SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLAS BOULEAU
FRANCIS HIRSCH

Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et applications aux équations différentielles stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 131-161
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__131_0>

PROPRIETES D'ABSOLUE CONTINUITE DANS LES ESPACES DE DIRICHLET ET APPLICATION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Nicolas BOULEAU et Francis HIRSCH

A lipschitzian functional calculus is valid in Dirichlet spaces for the Dirichlet form and its "carré du champ" operator ; this is proved for the univariate calculus in [B1] in the locally compact case and in [BH1] on general measurable spaces. Here we extend these results to a multivariate calculus in the case of the Dirichlet space of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup on the Wiener space. This is done by establishing a general density criterium for multivariate random variables : the "density property of the image of the energetic volume". The application to lipschitzian S.D.E. goes through a crucial factorisation lemma and leads us to three theorems on existence of densities for the laws of the solutions of S.D.E., including the uniformly degenerated case.

PRESENTATION

Nous ne rappellerons pas les éléments de la théorie des espaces de Dirichlet, pour lesquels nous renvoyons à [D1] et [F2] dans le cas localement compact, à [K1] dans le cas d'un espace de Banach avec des hypothèses généralisant l'espace de Wiener, et à [BH1] dans le cas d'un espace mesurable général.

Soulignons simplement qu'un espace de Dirichlet est un cadre plus général que ceux dans lesquels on étudie usuellement les fonctions sur l'espace d'état d'un processus de Markov, ceci étant rendu possible par la symétrie du semigroupe. Les fonctions d'un espace de Dirichlet ne sont pas en général des semi-martingales sur les trajectoire du processus associé. Fukushima a montré [F2] qu'elles se décomposent en somme d'une martingale et d'un processus d'énergie nulle, et a établi un calcul fonctionnel de classe C^1 (dans le cas d'un espace de Dirichlet régulier et local sur un espace localement compact) pour la partie martingale continue, ce qui est une façon de retrouver le calcul fonctionnel de classe C^1 établi par Le Jan [L1] pour l'énergie locale et l'opérateur carré du champ s'il existe.

Lorsqu'on fait opérer des fonctions d'une seule variable le calcul fonctionnel peut être étendu (propriété de densité de l'énergie-image) aux fonctions (localement) lipschitziennes (qui contiennent les différences de convexes) et ceci même dans le cadre général d'un espace d'état mesurable. C'est ce qui est fait en [BH1] où des conséquences en sont tirées pour les E.D.S. unidimensionnelles en particularisant l'étude au semi-groupe d'O.U. sur l'espace de Wiener. Mais le cas univarié est facilité par des propriétés particulières (la continuité des contractions notamment [A1]) et nous émettions en [BH1] la conjecture suivante :

Si $f = (f_1,\dots,f_n)$ est un n-uplet de fonctions dans l'espace de Dirichlet $\mathbb{D}$ sur l'espace mesuré (Ω,F,m) pourvu d'un opérateur carré du champ Γ, l'image par f de la mesure $\text{dét}[\Gamma(f_i,f_j)]_{1\le i,j\le n}\cdot m$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Nous démontrons ici cette conjecture dans le cas particulier de la forme de Dirichlet associée au semi-groupe d'O.U. sur l'espace de Wiener. Ceci donne l'absolue continuité de la loi d'un variable aléatoire vectorielle sous des hypothèses plus faibles que celles utilisées jusqu'à présent dans le calcul de Malliavin [M1] pour l'étude des E.D.S. (hypothèses A1 et A2 de [W1]) et même que celles utilisées récemment par Nualart et Zakaï [NZ1.section 5]. La démarche est d'utiliser la représentation de l'opérateur carré du champ comme somme de carrés de dérivées partielles [M2] pour se ramener à des résultats en dimension finie tels qu'exposés par Federer [F1]. Le critère d'absolue continuité et le calcul fonctionnel lipschitzien sont appliqués ici aux E.D.S. de type markovien avec des coefficients de diffusion et de dérive lipschitziens en la variable d'espace et mesurables en la variable de temps, c'est à dire sous les hypothèses classiques assurant l'existence et l'unicité des solutions. La méthode permet de dire quelque chose dans le cas uniformément dégénéré, notamment que si X_t est une diffusion de dimension n dont le coefficient de diffussion a un rang qui n'est pas inférieur à $k<n$, alors la projection de X_t sur presque tout sous-espace de dimension k a une loi absolument continue, le presque tout étant au sens de la probabilité invariante sur la grassmannienne d'indice k. Nous remercions D. LAMBERTON pour sa contribution décisive à ce résultat.

Le plan de l'étude est le suivant :

I - Cas fini-dimensionnel

II - Critère d'absolue continuité en dimension infinie

III - Lien avec les formes de Dirichlet générales

IV - Forme associée au semi-groupe d'O.U. sur l'espace de Wiener

V - Application aux équations différentielles stochastiques

VI - Conséquence du critère et de la relation fondamentale

Les principaux résultats ont été annoncés dans [BH2].

I - CAS FINI-DIMENSIONNEL

Nous donnons dans cette partie, les résultats sur les fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, qui nous seront utiles. Ils sont tirés de [F1]. On désigne par λ^n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

A. Soit f une fonction Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. f est dite approximativement dérivable en $a \in \mathbb{R}$, de dérivée approximative égale à b si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \lambda^1 \{x \in [a-\eta, a+\eta] \; ; \; |f(x)-f(a)-(x-a)b| > \varepsilon |x-a|\} = 0$$

On note alors $b = \mathrm{apf}'(a)$.

Une conséqence immédiate de la définition est :

Si il existe $\tilde{f}$ tel que $f = \tilde{f}$ λ^1-pp et si $\tilde{f}$ est dérivable λ^1-pp, alors f est approximativement dérivable λ^1-pp et

$$\mathrm{apf}' = \tilde{f}' \quad \lambda^1\text{-pp}.$$

B. De même, si f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, on peut, en considérant les restrictions de f aux parallèles aux axes de coordonnées, définir $ap \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $ap\ \overrightarrow{grad}\ f = (ap \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, ap \dfrac{\partial f}{\partial x_m})$.

. Si f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, et si $m \leq n$, on pose

$$apJ_n f = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda(n,m)} \left[\det \left[ap \frac{\partial f_i}{\partial x_{\lambda(j)}} \right]_{1 \leq i,j \leq n} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

où $\Lambda(n,m)$ désigne l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{1,2,\dots,m\}$.

. Il résulte alors des théorèmes 3.1.4, 3.1.8, 3.2.3, 3.2.11 de [Fl] le théorème suivant

<u>Théorème</u> . <u>Soit</u> $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>une fonction Lebesgue-mesurable</u>.

<u>On suppose</u> $m \geq n$ <u>et</u>

$$\forall 1 \leq j \leq m \quad \forall 1 \leq i \leq n \qquad ap \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \ \underline{\text{est défini}}\ \lambda^m - \text{p.p.}$$

<u>Il existe alors un ensemble</u> A <u>de</u> $\mathbb{R}^m$ <u>de complémentaire</u> λ^m-<u>négligeable tel que</u>, <u>pour toute partie</u> B <u>mesurable de</u> $\mathbb{R}^m$,

$$\int_B apJ_n f(x)\, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}\left[A \cap B \cap f^{-1}(\{y\})\right] d\lambda^n(y)$$

<u>où</u> $\mathcal{H}^{m-n}$ <u>désigne la mesure de Haussdorff m-ndimensionnelle</u>.

C. On déduit immédiatement du théorème le corollaire suivant :

<u>Corollaire</u> : <u>Soient</u> m <u>et</u> n <u>deux entiers non nuls quelconques et</u> f <u>une fonction</u> <u>Lebesgue-mesurable de</u> $\mathbb{R}^m$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$.

<u>On suppose</u>

$$\forall 1 \leq j \leq m \qquad \forall 1 \leq i \leq n \ , \ ap \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \ \underline{\text{est défini}}\ \lambda^m - \text{pp.}$$

<u>Alors, pour toute partie</u> B λ^n-<u>négligeable de</u> $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{f^{-1}(B)} \det\left[\langle \text{ap } \overrightarrow{\text{grad}} f_i, \text{ ap } \overrightarrow{\text{grad}} f_j\rangle\right]_{1\leq i,j\leq n} d\lambda^m = 0$$

<u>où</u> $\langle\ ,\ \rangle$ <u>désigne le produit scalaire canonique de</u> $\mathbb{R}^m$.

Le résultat est en effet évident si $m < n$ car le déterminant considéré est identiquement nul. Si $m \geq n$, le déterminant est nul en un point si et seulement si $\text{ap}J_n f$ est nul en ce point. Il suffit donc d'appliquer le théorème précédant en remplaçant B par $f^{-1}(B)$.

II - <u>CRITERE D'ABSOLUE CONTINUITE EN DIMENSION INFINIE</u>

A . Dans ce premier paragraphe nous donnons les hypothèses, définitions et notations valables pour toute la suite. Elles ont inspirées de [Kl].

