PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur l'existence de l'opérateur carré du champ

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 30-33
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__30_0>

SUR L'EXISTENCE DE L'OPERATEUR CARRÉ DU CHAMP

par P.A. Meyer

1. Soit (P_t) un semi-groupe de Markov droit sur un espace d'états E. Nous introduisons sa réalisation continue à droite canonique $(\Omega, X_t, P^\mu, (\mathcal{F}_t^\mu), \mathcal{F}^\mu, \dots\dots \theta_t)$ toute la litanie habituelle : seule la durée de vie ζ n'y est pas, car on ne perd aucune généralité à supposer tout de suite le semi-groupe markovien.

On se propose de trouver une condition analytique entraînant la propriété suivante, de nature probabiliste :

Pour toute loi μ, toute martingale (M_t) de carré intégrable sur l'espace probabilisé $(\Omega,(\mathcal{F}_t^\mu),P^\mu)$ - qui satisfait aux conditions habituelles - le crochet oblique $d\langle M,M\rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt.

Ce problème est étudié dans le Sém. Prob. X, LN in M. 511, p.143-146 et 162-163. Le résultat fondamental, dû pour l'essentiel à Kunita, nous dit que la propriété ci-dessus a lieu si et seulement si le domaine étendu du générateur L de (P_t) est une algèbre, ce qui permet de définir un opérateur carré du champ pour le semi-groupe ($\Gamma(f,g) = L(fg)-fLg-gLf$).

Le domaine étendu étant inaccessible dans sa totalité, cette condition analytique est inutilisable : il faut la remplacer par l'existence d'une algèbre suffisamment riche Λ contenue dans le domaine. Et c'est ici que la réponse donnée par le Sém. Prob. X p. 163 est insuffisante : il est exigé que l'algèbre Λ soit stable par la résolvante, condition très gênante.

Nous nous proposons dans cette note de lever cette restriction.

2. Soit f une fonction bornée, universellement mesurable sur E. Nous disons que f appartient au domaine étendu du générateur L, et que $Lf=g$, si

i) pour tout $p>0$ la fonction $U_p(|g|)$ est finie ($U_p=\int_0^\infty e^{-ps}P_s ds$)

ii) on a $f=U_p(pf-g)$ pour tout $p>0$ (on pose alors $Lf=g$).

Le processus

$$C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)ds \tag{1}$$

est alors une martingale càdlàg., sous toute loi P^x. L'intégrale stochastique $\int_0^t e^{-ps}dC_s^f$ s'écrit

$$C_t^{f,p} = e^{-pt}f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t e^{-ps}(g-pf)\circ X_s\, ds . \tag{2}$$

Voici le lemme principal de Kunita (Sém. Prob. X, p. 144 ; nous ne donnerons pas de démonstration, celle-ci étant à peu près classique)

THEOREME 1. Soit f appartenant au domaine étendu de L. Pour que f^2 appartienne au domaine étendu de L, il faut et il suffit que le crochet $d\langle C^f, C^f\rangle_t$ soit absolument continu par rapport à dt .

3. Soit Λ une partie du domaine-L^{∞} de L : autrement dit, pour toute $f\in\Lambda$, f appartient au domaine étendu, et de plus $g=Lf$ est bornée (cette hypothèse sera discutée à la fin de la note). Nous dirons que Λ est pleine si

(3) la seule mesure signée bornée λ, ne chargeant pas les ensembles de potentiel nul, orthogonale aux $(pI-L)f$ ($f\in\Lambda$, $p>0$) est la mesure 0.

L'orthogonalité à $(pI-L)f$ pour tous les p signifie que λ est orthogonale à f et Lf : la condition est donc une sorte de propriété de densité faible de $\Lambda\cup L\Lambda$ dans L^{∞} . En pratique, on vérifiera la propriété pour Λ, et en omettant la condition sur les ensembles de potentiel nul. Si Λ est une algèbre engendrant la tribu borélienne, par exemple, le tour est joué.

4. Voici le résultat essentiel de cette note : c'est une extension du théorème fondamental de Kunita-Watanabe sur les espaces stables de fonctionnelles additives d'un processus de Markov. Il est tout à fait satisfaisant que la démonstration repose sur l'équivalence (représentation prévisible) <=> (extrémalité) due à Jacod-Yor (cf. Yor, Sém. Prob. XII, LN 649, p. 264-309), l'un des plus jolis résultats de la théorie.

THEOREME 2. Soit Λ une partie pleine du domaine de L . Le sous-espace stable engendré, sous la loi P^x, par les martingales C^f pour $f\in\Lambda$, contient toutes les martingales locales nulles en 0.

Démonstration. Le théorème de Jacod-Yor nous ramène à la vérification de l'extrémalité de la loi P^x dans l'ensemble des lois de probabilité pour lesquelles $X_0=x$ p.s., et les processus (C^f_t), $f\in\Lambda$ - processus qui sont uniformément bornés sur tout intervalle fini $[0,t]$ - sont des martingales. Mieux : on se ramène trivialement à vérifier l'extrémalité dans l'ensemble des lois satisfaisant à cette condition, et absolument continues par rapport à P^x. Nous allons prouver

La seule loi $Q\ll P^x$, sous laquelle les C^f sont des martingales pour $f\in\Lambda$, est égale à P^x.

