Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean-Lin Journé
Paul-André Meyer

Une martingale d'opérateurs bornés, non représentable en intégrale stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 313-316
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__313_0>

UNE MARTINGALE D'OPERATEURS BORNÉS, NON REPRESENTABLE EN INTEGRALE STOCHASTIQUE

par J.L. Journé et P.A. Meyer

Dans la théorie des martingales d'opérateurs sur l'espace du mouvement brownien (ou l'espace de Fock si l'on préfère), décrite dans les exposés IV et V des << éléments de probabilités quantiques >> de ce volume (abrégé en [EPQ] ci-dessous), le mouvement brownien scalaire est remplacé par le trio (a_t^ε) , $\varepsilon=-,\circ,+$ des processus d'annihilation, de jauge (ou de nombre) et de création. Hudson et Parthasarathy ont conjecturé l'existence d'un théorème de représentation des martingales analogue au théorème classique pour les martingales scalaires, et ont établi ce théorème (avec Lindsay) pour le cas particulier des martingales de Hilbert-Schmidt.

Cette note montre que la représentation est impossible en général pour les martingales bornées : le contre-exemple (dû au premier auteur) est ici présenté sous un aspect différent de la rédaction initiale : il apparaît que les martingales représentables possèdent une propriété de variation quadratique plus forte que les martingales bornées générales.

1. Les notations sont celles de [EPQ] : rappelons que le trio (a^-,a°,a^+) est noté $(A,\Lambda,A^\dagger)$ chez Hudson-Parthasarathy, et que les vecteurs cohérents (pour nous $\mathcal{E}(u)$ ou simplement $\mathcal{E}u$: ce sont les exponentielles stochastiques browniennes usuelles) sont notés chez eux $\psi(u)$.

Si u est un élément de $L^2(\mathbb{R}_+)$, u_t désigne $uI_{[0,t]}$, $u_{[t}$ désigne $uI_{[t,\infty[}$, plus rarement u_{st} désigne $uI_{[s,t]}$.

Soit M un opérateur borné ; son espérance conditionnelle M_t à l'instant t est un opérateur borné, qui agit sur les vecteur cohérents par

$$M_t\mathcal{E}u = (E_tM\mathcal{E}u_t)\,.\,\mathcal{E}(u_{[t})$$

E_t est l'opérateur d'espérance conditionnelle brownien usuel, que l'on applique à la v.a. $M\mathcal{E}u_t$, et le point . désigne un produit ordinaire de v.a.. On notera que $M_t\mathcal{E}u$ n'est pas $\mathcal{F}_t$-mesurable : du point de vue probabiliste, l'objet intéressant est le processus adapté $X_t=M_t\mathcal{E}u_t$.

Nous désignons par $C^{1/2}$ l'algèbre des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$, höldériennes d'exposant 1/2.

Nous commençons par un lemme très simple.

LEMME 1. Pour $u,v \in L^2 \cap L^\infty$, les fonctions scalaires

$$F(t) = < \mathcal{E}v, M_t \mathcal{E}u_t > = < \mathcal{E}v_t, M_t \mathcal{E}u_t >$$

$$G(t) = < \mathcal{E}v, M_t \mathcal{E}u >$$

appartiennent à $C^{1/2}$.

Dém. On a $\|\mathcal{E}u_t\|^2 = \exp(\|u_t\|^2)$ borné par $\exp(\|u\|^2)$, et pour $s<t$

$$\|\mathcal{E}u_t - \mathcal{E}u_s\|^2 = \|\mathcal{E}u_s\|^2 \ \|\mathcal{E}u_{st} - 1\|^2 = \exp(\|u_s\|^2)(\exp(\|u_{st}\|^2) - 1)$$

Comme u est bornée, le dernier facteur est majoré par $C|t-s|$. Donc la fonction $\mathcal{E}(u_t)$ appartient à l'espace $C^{1/2}$ (à valeurs hilbertiennes). Il en est de même de $M\mathcal{E}u_t$, et un raisonnement trivial de bilinéarité montre que F(t) appartient à $C^{1/2}$(scalaire). Quant à G(t), on l'écrit

$$<\mathcal{E}(v_t)\mathcal{E}(v_{[t}), (M_t \mathcal{E}(u_t))\mathcal{E}(u_{[t})> = F(t) <\mathcal{E}(v_{[t}), \mathcal{E}(u_{[t})>$$

Ce dernier facteur vaut $\exp(\int_t^\infty \bar{v}(s)u(s)ds)$: il est lipschitzien borné.

Le lemme 1 entraîne que le processus $X_t = M_t \mathcal{E}u_t$ est "scalairement à variation quadratique finie" . Pour les martingales représentables, on a une propriété plus forte.

LEMME 2. Pour $u \in L^2 \cap L^\infty$, et si la martingale est représentable, la fonction X_t est à variation quadratique finie (en norme).

