{E}(u)\ u_rdr \ .$$

Remplaçons u par $u_{t]}$, posons $\mathcal{E}(u_{t]})=U_t$. Nous avons en utilisant le produit de Wiener dans la dernière formule

$$L_t = M_t\mathcal{E}(u_{t]}) = \int_0^t H_r\mathcal{E}(u_{t]})u_rdr = U_t\int_0^t \frac{K_r}{U_r}\,dr$$

Transformant cela grâce à une intégration par parties, nous trouvons

(7) $$L_t = \int_0^t u_rL_rdB_r + \int_0^t u_rK_rdr \quad ,$$

qui est bien un cas particulier de (6).

b) Nous allons établir le caractère intrinsèque de l'équation (7) : de manière heuristique, on peut dire que le produit de Wiener, présent à la ligne précédente, a disparu de (7), parce que les seuls produits qui figurent dans (7) sont les << produits >> L_rdB_r d'éléments de $\Phi_{r]}$ par des éléments de $\Phi_{[r}$, qui sont intrinsèques.

La courbe (B_t) dans l'espace de Fock possède les propriétés suivantes

i) $B_0=0$; si $s\leq t$, $B_t-B_s\in\Phi_{[s,t]}$ (en particulier, $B_t\in\Phi_{t]}$)

ii) $<\mathbb{1},B_t-B_s> = 0$ (on en déduit $B_t-B_s \perp \Phi_s$)

iii) $\|B_t-B_s\|^2 = t-s$.

Cela permet, étant donnée une courbe adaptée (h_t) telle que $\int_0^t \|h_r\|^2 dr < \infty$ pour tout t, de définir une intégrale stochastique intrinsèque $\int_0^t h_r dB_r$ (ou $\int_0^t h_r \otimes dB_r$ si l'on préfère !) : la méthode est toujours celle d'Ito, commencer par une courbe étagée et prolonger par isométrie. Autrement dit, la structure de produit tensoriel continu de l'espace de Fock permet de définir de vraies intégrales stochastiques par rapport à la courbe (B_t) (et non pas seulement des i.s. $\int_0^t f(s)dB_s$ de fonctions déterministes). Cela donne un sens intrinsèque aux relations (6) ou (7). Quant à l'existence et l'unicité de la solution de (6) ou (7), considérées comme définissant L, nous ne nous en occupons pas, puisque nous avons à notre disposition la théorie des e.d.s. classiques - Mais cette théorie, probablement facile, mériterait d'être écrite dans le cas général d'espaces de Hilbert munis d'une structure de produit tensoriel continu sur $\mathbb{R}_+$.

c) Traitons ensuite le cas d'une i.s. de la forme

$$M_t = \int_0^t H_r dQ_r \qquad (Q_r = a_r^- + a_r^+)$$

Q_t est l'opérateur de multiplication de Wiener par B_t, et le calcul explicite est fait dans [E], page V.10 formule (27) :

$$L_t = \int_0^t u_r L_r dB_r + \int_0^t K_r (dB_r + u_r dr)$$

Ceci est le cas particulier de la formule (6) correspondant à $H_t^\circ = 0$, $H_t^+ = H_t^- = H_t$; ayant établi la formule (6) pour a^- et $a^- + a^+$, elle se trouve établie pour a^+ par différence.

d) Considérons le processus d'opérateurs

$$X_t = a_t^- + a_t^\circ + a_t^+ = Q_t + N_t \quad (\text{dans [E], } a_t^\circ \text{ s'appelle aussi } N_t)$$

D'après les résultats de Hudson-Parthasarathy reproduits dans [E], p. IV.20-22, il existe un isomorphisme entre Φ et un espace $L^2(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ portant un processus de Poisson compensé (ξ_t), à sauts unité et d'intensité 1, isomorphisme sous lequel

- $(\xi_\cdot)$ engendre la tribu $\underline{\underline{F}}$,
- le vecteur vide $\mathbb{1}$ devient la fonction 1,
- l'opérateur X_t devient l'opérateur de multiplication par ξ_t sur $L^2(\Omega)$.