Pour la clarté de la démonstration, nous commençons par oublier dans (3) le membre de phrase << ne chargeant pas les ensembles de potentiel nul >>. Soient $s>0$, $A\in\mathcal{F}_s$. Nous voulons établir que sous la loi Q, on a pour tout t et toute fonction continue bornée j sur E

(4) $\quad E[I_A\, j(X_{s+t})] = E[I_A\, P_t(X_s,j)$ (espérances sous la loi Q)

Cela entraînera en effet que le processus X est markovien sous la loi Q, avec le même semi-groupe et la même loi initiale ε_x que sous la loi P^x, d'où l'identité des deux lois.

Comme d'habitude, il suffit d'établir l'égalité des transformées de Laplace :

$$E[I_A(\int_s^\infty j(X_u)e^{-pu}du - e^{-ps}U_pj(X_s)] = 0 .$$

Désignons par $\lambda_s(j)$ cette expression : λ_s est une mesure signée bornée, et pour vérifier qu'elle est nulle, il suffit de vérifier (d'après (3)) que $\lambda_s(pf-Lf)=0$ si $f\in\Lambda$. Or ceci exprime précisément que $C^{f,p}$ est une martingale sous la loi Q - et $C^{f,p}$ est une intégrale stochastique par rapport à C^f, bornée sur tout intervalle fini.

Lorsqu'on utilise l'hypothèse (3) sous la forme un peu plus faible indiquée, on procède ainsi : la loi Q étant absolument continue par rapport à P^x, le processus $U_pj(X_s)$ est continu à droite sous la loi Q . Le raisonnement précédent ne démontre plus que la mesure λ_s est nulle, mais il le démontre encore pour la mesure $\int_0^h \lambda_{s+u}du$, qui ne charge pas les ensembles de potentiel nul. D'autre part, on a

$$\lambda_s(j) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \lambda_{s+u}(j)du = 0 .$$

5. Nous appliquons ce résultat à l'existence de l'opérateur carré du champ.

THEOREME 3. <u>Supposons qu'il existe dans le domaine</u>-L^∞ <u>une partie pleine</u> Λ , <u>telle que pour tout</u> $f\in\Lambda$ <u>le crochet</u> $d\langle C^f,C^f\rangle_t$ <u>soit absolument continu par rapport à</u> dt . <u>Alors le semi-groupe admet un opérateur carré du champ</u>.

<u>Démonstration</u>. Nous nous plaçons d'abord sous une loi P^x. L'ensemble $\mathcal{L}$ des martingales locales M telles que $H{\cdot}M=0$ pour tout processus prévisible H, borné et négligeable pour la mesure $dP^x{\times}dt$, est évidemment un sous-espace stable. Les éléments de $\mathcal{L}$ qui sont localement de carré intégrable sont exactement ceux dont le crochet est absolument continu.

D'après le théorème précédent, l'existence d'une partie pleine satisfaisant à l'énoncé entraîne que $\mathcal{L}$ contient toutes les martingales locales. En particulier, il contient toutes les martingales C^f, $C^{f,p}$, f appartenant au domaine étendu. Appliquant le théorème 1, on voit que le domaine étendu est une algèbre, et l'on est ramené au théorème de Kunita. Il serait d'ailleurs assez facile de démontrer le théorème de Kunita lui même à partir du théorème 2, sans avoir à se rattacher à une théorie préalable.

6. Nous terminons par quelques remarques.

a) L'hypothèse de continuité absolue n'a pas été utilisée - en particulier, lorsque nous avons parlé du domaine-L^∞, la classe d'ensembles négligeables utilisée était celle des ensembles de potentiel nul.

b) Il est parfois nécessaire d'établir le théorème 2 ou 3 sans supposer les fonctions f ou Lf bornées pour $f\in\Lambda$. Sans vouloir donner d'énoncé formel, indiquons les **modifications** à apporter, aux hypothèses et à la démonstration.

- Les éléments de Λ sont maintenant assujettis aux conditions $U_p|f|<\infty$, $U_p(|Lf|) < \infty$, $f=U_p(pf-Lf)$. Il en résulte que les processus C^f, $C^{f,p}$ appartiennent à la classe (D) sur tout intervalle fini, sous les lois P^x.
- Dans la démonstration du théorème 2, ce qu'on cherche à établir est une propriété d'extrémalité, donc on peut supposer, non seulement que $Q<<P^x$, mais que Q est majorée par un multiple de P^x. Donc les processus C^f, $C^{f,p}$ sont des martingales de la classe (D) sous la loi Q, sur tout intervalle fini.

La mesure $\int_0^h \lambda_{s+u}du$ de la fin de la démonstration est majorée par un multiple de la mesure $\varepsilon_x U_p$, donc elle intègre $|f|+|Lf|$. On peut donc établir qu'elle est nulle en ajoutant dans l'hypothèse (3) que $pf-Lf$ soit λ-intégrable pour tout $p>0$, $f\in\Lambda$. Le passage à la limite à la fin ne fait plus intervenir $f\in\Lambda$, mais j continue bornée, et ne pose aucun problème nouveau.

Institut de Recherche Mathématique
Avancée, Université Louis-Pasteur
67084-Strasbourg Cedex

(laboratoire associé au CNRS)