Dém. Il suffit de regarder séparément les fonctions

$$X_t^\varepsilon = M_t^\varepsilon \mathcal{E}u_t \quad , \quad M_t^\varepsilon = \int_0^t H_s^\varepsilon da_s^\varepsilon$$

pour $\varepsilon = -, \circ, +$. Une variante des inégalités (17),(21),(24) de [EPQ], exposé V , nous donne pour $s<t$

$$\|M_t^\varepsilon \mathcal{E}u - M_s^\varepsilon \mathcal{E}u\|^2 \leqq C(u) \int_s^t \|H_r^\varepsilon \mathcal{E}u\|^2 \, dr$$

où C(u) ne dépend que des normes de u dans L^2 et L^∞. Nous avons ensuite

$$X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon = (M_t^\varepsilon \mathcal{E}u_t - M_s^\varepsilon \mathcal{E}u_t) + (M_s^\varepsilon \mathcal{E}u_t - M_s^\varepsilon \mathcal{E}u_s)$$

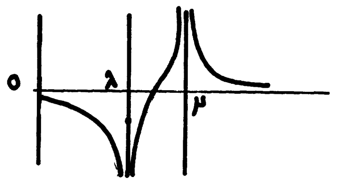
Le premier terme se majore par l'inégalité précédente, en remplaçant u par u_t . Pour majorer le second, on l'écrit $(M_s \mathcal{E}u_s)(\mathcal{E}u_{st} - 1)$, dont la norme a pour carré

$$\|M_s \mathcal{E}u_s\|^2 (\exp(\int_s^t |u_r|^2 dr) - 1)$$

Le premier facteur est borné, le second en C(t-s).

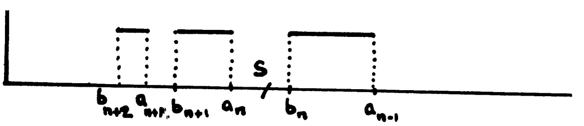
2. Nous allons maintenant construire une martingale bornée et un vecteur $u \in L^2 \cap L^\infty$ telle que X_t ne soit pas à variation quadratique finie. Nous prendrons pour M la seconde quantification $\Phi(H)$ d'une contraction H de $L^2(\mathbb{R}_+)$: dans ce cas, $M\mathcal{E}u_t = \mathcal{E}Hu_t$ et $M_t \mathcal{E}u_t = X_t$ vaut $\mathcal{E}((Hu_t)_t)$.

Nous prendrons pour H la restriction à $L^2(\mathbb{R}_+)$ de la transformation de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$ (autrement dit, pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, nous identifions f à un élément de $L^2(\mathbb{R})$ nul sur $\mathbb{R}_-$, nous prenons sa transformée de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et la restreignons à $\mathbb{R}_+$) ; la transformation de Hilbert étant unitaire, H est bien une contraction. Voici Hf lorsque f est une fonction caractéristique d'intervalle $[\lambda,\mu]$



$$Hf(s) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{s-\lambda}{s-\mu}\right| .$$

Nous prendrons pour u une fonction de la forme



avec $0 < \dots < a_n < b_n \dots < a_2 < b_2$, , $\lim_n b_n = \lim_n a_n = 0$;

u vaut 1 sur les intervalles $[b_3,a_2]$, $[b_4,a_3]$ $\dots [b_{n+1},a_n]\dots$ et 0 partout ailleurs. Les longueurs des intervalles sont

(1) $|a_2-b_2| = |a_2-b_3| = 1/2\log^2 2$ $\quad |a_n-b_n| = |a_n-b_{n+1}| = 1/n\log^2 n$.

Ces valeurs importent peu pour l'instant. Nous avons

$$\sum_n \|M_{b_n}\mathcal{E}u_{b_n} - M_{a_n}\mathcal{E}u_{a_n}\|^2 = \Sigma_n \|\mathcal{E}((Hu_{b_n})_{b_n}) - \mathcal{E}((Hu_{a_n})_{a_n})\|^2$$

Mais en fait $u_{b_n} = u_{a_n}$: on peut donc écrire le terme de droite

$$\|\mathcal{E}((Hu_{a_n})_{a_n})\|^2 \|\mathcal{E}((Hu_{a_n})_{a_n b_n}) - 1\|^2$$

Le premier facteur est supérieur à 1 : la convergence de la série de gauche (qui a lieu si M est représentable) entraîne donc celle de la série

$$\Sigma_n \left[\exp\left(\int_{a_n}^{b_n} |Hu_{a_n}(s)|^2 ds\right) - 1 \right]$$

des seconds facteurs, puis celle de la série

(2) $$\Sigma_n \int_{a_n}^{b_n} |Hu_{a_n}(s)|^2 ds \quad .$$

Lorsque s appartient à l'intervalle $]a_n,b_n[$ (figure ci-dessus), on a

$$Hu_{a_n}(s) = \frac{1}{\pi}\log \frac{s-b_{n+1}}{s-a_n}\frac{s-b_{n+2}}{s-a_{n+1}} \dots \geq \frac{1}{\pi}\log\frac{s-b_{n+1}}{s}$$

Nous sommes donc ramenés à montrer la divergence de

$$\Sigma_n \int_{a_n}^{b_n} (\log(s-b_{n+1}) - \log s)^2 ds$$

Comme logs appartient à $L^2([0,b_2])$, on peut négliger ce terme, et se limiter à établir la divergence de

$$\Sigma_n \int_{a_n}^{b_n} \log^2(s-b_{n+1})ds$$

que nous minorons encore par $(b_n-a_n)\log^2(a_n-b_{n+1})$, c'est à dire

$$\Sigma_n \log^2(n\log^2 n)/n\log^2 n = +\infty \quad .$$

La démonstration est achevée.