. On considère un espace de Fréchet séparable réel Ω, muni de sa tribu borélienne F^o et d'une mesure de probabilité m. Pour tout y de Ω, on note τ_y la translation $x \in \Omega \longrightarrow x+y \in \Omega$. τ_y agit aussi sur les mesures.

. Un élément de ξ de Ω sera dit <u>admissible</u> si, $\xi \neq 0$ et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\tau_{t\xi}m$ est absolument continue par rapport à m (pour pour t, $\tau_{t\xi}m$ est alors équivalente à m).

. Pour $\xi \in \Omega$, $\xi \neq 0$, on note σ_ξ la mesure

$$\int_{\mathbb{R}} \tau_{t\xi} m \ dt.$$

σ_ξ est une mesure borélienne σ-finie et finie sur les compacts (en effet, si $\varphi \in \Omega'$ (dual topologique de Ω) et $\varphi(\xi) = 1$, $\sigma_\xi(\varphi^{-1}([-n,n]) = 2n)$.

Si ξ est admissible, σ_ξ est évidemment équivalente à m ; on notera alors k_ξ un représentant borélien, strictement positif en tout point, de la densité $\dfrac{dm}{d\sigma_\xi}$, et on a

$(^*)$ $\forall\varphi$ borélienne ≥ 0 $\qquad \displaystyle\int \varphi(\omega)dm(\omega) = \iint \varphi(\omega+t\xi)\ k_\xi(\omega+t\xi)\ dm(\omega)dt$.

. Pour ξ dans Ω, on note D_ξ l'ensemble des fonctions boréliennes u de Ω dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe une fonction borélienne $\tilde{u}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ (appelée dans la suite associée à u) vérifiant

$$u = \tilde{u} \text{ m-pp et } \forall \omega \in \Omega \quad t \longrightarrow \tilde{u}(\omega + t\xi)$$

est une fonction absolument continue sur (tout intervalle compact de) $\mathbb{R}$. Il est évident que si $u \in D_\xi$, toute fonction égale m-pp à u est aussi dans D_ξ (avec même fonction associée).

On pourra donc aussi considérer les éléments de D_ξ comme des classes.

B . On suppose, dans ce paragraphe, que ξ est un élément admisible.

Nous allons définir, dans la proposition suivante, la "dérivée directionnelle" $\nabla_\xi u$ d'un élément u de D_ξ.

Proposition 1 : Si u appartient à D_ξ , $t^{-1}[u\circ\tau_{t\xi} - u]$ converge en probabilité quand t tend vers 0. On note $\nabla_\xi u$ cette limite ($\nabla_\xi u$ est donc une classe qui ne dépend que de la classe de u). Si $\tilde{u}$ est associée à u, on a

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} [\tilde{u}(\omega + t\xi) - \tilde{u}(\omega)] = \nabla_\xi u(\omega) \quad \text{m-pp} .$$

Preuve : Soit u dans D_ξ et $\tilde{u}$ associée à u. On pose

$$\Delta = \left\{\omega \;;\; \lim_{t\to 0} t^{-1} [\tilde{u}(\omega + t\xi) - \tilde{u}(\omega)] \text{ existe}\right\}$$

Par continuité de l'application $t \longrightarrow \tilde{u}(\omega + t\xi)$ pour tout ω, il est facile de voir que Δ est un borélien.

D'autre part, pour tout ω, $\omega + s\xi \in \Delta$ pour presque tout s (relativement à λ^1).

Il résulte alors de (*), ξ étant admissible, que $m(\Delta) = 1$.

Donc $t^{-1}[\tilde{u}\circ\tau_{t\xi} - \tilde{u}]$ converge presque partout et donc en probabilité quand t tend vers 0. On en déduit la proposition.

Remarque : Si u appartient à D_ξ et $\tilde{u}$ est associé à u, on peut définir un représentant de $\nabla_\xi u$ en posant

$$\forall\omega \qquad \nabla_\xi u(\omega) = \liminf_{t \longrightarrow 0} t^{-1}[\tilde{u}(\omega + t\xi) - \tilde{u}(\omega)].$$

Pour un tel représentant on a

$$\forall\omega \qquad \nabla_\xi u(\omega + t\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(\omega + t\xi) \quad d\lambda^1(t) - pp$$

(où $\dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(\omega + t\xi)$ désigne $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}[\tilde{u}(\omega + (t+h)\xi) - \tilde{u}(\omega + t\xi)]$ lorsque la limite existe).

Dans les raisonnements et expressions qui suivent, on supposera toujours que c'est ce représentant qui est choisi.

<u>**Proposition 2**</u> : <u>Si</u> u <u>appartient à</u> D_ξ , <u>pour m-presque tout</u> ω, $t \longrightarrow u(\omega + t\xi)$ <u>admet en</u> λ^1<u>-presque tout</u> t <u>une dérivée approximative égale à</u> $\nabla_\xi u(\omega + t\xi)$.

<u>**Preuve**</u> : Soit $\tilde{u}$ associé à u. D'après (*)

$$\iint |u(\omega + t\xi) - \tilde{u}(\omega + t\xi)| \, k_\xi(\omega + t\xi)\, dm(\omega)\, dt = 0 .$$

Donc il existe un borélien Ω_o avec $m(\Omega_o) = 1$ et

$$\forall\omega \in \Omega_o \qquad \int |u(\omega + t\xi) - \tilde{u}(\omega + t\xi)| k_\xi(\omega + t\xi)\, dt = 0 .$$

Ainsi

$$\forall\omega \in \Omega_o \qquad u(\omega + t\xi) = \tilde{u}(\omega + t\xi) \qquad d\lambda_1(t) - pp .$$

Comme $t \longrightarrow \tilde{u}(\omega + t\xi)$ est dérivable $d\lambda^1(t)$ - pp de dérivée $\nabla_\xi u(\omega + t\xi)$, le résultat découle de la remarque de I.A.

C. On considére maintenant $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite (éventuellement finie) d'éléments admissibles et on pose

$$D = \left\{ u \in \bigcap_{n\geq 1} D_{\xi_n} \; ; \sum_{n\geq 1} (\nabla_{\xi_n} u)^2 \text{ fini m-pp} \right\} .$$

Pour u et v dans D, on pose

$$\Gamma(u,v) = \sum_{n\geq 1} \nabla_{\xi_n} u \; \nabla_{\xi_n} v .$$

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit ℓ un entier non nul et</u> $u = (u_1,\dots,u_\ell)$ <u>un élément de</u> D^ℓ . <u>Alors l'image par</u> u <u>de la mesure</u>

$$\text{dét } [\Gamma(u_i,u_j)]_{1\le i,j\le \ell}\, dm$$

<u>est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue</u> λ^ℓ.

<u>Preuve</u> : . Soit n un entier non nul et u un élément de D. D'après la proposition 2 précédente, il existe un borélien Ω_1 avec $m(\Omega_1) = 1$ et $\forall\omega \in \Omega_1$ $t \longrightarrow u(\omega + t\xi_1)$ approximativement dérivable $d\lambda^1(t)$ - pp de dérivée approximative $\nabla_{\xi_1} u(\omega + t\xi_1)$.

Si $t_2,\dots,t_n$ appartiennent à $\mathbb{R}$, $\{\omega \,;\, \omega + t_2\xi_2 +\dots+ t_n\xi_n \notin \Omega_1\}$ est m-négligable.

Donc

$\forall t_2,\dots, t_n \in \mathbb{R}$, pour m-presque tout ω,

$\text{ap}\dfrac{\partial}{\partial t_1}[u(\omega + t_1\xi_1 +\dots+ t_n\xi_n)]$ existe $d\lambda^1(t_1)$ - pp et vaut $\nabla_{\xi_1} u(\omega + t_1\xi_1+\dots+t_n\xi_n)$

Donc $\text{ap}\dfrac{\partial}{\partial t_1}[u(\omega +t.\xi)]$ existe $dm \times d\lambda^n$ - pp et par conséquent, pour m-presque tout ω, $\text{ap}\dfrac{\partial}{\partial t_1}[u(\omega + t.\xi)]$ existe $d\lambda^n$ - pp. et vaut $\nabla_{\xi_1} u(\omega +t.\xi)$. On obtient un résultat analogue pour les autres dérivées directionnelles.

. Soit maintenant $u = (u_1,\dots,u_\ell)$ un élément de D^ℓ et n un entier non nul. Appliquant ce qui précède et le Corollaire de I.C., on obtient, en posant

$$H_n u = \det\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla_{\xi_i} u_j \; \nabla_{\xi_i} u_k\right)\right]_{1\le j,k\le \ell} \quad :$$

Il existe un borélien Ω_0 avec $m(\Omega_0) = 1$ tel que, pour tout ω de Ω_0 et toute partie B λ^{ℓ}-négligeable de $\mathbb{R}^{\ell}$

$$\int 1_B \circ u(\omega + t.\xi)\ H_n u(\omega + t.\xi)\quad d\lambda^n(t) = 0 .$$

Il en résulte que, si B est λ^{ℓ}-négligeable,

$$\iint 1_B \circ u(\omega + t.\xi)\ H_n u(\omega + t.\xi)\ k_{\xi_1}(\omega + t_1\xi_1)\ dm(\omega)\ d\lambda^n(t) = 0$$

puis, utilisant (*) ,

$$\int\cdots\iint 1_B \circ u(\omega + \sum_{i=2}^{n} t_i\xi_i)\ H_n u(\omega + \sum_{i=2}^{n} t_i\xi_i)\ dm(\omega)\ dt_2\ldots dt_n = 0$$

D'après la positivité de l'expression sous l'intégrale on peut introduire $k_{\xi_2}(\omega + t_2\xi_2)$ puis réutiliser (*) etc...