Identifions Φ à $L^2(\Omega)$ par cet isomorphisme. La courbe $(\xi_t) = (X_t \mathbb{1})$ devient (comme $a_t^\circ \mathbb{1} = 0$) <u>la même courbe</u> (B_t) <u>que précédemment</u>, et les i.s. classiques d'une courbe adaptée (h_t) par rapport au processus de Poisson (ξ_t) - nous n'insistons pas ici sur le caractère prévisible du processus (h_t), comme nous l'avons maladroitement fait dans [E] -

se lisent à nouveau comme des i.s. intrinsèques sur l'espace de Fock, relatives à la courbe (B_t). D'après un calcul esquissé dans [E], p. V.10 formule (29), on a pour la martingale

$$M_t = \int_0^t H_r dX_r$$

en posant toujours $L_t=M_t\mathcal{E}(u_{t]})$, $K_t=H_t\mathcal{E}(u_{t]})$, l'é.d.s. de Poisson

(8) $$L_t = \int_0^t u_r L_r d\xi_r + \int_0^t K_r(d\xi_r+u_r d[\xi,\xi]_r)$$

(à vrai dire, je ne suis pas tout à fait content de la démonstration de [E] : mieux vaudrait vérifier à la main que (8) donne le bon résultat dans le cas étagé, et passer ensuite à la limite).

Comme (ξ_t) est un processus de Poisson compensé à sauts unité et d'intensité 1, on a $d[\xi,\xi]_s=d\xi_s+ds$. Revenant sur l'espace de Fock, on remplace $d\xi_s$ par dB_s, et on obtient le cas particulier de (6) correspondant à $H_t^-=H_t^\circ=H_t^+=H_t$. La formule relative à H° tout seul s'obtient alors par différence.

e) Le calcul précédent se généralise à toutes les interprétations probabilistes, en ce sens que la martingale fondamentale Y_t de [E], formule (L9) p. V.22 est toujours telle que $Y_t\mathbb{1}=B_t=a_t^+\mathbb{1}$: l'intégrale stochastique en dB_t de la formule (6) s'interprète toujours comme une i.s. classique par rapport à la martingale fondamentale de l'interprétation probabiliste, et le processus (L_t) est toujours une semimartingale, quelle que soit l'interprétation utilisée.

f) Revenons à (6) : nous allons en tirer un certain nombre de conséquences.

Les inégalités données dans [E], pages V.7-9, formules (17), (21), (24), nous donnent pour $s<t$

$$\|M_t\mathcal{E}(u_{s]})-M_s\mathcal{E}(u_{s]})\|^2 \leqq C(u)\int_s^t f(r,u)dr$$

où $f(.,u)$ est une fonction localement intégrable, dépendant de u . On peut faire entrer la constante $C(u)$ dans la fonction. Si les coefficients de la représentation H^ε satisfont à l'hyòthèse (1), on obtient sur la martingale une inégalité plus forte, de la forme

(9) $$\sup_{a\in\mathbb{R}} \|M_t\mathcal{E}(u_{a]})-M_s\mathcal{E}(u_{a]})\|^2 \leqq \int_s^t f(r,u)dr .$$

Pour $s=0$, on obtient une majoration de $\|M_t\mathcal{E}(u_{a]})\|$, uniforme pour $t\leqq t_o$ et a quelconque.