Au bout de n opérations on obtient $\int 1_B \circ u\ \ H_n u\ dm = 0$.

Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini.

III - LIEN AVEC LES FORMES DE DIRICHLET GENERALES

A. Rappelons qu'on appelle <u>forme de Dirichlet</u> sur (Ω, F, m) une forme bilinéaire symétrique positive ((,)) définie sur un sous-espace dense $\mathbb{D}$ de $L^2(m)$, telle que

. la forme est fermée (i.e. $\mathbb{D}$ muni de la norme $||f|| = [((f,f)) + (f,f)]^{1/2}$, où (,) est le produit scalaire dans $L^2(m)$, est complet).

. les contractions normales opérent (i.e. si f appartient à $\mathbb{D}$ et T est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}\ |Tx - Ty| \leq |x - y| \text{ et } T(0) = 0 ,$$

alors $T \circ f \in \mathbb{D}$ et $((T\circ f, T\circ f)) \leq ((f,f))$.

Une forme de Dirichlet est dite <u>admettre un carré du champ</u> (propriété (R) de [BH1]) si

$$\forall f \in \mathbb{D} \cap L^{\infty}(m)\ \exists \tilde{f} \in L^1(m)\quad \forall h \in \mathbb{D} \cap L^{\infty}(m)\quad 2((hf,f)) - ((h,f^2)) = \int h\tilde{f}\,dm.$$

On pose alors $\tilde{f} = \Gamma(f,f)$ et Γ se prolonge en une application bilinéaire symétrique positive de $D \times D$ dans $L^1(m)$ appelée carré du champ.

B. Un élément $\bar{\xi}$ de Ω sera dit <u>strictement admissible</u> si ξ est admissible

et s'il existe un représentant k_ξ de $\dfrac{dm}{d\sigma_\xi}$ tel que

$$\forall\omega \in \Omega \quad \forall T > 0 \quad \exists\alpha > 0 \quad k_\xi(\omega + t\xi) \geq \alpha$$

pour presque tout t de $[-T,T]$.

La proposition suivante est très proche, pour l'énoncé et la démonstration, d'une proposition analogue de [Kl].

<u>Proposition 4</u> : <u>Soit</u> ξ <u>un élément strictement admissible</u>. <u>Si</u> (u_n) <u>est une suite de</u> D_ξ <u>et s'il existe</u> u <u>et</u> v <u>boréliennes telles que</u> $u_n \longrightarrow u$ <u>en probabilité et</u> $\int |v - \nabla_\xi u_n| dm \longrightarrow 0$, <u>alors</u> u <u>appartient à</u> D_ξ <u>et</u> $\nabla_\xi u = v$.

<u>Preuve</u> : Soit $\tilde{u}_n$ associé à u_n. Il existe un représentant de $\nabla_\xi u_n$ tel que

$$\forall\omega \; \forall t \qquad \tilde{u}_n(\omega + t\xi) = \tilde{u}_n(\omega) + \int_0^t \nabla_\xi u_n(\omega + s\xi)\, ds.$$

$$\int |v(\omega) - \nabla_\xi u_n(\omega)| dm(\omega) = \iint |v(\omega + t\xi) - \nabla_\xi u_n(\omega + t\xi)| k_\xi(\omega + t\xi)\, dm(\omega)\, dt .$$

Donc en utilisant l'hypothèse de stricte admissibilité, on voit qu'il existe un borélien Ω_1 avec $m(\Omega_1) = 1$ et

$$\forall\omega \in \Omega_1 \qquad \tilde{u}_n(\omega) \longrightarrow u(\omega)$$

$$\text{et } \forall a < b \quad \int_a^b |v(\omega + t\xi) - \nabla_\xi u_n(\omega + t\xi)| dt \longrightarrow 0$$

(où, par abus de notations, on note encore $(\tilde{u}_n)$ et (u_n) des suites extraites).

Il en résulte

$$\forall\, \omega \in \Omega_1 \quad \forall t \quad \tilde{u}_n(\omega + t\xi) \longrightarrow u(\omega) + \int_0^t v(\omega + s\xi)\, ds.$$

Posons $\Omega_o = \Omega_1 + \mathbb{R}\,\xi$. On peut supposer Ω_1 σ-compact et donc Ω_o borélien. On pose alors

$$\forall\omega \in \Omega_o \qquad \tilde{u}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(\omega)$$

$$\forall\omega \notin \Omega_o \qquad \tilde{u}(\omega) = 0 \ .$$

Il est clair que $\tilde{u} = u$ m-pp et $\forall\omega$ $t \longrightarrow \tilde{u}(\omega + t\xi)$ est absolument continue.

En outre

$$\forall\omega \in \Omega_o \quad \frac{\partial}{\partial t}\, \tilde{u}(\omega + t\xi) = v(\omega + t\xi) \quad d\lambda^1(t) - \text{pp}.$$

Donc u appartient à D_ξ et $\nabla_\xi u(\omega + t\xi) = v(\omega + t\xi)$ $m \times \lambda^1$ - pp, soit, d'après (*), $\nabla_\xi u = v$ m-pp. □

C. On considère maintenant $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments strictement admissibles telle que

$$\forall\varphi \in \Omega' \qquad \sum_n |\varphi(\xi_n)|^2 < +\infty \ .$$

On pose

$$D = \left\{u \in \left[\bigcap_n D_{\xi_n}\right] \cap L^2(m) \ ;\ \sum_n \left[\nabla_{\xi_n} u\right]^2 \in L^1(m)\right\}$$

$$\text{et } ((u,v)) = \frac{1}{2} \sum_n \int \nabla_{\xi_n} u \ \nabla_{\xi_n} v \ dm \ .$$

<u>Proposition 5</u>. $\left[D,\ ((\ \ ,\ \ ))\right]$ <u>est une forme de Dirichlet admettant pour carré de champ</u>

$$\Gamma(u,v) = \sum_n \nabla_{\xi_n} u \ \nabla_{\xi_n} v \ .$$

. On remarque d'abord que, si $u \in D_\xi$ et g lipchitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si $\tilde{u}$ est associée à u, $go\tilde{u} = gou$ dm-pp et $\forall\omega$ $t \longrightarrow go\tilde{u}(\omega + t\xi)$ absolument continue, donc gou appartient à D_ξ. Utilisant un résultat pour les fonctions d'une variable on obtient aussi

$$\forall\omega \ \frac{\partial}{\partial t}\, go\tilde{u}(\omega + t\xi) = g'o\tilde{u}(\omega + t\xi)\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(\omega + t\xi) \ \text{dt-pp}$$

(où g' est un représentant de la dérivée de g).

On a donc

$$\nabla_{\xi}(gou)(\omega + t\xi) = g'o\tilde{u}(\omega + t\xi)\ \nabla_{\xi}u(\omega + t\xi)\ dm \times dt\text{-pp} ,$$

et par conséquent

$$\nabla_{\xi}(gou) = (g'ou)(\nabla_{\xi}u)\ m\text{-pp} .$$

On en déduit que les contractions normales opérent sur $\mathbb{D}$.

. Montrons que $\mathbb{D}$ est dense dans L^2.

Si K est un compact de Ω, l'ensemble des restrictions à K des fonctions de la forme $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ pour φ décrivant Ω' est total dans l'ensemble C(K) des fonctions continues sur K muni de la topologie de la convergence uniforme. Or, par exemple,

$$\cos\varphi \in \left[\bigcap_{n\geq 1} D_{\xi_n}\right] \cap L^2(m) \text{ et}$$

$$\forall n \quad \nabla_{\xi_n}(\cos\varphi) = -(\sin\varphi)(\varphi(\xi_n)) .$$

Donc $\cos\varphi \in \mathbb{D}$ et, de même, $\sin\varphi \in \mathbb{D}$.

Si $f \in L^{\infty}(m)$ et si (K_n) est une suite croissante de compacts telle que $m\left[\bigcup_n K_n\right] = 1$, d'après ce qui précède, pour tout n il existe h_n dans $\mathbb{D}$ tel que

$$\int_{K_n} |f-h_n|^2\ dm \leq 1/n .$$

Soit alors g une contraction de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \quad |g(x)| \leq ||f||_{\infty} \quad \text{et} \quad \forall x \in [-||f||_{\infty}, +||f||_{\infty}] \quad g(x) = x ,$$

on a

$$\int_{K_n} |f - goh_n|^2\ dm \leq 1/n$$

et donc

$$\int |f- goh_n|^2\ dm \leq 1/n + 4||f||^2_{\infty}\ m(\Omega \setminus K_n) .$$

D'après le premier point de la démonstration, goh_n appartient à $\mathbb{D}$ pour tout n, et donc f est limite dans $L^2(m)$ d'une suite de $\mathbb{D}$. $L^{\infty}(m)$ étant dense dans $L^2(m)$, la densité de $\mathbb{D}$ dans $L^2(m)$ est démontrée.