Considérons ensuite, pour $s<t$

$$M_t\mathcal{E}(u_{t]})-M_t\mathcal{E}(u_{s]}) = (M_t-M_s)\mathcal{E}(u_{t]}) - (M_t-M_s)\mathcal{E}(u_{s]}) + M_s(\mathcal{E}(u_{t]})-\mathcal{E}(u_{s]})).$$

Les deux premiers termes ont, d'après (9), une majoration de la forme

($\int_s^t f(r,u)dr$ $)^{1/2}$. Le dernier peut s'écrire $(M_s\mathcal{E}(u_{s]}))(\mathcal{E}(u_{[s,t]})-1)$; le premier facteur a une norme majorée d'après (9), le second une norme en $|t-s|^{1/2}$. Regroupant tout cela, on a ici encore une majoration de la forme

$$\|M_t\mathcal{E}(u_{t]})-M_t\mathcal{E}(u_{s]})\|^2 \leqq \int_s^t f(r,u)dr$$

et l'on peut d'ailleurs remplacer u par $u_{a]}$ sans modifier le second membre. Avec un peu plus de travail, on obtient

(10) $$\|M_t\mathcal{E}(u_{b]})-M_t\mathcal{E}(u_{a]})\|^2 \leqq \int_a^b f(r,u)dr \quad (\ a<b \text{ arbitraires }\ )$$

où l'on peut choisir une même fonction localement intégrable $f(.,u)$ pour tous les $t\leqq t_0$.

Les démonstrations de Parthasarathy-Sinha n'utilisent que des inégalités du type (9), pour la martingale M et la martingale M^* adjointe, et utilisent un continuel va et vient entre la représentation de M et celle de M^*, par passage à l'adjoint sur les coefficients de la représentation, qui se trouvent être bornés. Dans le cas non borné, il semble assez raisonnable de supposer que M admet un adjoint M^*, mais on ne voit pas comment s'assurer que les coefficients de la représentation, construits comme des dérivées de Radon-Nikodym, admettent des adjoints honnêtes. Nous utiliserons donc des hypothèses de nature différente, évitant tout passage à l'adjoint. Il resterait à comprendre la relation entre les deux types d'hypothèses, dans le cas borné.

g) Soit (h_t) une courbe adaptée dans l'espace de Fock, nulle en 0 et continue. Nous dirons que (h_t) est une <u>quasimartingale</u> si, pour tout intervalle borné $[s,t]$, le nombre

$$V_{s,t} = \sup_\tau \Sigma_i \|E_{r_i}(h_{r_{i+1}}-h_{r_i})\|$$

est fini ; ici $\tau=(s=r_0<r_1<\ldots<r_k=t)$ parcourt l'ensemble des subdivisions finies de $[s,t]$, et E_{r_i} est le projecteur sur Φ_{r_i} . La norme de l'espace de Fock est une norme L^2 sur l'espace de Wiener, plus grande que la norme L^1 : notre courbe est donc une quasimartingale brownienne classique, et nous n'avons besoin d'aucune théorie hilbertienne générale (qui doit bien exister quelque part, la notion ayant un sens sur tout espace de Hilbert muni d'une famille spectrale).

Que nous dit la théorie des quasimartingales browniennes ? D'abord, que la courbe (h_t) admet une décomposition dans L^1

$$h_t = a_t + m_t$$

en un processus à variation intégrable (sur tout intervalle fini) et une martingale. Le premier processus est donné par une limite faible dans L^1

$$a_t - a_s = \lim_{\tau} \ \Sigma_i \ E_{r_i}(h_{r_{i+1}} - h_{r_i})$$

Un argument de semi-continuité montre alors que $\|a_t - a_s\|_2 \leqq V_{s,t}$, et il en résulte que (a_t) est une courbe à variation finie au sens de la norme hilbertienne (on voit facilement que la convergence faible dans L^1 peut être remplacée par la convergence faible dans L^2, autrement dit dans l'espace de Fock). Comme a_t et h_t appartiennent à L^2, il en est de même de m_t par différence, et (m_t) est une courbe à accroissements orthogonaux dans l'espace de Fock, relativement à la filtration $(\Phi_{t]})$. Ici encore, il serait bon de savoir traiter ce genre de décompositions dans un cadre plus général.