. Montrons que la forme est fermée : soit (f_p) une suite de Cauchy dans D_1 $\left[\text{i.e } D \text{ muni de } \left[((\ ,\ )) + ||\ \ ||^2_{L^2(m)}\right]^{1/2}\right]$.

Il existe f dans $L^2(m)$ tel que f_p tend vers f dans $L^2(m)$ et donc en probabilité et, pour tout n, il existe v_n de $L^2(m)$ tel que $\nabla_{\xi_n} f_p$ converge vers v_n dans $L^2(m)$.

D'après la proposition 4, $f \in D_{\xi_n}$ et $\nabla_{\xi_n} f = v_n$.

La suite (f_p) étant de Cauchy, il est facile de voir que f appartient à $\mathbb{D}$ et que f_p converge vers f dans $\mathbb{D}_1$.

. Enfin, en raisonnant comme au premier point, il est facile de voir que :

$$\forall f,h \in \mathbb{D}\cap L^\infty(m) \quad 2((fh,f)) - ((h,f^2)) = \int h\Gamma(f,f)dm$$

donc la forme admet un carré du champ donné par Γ.

IV - FORME ASSOCIEE AU PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK SUR L'ESPACE DE WIENER

A - . Dans cette partie, on suppose que

$$\Omega = \left\{\omega \in C(\mathbb{R}_+ ; \mathbb{R}^d) ; \omega(o) = 0\right\}$$

muni de la topologie de la convergence compacte, F^o est la tribu borélienne et m la mesure de Wiener.

On note aussi $\omega(t) = B_t(\omega)$.

Pour la mesure m, $(B_t)_{t\geq 0}$ est alors le mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^d$.

. Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck peut-être défini comme le semi-groupe markovien symétrique $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $L^2(m)$ tel que, si on note pour tout $\alpha \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$

$$e_\alpha = \exp\left\{i\int \alpha(s).dB_s\right\} \text{ et } q(\alpha) = \int |\alpha(s)|^2\, ds ,$$

on ait

$$\forall \alpha \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \qquad P_t(e_\alpha) = C_{e^{-t/2}\alpha} \exp\left\{ \frac{1}{2} q(\alpha)(e^{-t}-1)\right\}$$

On peut lui associer, de la façon classique, une forme de Dirichlet en posant

$$D = D\,((-A)^{1/2}) \quad \text{et} \quad ((f,f)) = ||(-A)^{1/2} f||^2_{L^2(m)}$$

(où A désigne le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$).

B - . Suivant [M2], on appelle fonctions de Cameron-Martin, les éléments ξ de Ω de la forme

$$\xi(t) = \int_0^t \xi'(s)ds$$

avec $\xi' \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (en abrégé, $\xi \in$ C.M.)

<u>Proposition 6</u> : <u>Si</u> $\xi \in$ C.M <u>et</u> $\xi \neq 0$, ξ <u>est strictement admissible</u>.

<u>Preuve</u> : En effet, d'après la formule de Cameron-Martin,

$$\tau_{t\xi} m = \exp\left\{t\int \xi'(s).dB_s - \frac{1}{2} t^2 q(\xi')\right\} m$$

donc ξ est admissible. Un calcul simple donne

$$\sigma_\xi = \sqrt{2\pi}\left[q(\xi')\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2q(\xi')}\left[\int \xi'(s).dB_s\right]^2\right\} m \ .$$

Il est facile de voir qu'il existe un représentant h_ξ de $\int \xi'(s)dB_s$, fini partout, et un ensemble A de mesure 1 tel que

$$\forall \omega \in A \quad \forall t \qquad h_\xi(\omega + t\xi) = h_\xi(\omega) + t\, q(\xi')$$

$$\forall \omega \notin A \quad \forall t \qquad h_\xi(\omega + t\xi) = 0 \ .$$

Posant alors

$$k_\xi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[q(\xi')\right]^{1/2} \exp\left\{- \frac{1}{2q(\xi')} h_\xi^2(\omega)\right\}$$

on a

$$\forall\omega \notin A \quad \forall t \quad k_{\xi}(\omega + t\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,[q(\xi')]^{1/2}$$

$$\forall\omega \in A \ \forall t \quad k_{\xi}(\omega + t\xi) = k_{\xi}(\omega) \exp\left\{-th_{\xi}(\omega) - t^2 \frac{q(\xi')}{2}\right\}$$

ce qui prouve que ξ est strictement admissible.

<u>Proposition 7</u> : <u>Si</u> $(\xi_n)_{n\geq 1}$ <u>est une suite de fonctions de Cameron-Martin telle que</u> $(\xi'_n)_{n\geq 1}$ <u>est une base orthonormale de</u> $L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$, <u>alors pour tout</u> φ <u>de</u> Ω'

$$\sum_n |\varphi(\xi_n)|^2 < +\infty \ .$$

<u>Preuve</u> : En effet, si $\varphi \in \Omega'$, il existe $\mu_1,\ldots,\mu_d$ mesures à support compact sur $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{d} \int \omega_i(t)\, d\mu_i(t) \ .$$

Donc

$$\forall n \qquad \varphi(\xi_n) = \sum_{i=1}^{d} \int \left[\int_0^t \xi'_{n,i}(s)ds\right] d\mu_i(t) \ .$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int \mu_i([s,+\infty[)\xi'_{n,i}(s)ds = \int \mu([s,+\infty[).\xi'_n(s)ds.$$

Donc

$$\sum_n |\varphi(\xi_n)|^2 = \int |\mu([s,+\infty[)|^2 \, ds \quad < +\infty \ .$$

Soit alors $(\xi_n)_{n\geq 1}$ comme dans la proposition précédente. Les résultats de III s'appliquent et on peut définir une forme de Dirichlet :

$$\hat{\mathbb{D}} = \left\{ f \in \left[\bigcap_n D_{\xi_n}\right] \cap L^2(m) \ ; \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nabla_{\xi_n} f \right]^2 \in L^1(m) \right\}$$

et $$((f,f))^{\sim} = \frac{1}{2} \int \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nabla_{\xi_n} f \right]^2 dm \ .$$

C. On conserve des notations des paragraphes A. et B. précédents.

<u>Proposition 8</u> : $D = \hat{D}$ <u>et</u> $\forall f \in D = \hat{D}$ $((f,f)) = ((f,f))^{\sim}$.

<u>Preuve</u> : Pour simplifier les expressions, nous allons raisonner sur les complexifications naturelles des formes de Dirichlet considérées.

. Soit $A = \langle \alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$, support α compact et α à variation bornée$\rangle$.

D'après [M2], $\langle e_\alpha \ ; \ \alpha \in A\rangle$ est total dans l'espace de Hilbert D_1.

D'autre part, si $\alpha \in A$, e_α admet pour représentant

$$e_\alpha(\omega) = \exp \left\{ -i \int \omega(s).d\alpha(s) \right\} .$$

Donc si $\xi \in \Omega$, pour ce représentant e_α

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad e_\alpha(\omega + t\xi) = e_\alpha(\omega) \exp \left\{ - it \int \xi(s).d\alpha(s) \right\} .$$

Par conséquent

$$\forall \xi \in C.M \quad \forall \alpha \in A \quad e_\alpha \in D_\xi \text{ et } \quad \nabla_\xi e_\alpha = e_\alpha \left[-i \int \xi(s).d\alpha(s) \right] = -i \ \varphi_\alpha(\xi) e_\alpha$$

avec $\varphi_\alpha \in \Omega'$.

En particulier

$$\forall \alpha \in A \quad e_\alpha \in \hat{D} \text{ et}$$

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad ((e_\alpha, e_\beta))^{\sim} = \frac{1}{2} e^{-\frac{q(\alpha-\beta)}{2}} q(\alpha,\beta)$$

(avec $q(\alpha,\beta) = \int \alpha.\beta \, ds$) .

Or il est facile de voir que

$$\forall \alpha,\ \beta \in A \quad ((e_\alpha,\ e_\beta)) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{q(\alpha-\beta)}{2}}\, q(\alpha,\beta)$$

On en déduit, par un raisonnement de densité classique que

$$D \subset \tilde{D} \text{ et } \forall f \in D \quad ((f,f)) = ((f,f))^{\sim} .$$

. Considérons $\alpha \in A$, $\xi \in C.M$ et $f \in D_\xi \cap L^2(m)$ tel que $\nabla_\xi f \in L^2(m)$.
Soit $\tilde{f}$ associé à f.

$$\int \nabla_\xi f(\omega)\, e_\alpha(\omega)\, dm(\omega) = \iint \frac{\partial}{\partial t}\, \tilde{f}(\omega + t\xi) e^{itq(\alpha,\xi')-th_\xi(\omega) - \frac{t^2}{2} q(\xi')} k_\xi(\omega) e_\alpha(\omega) dm(\omega)$$

(avec des notations précédemment introduites.)
Donc

$$\begin{aligned}\int \nabla_\xi f(\omega)\, e_\alpha(\omega)\, dm(\omega) &= \iint \tilde{f}(\omega + t\xi)\, e_\alpha(\omega + t\xi)\, k_\xi(\omega + t\xi) \\ &\qquad [-iq(\alpha,\xi') + h_\xi(\omega + t\xi)]\, dm(\omega)dt \\ &= \int f(\omega) e_\alpha(\omega)\, [-iq(\alpha,\xi') + h_\xi(\omega)] dm(\omega) .\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la théorie générale des formes de Dirichlet, $P_t f$ appartient à D et donc à $\tilde{D}$. On a donc, en appliquant ceci à $P_t f$

$$\begin{aligned}\int \nabla_\xi (P_t f) e_\alpha dm &= \int (P_t f)\, e_\alpha[-iq(\alpha,\xi') + h_\xi] dm \\ &= \int f P_t [e_\alpha(-iq(\alpha,\xi') + h_\xi)] dm ,\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\int P_t(\nabla_\xi f)\, e_\alpha dm &= \int (\nabla_\xi f)(P_t e_\alpha)\, dm \\ &= \int f\, P_t e_\alpha \left[-ie^{-t/2} q(\alpha,\xi') + h_\xi\right] dm .\end{aligned}$$

Or on voit facilement, comme $h_\xi = \int \xi' dB_s$, que

$$P_t(e_\alpha h_\xi) = (P_t e_\alpha)[e^{-t/2} h_\xi + iq(\alpha,\xi')(1-e^{-t})] ,$$

d'où

$$\int [\nabla_\xi(P_t f) - e^{-t/2} P_t(\nabla_\xi f)] e_\alpha \, dm = 0 .$$

Donc, par densité, si $\xi \in C.M$,

$\forall f \in D_\xi \cap L^2(m)$ avec $\nabla_\xi f \in L^2(m)$, $\nabla_\xi(P_t f) = e^{-t/2} P_t(\nabla_\xi f)$

. Supposons alors $f \in \tilde{\mathbb{D}}$. Pour tout $t > 0$ $P_t f \in \mathbb{D}$ et

$$((P_t f, P_t f))^\sim \leq e^{-t}((f,f))^\sim \leq ((f,f))^\sim .$$

Comme $P_t f \longrightarrow f$ dans $L^2(m)$ quand t tend vers 0, par un raisonnement de compacité faible, $P_t f$ converge vers f faiblement dans $\tilde{\mathbb{D}}_1$. $\mathbb{D}$ est donc faiblement dense dans $\tilde{\mathbb{D}}_1$ et donc aussi fortement. $\mathbb{D}$ étant fermé dans $\tilde{\mathbb{D}}_1$ (car complet), $\mathbb{D} = \tilde{\mathbb{D}}$.

D. On déduit, en particulier, de tout ce qui précède le théorème suivant : (propriété de densité de l'image du volume énergétique).

<u>Théorème 9</u> : <u>Si</u> $\mathbb{D}$ <u>est le domaine de la forme de Dirichlet associée au semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck</u>, Γ <u>l'opérateur carré du champ correspondant, on a</u> :

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{D}^n$, <u>l'image par</u> u <u>de la mesure</u> $\det[\Gamma(u_i,u_j)]_{1\leq i,j\leq n} dm$ <u>est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue</u> λ^n. <u>En particulier, si</u> $\det[\Gamma(u_i,u_j)]_{1\leq i,j\leq n}$ <u>est non nul</u> m-<u>presque partout, la loi de</u> u <u>est absolument continue par rapport à</u> λ^n.

V - APPLICATION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

A. Les notations sont les mêmes qu'en IV, on pose en outre F la tribu complétée de F^o pour m,

$F_t^o = \sigma(B_s,\ s \leq t)$, $F_t = F_t^o \vee \langle m\text{-négligeables de } F\rangle$.

Rappelons que $\mathcal{E}((.,.))$ dénote la forme de Dirichlet associée au semi-groupe d'O.U. de domaine $\mathbb{D}$. On note $\mathbb{D}_1$ l'espace $\mathbb{D}$ muni de la norme $||\cdot||_1$ définie par

$$||f||_1 = [((f,f)) + \int f^2 dm]^{1/2} .$$

Pour $T \in \mathbb{R}_+$, on introduit l'espace $H(T,\mathbb{R}^n)$ des classes pour l'égalité $\lambda^1 \times m$-ps de processus $h(t,u)$ mesurables, $(F_t)_{t\in[o,T]}$-adaptés, à valeurs $\mathbb{R}^n$, tels que

$$||h||_{H(T,\mathbb{R}^n)} = \left[\int_o^T \sum_{i=1}^n ||h_i(t)||_1^2 \, dt\right]^{1/2} < \infty .$$

$H(T,\mathbb{R}^n)$ s'identifie au sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(([o,T],\lambda^1),\mathbb{D}_1^n)$ des classes qui contiennent un processus mesurable adapté.

On pose $\mathbb{D}_1(T) = \mathbb{D}_1 \cap L^2(\Omega,F_T,m)$ et on note $Q(T)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des e_α pour α à support dans $[o,T]$, alors $Q(T)$ est dense dans $\mathbb{D}_1(T)$.

Lemme 10 . Soit $R(T,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus de la forme

$$r(t) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j \, 1_{]jT/k,(j+1)T/k]}(t)$$

où $q_j \in [Q(jT/k)]^n$, alors $R(T,\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H(T,\mathbb{R}^n)$.

Preuve : cf lemme 5.1 de [BH1]

Remarquons que ce lemme entraine que toute classe élément de $H(T,\mathbb{R}^n)$ possède un représentant prévisible.

Lemme 11 . Soit $u(t,\omega)$ un processus dont la classe est dans $H(T,\mathbb{R})$, alors il existe un processus prévisible $v(t,\omega) \in L^1([o,T] \times \Omega,\lambda^1 \otimes m)$ tel que pour λ^1-presque tout $t \leq T$

$$v(t) = \Gamma(u(t),u(t)) \text{ mps} .$$

Preuve . Si $q \in Q(t)$, $\Gamma(q,q)$ est F_t-mesurable et si $r \in R(T,\mathbb{R})$ on a explicitement

$$\Gamma(r(t),r(t)) = \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma(q_j,q_j) 1_{]jT/k,(j+1)T/k]}(t)$$

qui est prévisible.

Or si r est p sont deux processus de $H(T,\mathbb{R})$ l'inégalité aisée suivante

$$||\Gamma(r,r)-\Gamma(p,p)||_{L^1([o,T]\times\Omega,\lambda^1\times m)} \leq ||r-p||_H(||r||_H+||p||_H)$$

montre que lorsque r_n tend vers u dans H, $\Gamma(r_n,r_n)$ converge dans $L^1([o,T]\times\Omega,\lambda^1\times m)$, le lemme en découle par extraction de sous-suite. □

Les relations entre carré du champ et intégrale stochastique sont exprimées par le théorème suivant :

<u>Théorème 12</u> . <u>Soient</u> $\alpha \in H(T,\mathbb{R}^{n\times d})$, $\beta \in H(T,\mathbb{R}^n)$ <u>et</u>

$$(12,1) \qquad X(t) = x + \int_o^t \alpha(s)dB_s + \int_o^t \beta(s)\,ds \quad \underline{\text{où}} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

<u>alors</u>

a) <u>pour tout</u> $t \in [o,T]$, $X(t) \in \mathbb{D}^n$ <u>et</u>

$$(12,2) \qquad \sum_{i=1}^n ((X_i(t),X_i(t))) \leq (d+1)\left[||\alpha||^2_{H(T,\mathbb{R}^{n\times d})} + ||\beta||^2_{H(T,\mathbb{R}^n)}\right]$$

b) <u>pour tout</u> i,j,k <u>on a</u> $\int_o^T [\Gamma(X_i(s),\alpha_{jk}(s))]^2 ds < +\infty$ mps,

<u>et</u>

$$(12,3) \quad \Gamma(X(t),X(t)^*) = \sum_{k=1}^d \int_o^t [\Gamma(X(s),\alpha_{.k}(s)^*) + \Gamma(\alpha_{.k}(s),X(s)^*)]dB_s^k$$

$$+ \int_o^t [\Gamma(X(s),\beta(s)^*) + \Gamma(\beta(s),X(s)^*) + \Gamma(\alpha(s),\alpha(s)^*) + \alpha(s)\alpha(s)^*]ds.$$

<u>Preuve</u> . Dans (12,3) les notations sont matricielles X(t) est une matrice colonne, $X(t)^*$ sa transposée.

Le fait que les intégrales stochastiques en (12,1) et (12,3) soient définies et ne dépendent que des classes pour l'égalité $\lambda^1\times m$-ps est démontré par exemple en [P1].