Une inégalité du type

$$\| E_s(h_t - h_s)\| \leqq \int_s^t f(r)dr \quad (\text{où } f \text{ est localement intégrable})$$

entraîne pour la partie à variation finie a_t une représentation $\int_0^t \alpha_r dr$, avec $\|\alpha_r\| \leqq f(r)$ pour presque tout r .

Revenons alors à la formule (6) : nous avons pour $s \leqq t$

$$E_s(L_t - L_s) = E_s[\int_s^t u_r H_r^- \mathcal{E}(u_{r]})dr]$$

et, comme E_s diminue la norme

$$\|E_s(L_t - L_s)\| \leqq \int_s^t |u_r| \, \| H_r^- \mathcal{E}(u_{r]})\| \, dr$$

Ainsi, <u>la courbe</u> (L_r) <u>est une quasimartingale au sens précédent</u>.

III. EXISTENCE D'UNE REPRESENTATION : RECHERCHE DE H^+

Nous prenons maintenant le problème par l'autre bout : nous nous donnons une martingale d'opérateurs (M_t) , et nous faisons les deux hypothèses suivantes (pour tout u étagé, $s<t$)

$$(11) \qquad \sup_{a\in\mathbb{R}} \|M_t \mathcal{E}(u_{a]}) - M_s \mathcal{E}(u_{a]})\|^2 \leqq \int_s^t f(r,u)dr \ , \quad f \in L^1_{loc}$$

$$(12) \qquad \sup_{a\in\mathbb{R}} \|E_s(M_t \mathcal{E}(u_{t\wedge a]}) - M_s \mathcal{E}(u_{s\wedge a]}))\| \leqq \int_s^t g(r,u)dr \ , \quad g \in L^2_{loc} \ .$$

Cette inégalité se ramène d'ailleurs aisément à la forme plus simple

$$(12') \qquad \|E_a(M_t \mathcal{E}(u_{t]}) - M_a \mathcal{E}(u_{a]}))\| \leqq \int_a^t g(r,u)dr \qquad (a \leqq t) \ .$$

Nous allons montrer que ces conditions sont aussi <u>suffisantes</u> pour que M soit représentable - mais nous devons rappeler aussi que nous travaillons sur une très petite classe de vecteurs cohérents : le problème traité ici est bien plus simple que celui de Parthasarathy-Simha.

Nous commencerons par extraire le coefficient H^+, ce qui n'exigera que des conditions du type (11) (dans l'approche de P-S, en appliquant ce résultat à M^* et en repassant à l'adjoint, on obtiendrait H^- aussi).

Pour tout a, considérons la martingale brownienne ordinaire

$$\lambda_t^a = \begin{cases} M_t\mathcal{E}(u_{a]})-M_a\mathcal{E}(u_{a]}) & \text{si } t\geqq a \\ 0 & \text{si } t\leqq a \end{cases}$$

Elle admet une représentation classique en i.s.

$$\lambda_t^a = \int_0^t \xi_r^a(u)dB_r \qquad \text{avec} \quad \xi_r^a(u)=0 \text{ si } r\leqq a$$

(en fait, $\xi_r^a(u)$ ne dépend que de $u_{a]}$). Comme l'application $a\mapsto\lambda_t^a$ est continue en moyenne quadratique, un résultat ancien de C. Doléans (Publ. Inst. Stat. Paris 16, 1967, p.23-34), repris par Stricker et Yor (ZW 45, 1978, p. 109-134) permet de choisir une version de la fonction $\xi_r^a(\omega,u)$, mesurable par rapport à la tribu produit de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ (en a) par la tribu prévisible $\mathcal{P}$ (en (r,ω)). Nous avons d'après (11), pour $a\leqq s\leqq t$

$$\int_s^t \|\xi_r^a(u)\|^2\, dr = \|M_t\mathcal{E}(u_{a]})-M_s\mathcal{E}(u_{a]})\|^2 \leqq \int_s^t f(r,u)dr$$