La preuve donnée en [BH1] du cas unidimensionnel donne facilement le résultat. □

B. Equations différentielles stochastiques.

On considère $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des applications telles que pour tous i,j les composantes σ_{ij} et b_j appartiennent à l'ensemble des applications g de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$
(H.L)\quad \left\{\begin{array}{ll}
1)\ (t,x) \longrightarrow g(t,x) \text{ est mesurable,} & \\
2)\ \forall t \leq T\ ,\ |g(t,x) - g(t,y)| \leq A(T)|x-y| & \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \\
3)\ \forall t \leq T\ ,\ |g(t,x)| \leq A(T)(1 + |x|) & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\
\text{où } A \text{ est une fonction croissante de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+. &
\end{array}\right.
$$

On considère l'équation différentielle stochastique

$$
(^*)\qquad X(t) = x + \int_o^t \sigma(s,X(s))dB_s + \int_o^t b(s,X(s))ds
$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Par la méthode classique d'itération de Picard qui démontre l'existence et l'unicité de la solution de $(^*)$, en utilisant les espaces fonctionnels $H(t,\mathbb{R}^n)$, on montre par le théorème 12 le résultat suivant :

Proposition 13 . L'équation $(^*)$ a une solution X unique à l'indistinguabilité près, la norme $||X(t)||_1$ est bornée sur $[o,T]$ donc $X \in H(T,\mathbb{R}^n)$.

On en déduit aisément que les hypothèses du théorème 12 sont vérifiées avec $\alpha(s) = \sigma(s,X(s))$ et $\beta(s) = b(s,X(s))$, on a donc les conclusions du théorème 12 et

$$
\begin{aligned}
(13,1))\quad \Gamma(X(t),X(t)^*) = \sum_{k=1}^{d} \int_o^t [\Gamma(X(s),\sigma_{.k}(s,X(s))^*) + \Gamma(\sigma_{.k}(s,X(s)),X(s)^*)]dB_s^k \\
+ \int_o^t [\Gamma(X(s),b(s,X(s))^*) + \Gamma(b(s,X(s)),X(s)^*) \\
+ \Gamma(\sigma(s,X(s)),\sigma(s,X(s))^*) + \sigma(s,X(s))\sigma(s,X(s))^*]ds.
\end{aligned}
$$

Lemme 14 de factorisation. Soient $u \in H(T,\mathbb{R}^n)$ et F une application de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que chaque composante F_i vérifie (H.L. 1 et 2). Alors il existe un processus U prévisible à valeurs $\mathbb{R}^n$ borné tel que pour λ^1-presque tout t

$$\Gamma(F(t,u(t)),u(t)^*) = U(t)\,\Gamma(u(t),u(t)^*) \qquad \text{m-ps.}$$

et

$$\Gamma(F(t,u(t)),F(t,u(t))^*) = U(t)\Gamma(u(t),u(t)^*)U^*(t) \quad \text{m-ps.}$$

Ce lemme étant crucial nous donnons la démonstration avec quelques détails.

Sous-lemme 1. Si A est une matrice $n \times n$ symétrique semi définie positive,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon(A + \varepsilon I)^{-1} = P^A$$

où P^A est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}A$.

Preuve . Il suffit de prendre une base de $\mathbb{R}^n$ constituée d'une base de $\operatorname{Ker}A$ et d'une base de $\operatorname{Im}A$, pour que le raisonnement s'écrive avec évidence. □

Sous-lemme 2 . Si A est une matrice symétrique $n \times n$ semi définie positive, B et C deux matrices $n \times n$ telles qu'il existe une matrice H telle que

$$B = HA \text{ et } C = HAH^*,$$

alors $J = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} B(A + \varepsilon I)^{-1}$ existe, on a

$$B = JA \quad \text{et} \quad C = JAJ^*$$

et J est donnée par $J = H\,\tilde{P}^A$ où $\tilde{P}^A$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$.

Preuve. Si l'on remarque que

$$B(A + \varepsilon I)^{-1} = H(I - \varepsilon(A + \varepsilon I)^{-1}),$$

il n'est que d'appliquer le sous-lemme 1. □

Preuve du lemme de factorisation

Soit $u \in H(T,\mathbb{R}^n)$.

a) Fixons $t \in [0,T]$ tel que $\|u(t)\|_1 < +\infty$.

Il existe des fonctions $F_p(s,y)$ vérifiant (H.L. 1 et 2) avec la même constante que F, de classe C^1 en x telles que

$$\forall(s,y) \in [o,T] \times \mathbb{R}^n \lim_{p\uparrow\infty} F_p(s,y) = F(s,y).$$

Par le calcul fonctionnel de classe C^1(c.f.[BH1]), on a, pour tous p,q dans $\mathbb{N}$, les égalités m-p.s.

$$(14,1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(F_p(t,u(t)),u(t)^*) & = F'_p(t,u(t))\ \Gamma(u(t),u(t)^*) \\ \Gamma(F_p(t,u(t)),F_q(t,u(t))^*) & = F'_p(t,u(t))\ \Gamma(u(t),u(t)^*)\ F'_q(t,u(t))^*, \end{array} \right.$$

où F'_p désigne la matrice jacobienne de F_p.

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $F_p(t,u(t))$ converge vers $F(t,u(t))$ faiblement dans $\mathbb{D}_1^n$ et en prenant des combinaisons linéaires convexes que la convergence est forte.

Alors les composantes de $\Gamma(F_p(t,u(t)),u(t)^*)$ et de $\Gamma(F_p(t,u(t)),F_q(t,u(t))^*)$ convergent dans $L^1(m)$ vers celles de $\Gamma(F(t,u(t)),u(t)^*)$ et de $\Gamma(F(t,u(t)),F_q(t,u(t))^*)$ resp. lorsque $p\uparrow\infty$. Et aussi $\Gamma(F(t,u(t)), F_q(t,u(t))^*) \xrightarrow[q\uparrow\infty]{} \Gamma(F(t,u(t)),F(t,u(t))^*)$ dans L^1.

Considérons une sous-suite p_k telle que

$$\forall i,j \quad \frac{\partial F^i_{p_k}}{\partial x_j}(t,u(t)) \longrightarrow \Phi_{ij} \quad \text{pour } \sigma(L^\infty(m), L^1(m)),$$

en prenant les limites dans $\sigma(L^1,L^\infty)$ à partir de (14,1), il existe une matrice $\Phi(t) \in L^\infty(m)$ telle que m-presque surement pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$(14,2) \qquad \Gamma(F(t,u(t)), u(t)^*) = \Phi(t)\Gamma(u(t),u(t)^*)$$

$$\Gamma(F(t,u(t)), F_q(t,u(t)^*) = \Phi(t)\Gamma(u(t),u(t)^*)\ F'_q(t,u(t))$$

donc en faisant tendre q vers l'infini suivant la même sous-suite p_k dans la deuxième égalité on a

$$(14,3) \qquad \Phi(F(t,u(t)), F(t,u(t))^*) = \Phi(t)\Gamma(u(t),u(t)^*)\ \Phi(t)^* \qquad \text{m-ps.}$$

avec $||\Phi_{ij}(t)||_\infty \leq A(T)$ la constante de F dans (H.L.2).

b) t étant toujours fixé comme au a), par le sous-lemme 2,

$$\Gamma(F(t,u(t)),u(t)^*)[\Gamma(u(t),u(t)^*) + \varepsilon I]^{-1}$$

converge m-ps lorsque $\varepsilon\downarrow o$ vers $J(t)$ avec

$$\Gamma(F(t,u(t),u(t)^*) = J(t)\Gamma(u(t),u(t)^*)$$
$$\Gamma(F(t,u(t)),F(t,u(t))^*) = J(t)\Gamma(u(t),u(t)^*)J(t)^*,$$

où $J(t) = \Phi(t)\ \tilde{P}^{\Gamma(u(t),u(t)^*)}$,

donc $|J_{ij}(t)| \leq n\ A(T)$.

c) Posons maintenant

$$U(t,\omega) = \underset{k\uparrow\infty}{\underline{\lim}}\ [\Gamma(F(t,u(t)),\ u(t)^*)]_p\left\{[\Gamma(u(t),u(t)^*)]_p + \frac{1}{k}\ I\right\}^{-1}$$

si cette $\underline{\lim}$ est telle que $|U_{ij}(t,\omega)| \leq n\ A(T)\ \forall i,j$, $= 0$ sinon,

où $[\Gamma(.,.)]_p$ désigne les versions prévisibles données par le lemme 11. Alors U est prévisible borné et satisfait l'énoncé par le a) et le b). $\square$

D'après ce lemme de factorisation, l'équation (13,1) peut s'écrire

$$\Gamma(X(t),X(t)^*) = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t \left\{U_k(s),\ \Gamma(X(s),X(s)^*)\right\}dB_s^k$$

$$+ \int_0^t\left[\langle V(s),\Gamma(X(s),X(s)^*)\rangle + \sum_{k=1}^{d} U_k(s)\Gamma(X(s),X(s)^*)U_k(s)^* + \sigma(s,X(s))\sigma(s,X(s))^*\right]ds,$$

où $\langle A,B\rangle = AB + BA$

avec U_k, V prévisibles bornés.

Il est alors classique (cf par exemple [S1]) qu'il existe un processus M(t) continu à valeurs $GL(\mathbb{R}^n)$ tel qu'on ait l'équation fondamentale suivante :

$$\Gamma(X(t),X(t)^*) = \int_0^t M(t)M(s)^{-1}\ \sigma(s,X(s))\ \sigma(s,X(s))^*M(s)^{-1*}M(t)^*ds.$$

VI - CONSEQUENCES DU CRITERE ET DE L'EQUATION FONDAMENTALE

Posons $A_k = \{(t,y) : \sigma(t,y)$ est de rang $\geq k\}$ et soit T_k le début essentiel de A_k c'est à dire

$$T_k = \inf\{t : \int_0^t 1_{A_k}(s,X_s)\ ds > 0\}.$$

T_k est un (F_t)- temps d'arrêt comme début d'un ensemble prévisible donc progressif.

<u>Remarque 15</u> . <u>si</u> $k = 1$, T_1 <u>est déterministe</u>. <u>Si</u> x_t <u>est la solution de</u> $x_t = x + \int_0^t b(s,x_s)ds$ <u>on a</u>

$$T_1 = \sup \left\{t \geq 0 \quad \int_0^t \sum_{ij} \sigma_{ij}^2(s,x_s)ds = 0\right\} .$$

<u>Preuve</u> . Posons pour la démonstration

$$t_x = \sup\left\{t \geq 0 \quad \int_0^t \sum_{ij} \sigma_{ij}^2(s,x_s)ds = 0\right\}$$

a) On a $\int_0^{T_1} \sigma_{ij}(s,X_s)dB_s^j = 0$ m-ps $\forall ij$

donc

$$X_t(\omega) = x_t \quad \text{sur } [[o,T]] \text{ donc } T_1 \leq t_x$$

b) On a $\int_0^{t_x} \sigma_{ij}^2(s,x_s)ds = 0 \quad \forall ij$

donc, pour $t \leq t_x$, x_t est aussi solution de

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(s,x_s)dB_s + \int_0^t b(s,x_s)ds$$

donc $X_t = x_t$ m-ps sur $[o,t_x]$

donc $\int_0^{t_x} \sigma_{ij}^2(s,X_s)ds = 0$ mps , donc $t_x \leq T_1$. $\square$

<u>Lemme 16</u> . a) <u>Pour</u> m-p.<u>tout</u> ω <u>on a si</u> $t > 0$

$$\left[\forall v \in \mathbb{R}^n \ \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t v^*\sigma(s,X_s)\, \sigma(s,X_s)^* v ds > 0 \Rightarrow v^*\Gamma(X_t,X_t^*)v > 0\right]$$

b) <u>Si</u> $(t,x) \longrightarrow \sigma(t,x)$ <u>est continue ou seulement si</u> $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $(t,x) \longrightarrow v^*\sigma(t,x)\sigma^*(t,x)v$ <u>est sci</u>, <u>alors si</u> $t > 0$ <u>pour</u> mp. tt.ω

$$(\forall v \in \mathbb{R}^n \ v^*\sigma(t,X_t)\sigma^*(t,X_t)\, v \neq 0 \ \Rightarrow \ v^*\Gamma(X_t,X_t^*)\, v \neq 0).$$

<u>Preuve</u> . Il suffit de démontrer le a). Notons pour cela que par la

continuité du processus M(t)

$$\forall\delta > 0\ \exists\, t_1(\underline{\omega}) < t : (|M(t)\,M(s)^{-1} - I| \leq \delta\ ,\ \forall s \in [t_1,t])$$

où $|.|$ désigne la norme dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Par l'équation (14,5) pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$v^*\Gamma(X(t),X(t)^*)v \geq \int_{t_1}^{t} v^*\sigma(s,X(s)\sigma(s,X(s))^*v\,ds - 2\,\delta k|v|^2(t-t_1)$$

où $k(t,\omega)$ majore $|\sigma(s,X_s)\sigma(s,X_s)^*|$ (hypothèse H.L.3).

On en déduit que pour tout $\tau \in [t_1,t]$

$$v^*\Gamma(X(t),X(t)^*)v \geq (t-\tau)\left[\frac{1}{t-\tau}\int_{\tau}^{t} v^*\sigma(s,X(s))\sigma(s,X(s))^*v ds - 2\delta k|v|^2\right]$$

Donc si on note $l(t,w,v)$ la limite supérieure de l'énoncé, choisissant $\tau \in [t_1,t]$ de sorte que

$$\frac{1}{t-\tau}\int_{\tau}^{t} v^*\sigma(s,X(s))\sigma(s,X(s))^*\ v\ ds \geq \frac{l(t,\omega,v)}{2}$$

il suffit de prendre $\delta < \dfrac{l(t,\omega,v)}{4k(t,\omega)|v|^2}$ pour voir que

$v^*\Gamma(X(t),X(t)^*)v > 0$. □

On en déduit le théorème suivant.

<u>Théorème 17</u> . <u>Soit</u> H <u>un sous-espace vectoriel de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et</u> B_H <u>une application linéaire de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> H, <u>on suppose que</u> $\forall v \in \mathbb{R}^n(t,x) \longrightarrow v^*\sigma(t,x)\sigma^*(t,x)v$ <u>est sci et que</u>

$$\forall(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n\ \ \mathrm{Image}(B_H\sigma(t,x)) = H.$$

<u>Alors</u> si $t > 0$ <u>la variable aléatoire</u> B_HX_t <u>a une loi absolument continue par rapport</u> <u>à la mesure de Lebesgue sur</u> H.

<u>Preuve</u> . Par la propriété de densité de l'image du volume énergétique (théorème 9) il suffit de montrer que m.ps. $(\forall\xi \in H,\ \xi \neq 0\ \Rightarrow\ \xi^*\Gamma(B_HX(t),(B_HX(t))^*)\ \xi \neq 0)$

donc que $\qquad (B^*_H\xi)^* \Gamma(X_t,X^*_t)\, B^*_H\, \xi \neq 0$

donc par le lemme 16 que

$$\text{m.ps.}(\forall\xi \in H,\ \xi \neq 0\ ,\quad (B^*_H\xi)^*\ \sigma(t,X_t)\sigma^*(t,X_t)B^*_H\ \xi \neq 0)$$

autrement dit que

$$\text{m.ps.}\ (\xi \in H \longmapsto \sigma^*(t,X_t)B^*_H\ \xi \in \mathbb{R}^d \text{ est injective})$$

donc que

$$\text{m.ps.}\ (u \in \mathbb{R}^d \longmapsto B_H\sigma(t,X_t)\ u \in H \text{ est surjective})$$

ce qui est le cas.

<u>Remarque 18</u> . Plus généralement si $v^*\sigma(.,.)\sigma(.,.)^*v$ n'est plus supposée sci, sous les hypothèses (H.L.) on aura la conclusion du théorème si on suppose qu'il existe une fonction continue ε de $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^*_+$ telle que pour λ^1-presque tout t

$\forall y \in \mathbb{R}^n$, la matrice $B_H\sigma(t,y)\sigma(t,y)^*B^*_H - \varepsilon(t,y)I_H$ est semi définie positive sur H x H.

Reprenons les notations qui précèdent la remarque 15.

<u>Théorème 19</u> . <u>Si</u> $m\ (t > T_n) > 0$, <u>la loi conditionnelle de</u> $X(t)$ <u>sachant</u> $(t > T_n)$ <u>est absolument continue par rapport à</u> λ^n.

<u>Preuve</u> . Si $t > T_n(\omega)$, il existe $S \subset [0,t]$ avec $\lambda^1(S) > 0$ tel que si $s \in S$

$$v^*\sigma(s,X(s,\omega))\sigma(s,X(s,\omega))^*\ v \geq \lambda(s)|v|^2 \text{ avec } \lambda(s) > 0$$

d'où en prenant $v = M(s,\omega)^{-1*}u$

$$\int_0^t u^*M(s)^{-1}\sigma(s,X(s)\sigma(s,X(s))^*M(s)^{-1*}u\ ds \geq k(\omega)|u|^2$$

où $k(\omega) = \displaystyle\int_0^t \frac{\lambda(s)}{|M(s)|^2}\,ds > 0$.

Donc si $t > T_n(\omega)$ $\quad M(t)^{-1}\Gamma(X(t),X(t)^*)\ M(t)^{-1*}$ est inversible donc on a

$$\det(\Gamma(X(t),X(t)^*) > 0 \text{ sur } (t > T_n) \text{ m.ps.} \qquad \square$$

En fait on a une propriété de permanence analogue à celle du théorème 19 même dans le cas dégénéré quoiqu'un peu moins simple à exprimer :

<u>Théorème 20</u> . <u>Soit</u> t <u>tel que</u> $m(t > T_k) > 0$, <u>alors pour presque tout</u>

sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, la projection de X_t sur H a, conditionnellement à $(t > T_k)$ une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur H.