et par conséquent $\|\xi_r^a(u)\|^2 \leqq f(r,u)$ pour presque tout $r\geqq a$. Comme rien ne nous empêche de remplacer ξ_r^a par 0 pour les mauvais r, nous pouvons supposer cette inégalité vérifiée partout. Soient $a<b<t$; nous avons

$$M_t\mathcal{E}(u_{a]})-M_b\mathcal{E}(u_{a]}) = \int_b^t \xi_r^a(u)dB_r$$

mais aussi

$$M_t\mathcal{E}(u_{a]})-M_b\mathcal{E}(u_{a]}) = M_t\mathcal{E}(u_{a]b]})-M_b\mathcal{E}(u_{a]b]}) = \int_b^t \xi_r^b(u_{a]})dB_r \quad .$$

D'après l'unicité de la représentation en i.s. browniennes, on a

(13) pour $a<b$ fixés, $\xi_r^a(u)=\xi_r^b(u_{a]})$ p.s. pour presque tout $r>b$.

Appliquant le théorème de Fubini, on voit que pour tout a fixé

(13') pour presque tout $r>a$, on a $\xi_r^a(u)=\xi_r^b(u_{a]})$ p.s. pour presque tout $b\in]a,r[$

Nous utilisons alors la topologie essentielle (Cf. Dellacherie-Meyer, Probabilités et Potentiel, IV.36-39), qui ignore les ensembles de mesure nulle au sens de Lebesgue : nous posons pour $r>0$

(14) $\quad \xi_r(u) = \operatorname{liminfess}_{\varepsilon\downarrow 0} (\xi_r^{r-\varepsilon}(u))^+ - \operatorname{liminfess}_{\varepsilon\downarrow 0} (\xi_r^{r-\varepsilon}(u))^-$

Cela définit un processus mesurable adapté. Comme $\|\xi_r^a(u)^\pm\|^2 \leqq f(r,u)$, un lemme de Fatou nous donne $\|\xi_r(u)\|^2\leqq 2f(r,u)$. En particulier, ξ_r est un élément de Φ .

D'après (13') on a pour tout a et presque tout $r>a$

$$\xi_r^{r-\varepsilon}(u_{a]}) = \xi_r^a(u) \quad \text{pour presque tout } \varepsilon\in]0,r-a[$$

et par conséquent, en passant à la limite

$$\xi_r(u_{a]}) = \xi_r^a(u) \quad \text{pour presque tout } r>a$$

Nous avons donc aussi

$$M_t\mathcal{E}(u_{a]}) - M_s\mathcal{E}(u_{a]}) = \int_s^t \xi_r(u)dB_r$$

Nous posons enfin

$$H_t^+\mathcal{E}(u) = \xi_t(u_{t]})\mathcal{E}(u_{[t}) \; .$$

Nous obtenons ainsi un processus adapté, satisfaisant à la condition (1), car $\|H_t^+\mathcal{E}(u_{a]})\| \leqq f(t,u)\exp(\|u\|^2)$ pour tout a . Cette majoration permet aussi de définir l'i.s.

$$M_t^+ = \int_0^t H_r^+ da_r^+ \quad ,$$

et la martingale $M_t^! = M_t - M_t^+$ satisfait aux conditions (11), (12), et de plus à la condition

(15) $L_t^! = M_t^!\mathcal{E}(u_{t]})$ <u>est constante sur tout intervalle où</u> u <u>s'annule</u>.

IV. RECHERCHE DE H^- ET H°

Nous enlevons le ', et ajoutons désormais (15) à nos hypothèses sur M .