Dans cet énoncé le "presque-tout" est à prendre au sens le plus naturel : pour la probabilité invariante sur la grassmannienne d'indice k de $\mathbb{R}^n$ considérée comme espace homogène sur lequel opère le groupe orthogonal O(n).

Nous établirons d'abord un lemme purement déterministe.

Lemme 21 . Notons λ_n la mesure de Lebesgue sur le dual $\mathbb{R}^{n*}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors si A est une matrice n x n de rang k, $1 \leq k \leq n-1$

$$\lambda_n^{\otimes(n-k)}\left\{(\xi_1,\ldots,\xi_{n-k}) \in (\mathbb{R}^{n*})^{n-k} \ : \ \mathrm{Ker}A \cap \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Ker}\xi_i \neq (0)\right\} = 0 .$$

Preuve . a) Supposons d'abord k = n-1, il existe $u \in \mathbb{R}^n$ $u \neq 0$ tel que $\mathrm{Ker}A = (\lambda u, \lambda \in \mathbb{R})$.

La relation linéaire imposée aux composantes de ξ fait que $\lambda_n(\xi \in \mathbb{R}^{n*} : \xi(u) = 0)$ est nul.

b) On pose k = n-p, on raisonne par récurrence sur p.

Soit $u_1,\ldots,u_p$ une base de KerA, on voit qu'il faut évaluer

$$\lambda_n^{\otimes p}((\xi_1,\ldots,\xi_p) \ : \ \mathrm{dét}(\xi_i(u_j))_{1\leq i,j\leq p} = 0) \quad .$$

Si on développe le déterminant selon la dernière ligne les mineurs sont des fonctions réelles $f_i(\xi_1,\ldots,\xi_{p-1})$ $i = 1,\ldots,p$ qui par hypothèse de récurrence sont telles que

$$(21,1) \qquad \lambda_n^{\otimes(p-1)}((\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}) \ : \ f_i(\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}) = 0) = 0$$

Or si $(\eta_1,\ldots,\eta_p) \neq 0$ on a comme pour le a)

$$(21,2) \qquad \lambda_n(\xi_p \ : \ \xi_p(\eta_1 u_1 +\ldots+ \eta_p u_p) = 0) = 0 .$$

D'où par (21,1) et (21,2) en prenant $\eta_i = (-1)i+p\ f_i(\xi_1,\ldots,\xi_{p-1})$

$$\text{on a } \lambda_n^{\otimes p}((\xi_1,\ldots,\xi_p) \ : \ \mathrm{dét}(\xi_i(u_j)) = 0) = 0 . \qquad \square$$

Lemme 22 . Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et A une matrice n x n aléatoire de rang $\geq$ k , alors pour $\lambda_n^{\otimes(n-k)}$ presque tout $(\xi_1,\ldots\xi_{n-k}) \in (\mathbb{R}^{n*})^{n-k}$,

$$P\left\{\mathrm{Ker}A \cap \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Ker}\xi_i \neq \langle 0\rangle\right\} = 0$$

<u>Preuve</u> . C'est un conséquence du lemme précédant par le théorème de Fubini.

a) Supposons d'abord que $A(\omega)$ soit toujours exactement de rang k. Pour la mesure produit $\lambda_n^{\otimes(n-k)}\otimes P$ sur $(\mathbb{R}^{n*})^{n-k} \times \Omega$, l'ensemble

$$\left\{((\xi_1,\dots,\xi_{n-k}),\omega) \;:\; \mathrm{Ker}A \cap \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Ker}\xi_i \neq \langle 0\rangle\right\}$$

est négligeable d'où le résultat.

b) Maintenant si A est de rang $\geq$ k, on partage Ω en sous ensemble Ω_m où A est de rang m avec $k \leq m \leq n$. Alors le fait que si $k \leq m$ c'est à dire si $n-k \geq n-m$

$$\lambda_n^{\otimes(n-m)}\otimes P\left\{((\xi_1,\dots,\xi_{n-m}),\omega) \;:\; \mathrm{Ker}A \cap \bigcap_{i=1}^{n-m} \mathrm{Ker}\xi_i \neq \langle 0\rangle\right\} = 0$$

implique que

$$\lambda_n^{\otimes(n-k)}\otimes P\left\{((\xi_1,\dots,\xi_{n-k}),\omega) \;:\; \mathrm{Ker}A \cap \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Ker}\xi_i \neq \langle 0\rangle\right\} = 0$$

donne le résultat.

□

Définisons une probabilité μ_k sur l'ensemble G(n,k) des sous-espaces

vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$ en posant si $E \subset G(n,k)$

$$\mu_k(E) = (\tilde{\lambda}_n)^{\otimes(n-k)}\left\{(\xi_1,\dots,\xi_{n-k}) \in (\mathbb{R}^{n*})^{n-k} \;:\; \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Ker}\xi_i \in E\right\}$$

où $\tilde{\lambda}_n$ est une probabilité équivalente à λ_n invariante par le groupe orthogonal. Il est clair que μ_k est invariante lorsque le groupe orthogonal opère sur G(n,k), une telle probabilité est unique (parce que G(n-k) est isomorphe à l'espace homogène $O(n)/_{O(k)\times O(n-k)}$ et les groupes O(n) et O(k)xO(n-k) sont unimodulaires parce que compacts.)

Le lemme 22 s'exprime alors en disant que pour μ_k-presque tout sous-espace H de dimension k,

$$P\left\{\mathrm{Ker}A \cap H \neq \langle 0\rangle\right\} = 0$$

Le théorème 20 est maintenant aisé à démontrer.

On repart de la relation fondamentale :

$$M(t)^{-1}\Gamma(X(t),X(t)^*)M(t)^{-1*} = \int_0^t M(s)^{-1}\sigma(s,X(s))\sigma(s,X(s))^* M(s)^{-1*}ds.$$

La matrice $M(t)^{-1}\Gamma(X(t),X(t)^*)M(t)^{-1*}$ est croissante au sens des matrices semi-définies positives lorsque t croît. Si $t > T_k$ par un raisonnement analogue à la preuve du théorème 19,

$$M(t)^{-1}\Gamma(X(t),X(t)^*)M(t)^{-1*}$$

est de rang $\geq k$ donc aussi $\Gamma(X(t),X(t)^*)$.

On applique ce qui précède à la matrice aléatoire $\Gamma(X(t),X(t)^*)$ définie sur $\Omega\backslash\{t \leq T_k\}$ et la relation

$$m\{\mathrm{Ker}\ \Gamma(X(t),X(t)^*) \cap H = 0\} = 1$$

s'exprime aussi sous la forme (P_H désignant la projection orthogonale sur H)

$$m\{\forall u \in H \quad u^*\Gamma(P_H X(t),(P_H X(t))^*)\ u = 0 \ \Rightarrow\ u = 0\} = 1$$

ce qui par la propriété de densité de l'image du volume énergétique (théorème 9) donne le résultat.

N. BOULEAU
CERMA-ENPC
La Courtine B.P. 105
93194 NOISY-LE-GRAND
FRANCE

F. HIRSCH
ENS de CACHAN
61 avenue du Président Wilson
94230 CACHAN
FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

[A1] .A. ANCONA Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet Ann. Inst. Fourier XXV, Fasc.3-4 (1975)

[B1] .N. BOULEAU Désintégration des mesures d'énergie dans les espaces de Dirichlet et propriété de densité des temps d'occupation Note C.R.A.S t 298 s.I n°7 (1984)

[BH1] .N. BOULEAU - F. HIRSCH Formes de Dirichlet générales et densité des variables aléatoires réelles sur l'espace de Wiener J. of funct. Anal. à paraître

[BH2] .N. BOULEAU - F. HIRSCH Calculs fonctionnels dans les espaces de Dirichlet et application aux équations stochastiques Note C.R.A.S. à paraître

[D1] .J. DENY Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel C.I.M.E. Potential theory, Cremonese (1970)

[E1] R.J. ELLIOTT Stochastic calculus and applications Springer (1982)

[F1] .R. FEDERER Geometric measure theory Springer (1969)

[F2] .F. FUKUSHIMA Dirichlet forms and Markov processes North-Holland (1980)

[K1] .S. KUSUOKA Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces J. Fac. Sci. univ. Tokyo, Sect IA, 29, (1982)

[L1] .Y. LE JAN Mesures associées à une forme de Dirichlet, applications Bull. Soc. Math. France, 106, Fasc. 1, (1978)

[M1] .P. MALLIAVIN Implicit functions in finite corank on the Wiener space. Tanigushi Symp. Katata 1982 pp 369-386

[M2] .P.A. MEYER Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck Sem. Prob. XVI, pp 95-132 lect. n. in math 920 (1982)

[NZ1] .D. NUALART - M. ZAKAI Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus Z.f.W à paraître

[P1] .P. PRIOURET Diffusions et équations différentielles stochastiques Ecole d'Eté de Prob. St Flour lect. n. in math 390 Springer (1973)

[S1] .D.W. STROOCK The Malliavin calculus, a functional analytic approach J. of funct. Anal., 44, 212-257 (1981)

[W1] S. WATANABE Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus Tata institute, Bombay 1984