D'après les remarques faites plus haut sur les quasimartingales, la condition (12) entraîne pour le processus $L_t = M_t\mathcal{E}(u_{t]})$ une représentation

(16) $$L_t = \int_0^t \alpha_r(u)dr + m_t \quad (\text{ } m_. \text{ martingale ordinaire }),$$

avec des majorations de la forme

$$\| \int_s^t \alpha_r(u_{a]})\, dr\| \leqq \int_s^t g(r,u)dr \qquad \text{pour tout a}$$

où $g(.,u)$ est localement dans L^2. D'après l'hypothèse (15), on a $\alpha_.(u)=0$ dans tout intervalle où $u=0$. Comme u est étagée, elle est bornée inférieurement dans l'ensemble $\{u\neq 0\}$, et l'on peut définir

$$\xi_r(u) = \frac{1}{u(r)}\alpha_r(u) \qquad (\ 0/0=0\ )$$

Rien n'empêche de choisir une version mesurable de $\alpha_.(u)$, adaptée ou même prévisible, telle que l'on ait $\|\alpha_r(u)\| \leqq g(r,u)$ pour tout r, identiquement nulle dans l'ensemble $\{u=0\}$ - de sorte que la fonction $\xi_.(u)$ définie ci-dessus satisfait à

$$\| \xi_r(u)\| \leqq \frac{1}{C(u)}g(r,u)$$

C(u) étant la borne inférieure de $|u|$ dans $\{u\neq 0\}$, strictement positive du fait que u est étagée. On peut alors prendre

$$H_r^-\mathcal{E}(u) = \xi_r(u)\mathcal{E}(u_{[r})$$

ce qui définit (en prolongeant par linéarité) un processus adapté d'opérateurs, permettant de définir une intégrale stochastique $M_t^- = \int_0^t H_r^- da_r^-$ telle que la martingale $M_t^! = M_t - M_t$ ne possède plus de terme d'annihilation, i.e.

(17) pour tout u, $L'_t = M'_t\mathcal{E}(u_{t]})$ est une martingale.

Tout cela est très simple, mais malheureusement nous avons oublié la condition (1) pour notre processus H^- , autrement dit nous voulons majorer à la fois tous les $\|\xi_r(u_{a]})\|$. Ce ne sont pas les constantes $C(u_{a]})$ qui vont nous gêner, mais il faut arriver à majorer $\|\alpha_r(u_{a]})\|$ par $g(r,u)$ uniformément en a . La méthode est analogue à celle que l'on a utilisée pour H^+ : construire une version de $\xi^a_r(u)=\xi_r(u_{a]})$ mesurable en (a,r,ω), et définir la bonne version de $\xi_r(u)$ par un procédé de limites essentielles. Nous ne donnerons pas les détails.

Alors la martingale (M'_t) de (17) satisfait encore à (11), (12), (15). A nouveau nous enlevons les ', et nous écrivons

$$L_t = M_t\mathcal{E}(u_{t]}) = \int_0^t \beta_s(u)dB_s$$

$$\xi^a_r = \frac{1}{u(r)}\beta_r(u_{a]}) - M_t\mathcal{E}(u_{t\wedge a]})$$

nous régularisons les ξ^a_r comme pour H^+, et nous posons[1]

$$H^\circ_r\mathcal{E}(u) = \xi_r(u_{r]})\mathcal{E}(u_{[r})$$

$$M^\circ_t = \int_0^t H^\circ_r da^\circ_r \ , \ M'_t=M_t-M^\circ_t$$

D'après la formule (6) et la construction de M° nous avons pour $L'_t = M'_t\mathcal{E}(u_{t]})$

$$L'_t = \int_0^t u_r L'_r dB_r \quad , \quad L'_0=0$$

et cela entraîne que $L'=0$: donc nous avons établi que M est représentable.

REFERENCE

L'article cité de K.R. Parthasarathy et K.B. Sinha a pour titre : Stochastic integral representation of bounded quantum martingales in Fock space (Preprint, Indian Statistical Institute, New Delhi).

1. Nous passons rapidement sur les détails, et en particulier nous omettons les majorations, qui n'offrent aucun nouveau problème.