SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LAURENT SCHWARTZ

Construction directe d'une diffusion sur une variété

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 91-112

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__91_0>

CONSTRUCTION DIRECTE D'UNE DIFFUSION SUR UNE VARIETE

Laurent SCHWARTZ

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex (France)

"U.A. du CNRS n° 169"

TABLE DES MATIERES

Les chiffres $^{(1)}, \cdots$ renvoient aux notes en fin d'article, les numéros de page *en italique* renvoient à l'article lui-même.

Ce texte a été dactylographié au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, U.A. du CNRS n° 169.

INTRODUCTION.

Le passage d'un espace vectoriel de dimension finie à une variété de dimension N, pour la construction d'une diffusion de générateur infinitésimal donné, a toujours été d'une certaine complication ; essentiellement parce qu'un espace vectoriel est parallélisable et qu'une variété ne l'est pas. Une des meilleurs méthodes a longtemps été celle de Courrège et Priouret (voir Priouret [1], chapitre VI, p. 102), utilisant des cartes de la variété, puis un recollage de processus de Markov à partir de temps d'arrêt. Un autre procédé très élégant (et probablement le meilleur) a été introduit récemment pas Ikeda et Watanabé(1), obtenu en enroulant le brownien normal d'un espace vectoriel sur la variété selon la connexion de Levi-Civita définie par le ds^2 associé au générateur infinitésimal ; l'enroulement se fait en passant par le fibré des repères tangents à la variété, ce qui, en quelque sorte, la rend parallélisable. J'en indique une nouvelle méthode ici ; une variété de dimension N est plongeable dans $\mathbb{R}^{2N}$ (Whitney), donc admet 2N champs de vecteurs tangents qui, en chaque point, engendrent l'espace tangent ; le remplacement d'un repère tangent de N vecteurs par ce système de 2N vecteurs, générateurs mais non indépendants, permet de traiter d'un seul coup le cas d'une variété, sans utiliser de connexion et sans même traiter d'abord le cas vectoriel. En outre, l'opérateur différentiel sera de rang constant r, non nécessairement maximum. Et tout est très simple !

§ 1. UN LEMME SUR LES APPLICATIONS BILINEAIRES SYMETRIQUES $\geqslant 0$.

(1.0) Soit E un espace euclidien de dimension n, et soit $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ une base de E. Soit $\mathfrak{A}$ (resp. $\overset{+}{\mathfrak{A}}$, resp. $\overset{+}{\mathfrak{A}}{}^r$) l'espace des opérateurs symétriques (hermitiens) de E (resp. des opérateurs symétriques $A \geqslant 0$, $(Ax|x) \geqslant 0$ pour tout x, resp. des opérateurs symétriques $\geqslant 0$ de rang r). Soit 0^r le sous-espace ouvert de $\mathfrak{A}$, formé des opérateurs de rang $\geqslant r$; comme l'ensemble des opérateurs de rang $\leqslant r$ est fermé, et aussi l'ensemble des opérateurs $\geqslant 0$, $\overset{+}{\mathfrak{A}}{}^r$ est fermé dans 0^r. Soit P l'ensemble des parties à r éléments de $\{1,2,\dots,n\}$; pour $p \in P$, soit E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_k, $k \in p$, et soit 0_p^r l'ouvert de $\mathfrak{A}$ formé des opérateurs A qui sont >0 sur E_p ($(Ax|x) > 0$ pour $x \neq 0$ dans E_p).

Si $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r_p = \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r \cap O^r_p$, $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r = \bigcup_{p\in P} \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r_p$; car, si $A \in \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, son noyau est de dimension n-r, donc il existe un E_p, $p \in P$, qui en est supplémentaire, et alors $A > 0$ sur E_p, donc $A \in O^r_p$. L'espace $\bigcup_{p\in P} O^r_p$ n'a pas de signification intrinsèque, indépendante de la base choisie pour E, mais c'est un voisinage ouvert de $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$.

<u>*PROPOSITION (1.1)*</u> : Sur $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, la fonction $\sqrt{\ }: A \mapsto \sqrt{A}$ est la restriction d'une application C^∞ de O^r dans $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\overset{+}{\mathcal{A}}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $A \in O^r_p$. Soit $F^{n-r}(A)$ le sous-espace intersection des noyaux des formes linéaires $(Ae_k|.)$, $k \in p$; ces formes linéaires sont indépendantes parce que $A \in O^r_p$, donc $F^{n-r}(A)$ est de dimension n-r, et comme ces formes linéaires dépendent C^∞ de A, $A \mapsto F^{n-r}(A)$ est C^∞ de O^r_p dans la grassmannienne Gr(E) de E. Soient u_A, v_A les projecteurs orthogonaux de E, d'images $(F^{n-r}(A))^+$ (orthogonal de $F^{n-r}(A)$) et $F^{n-r}(A)$ respectivement ; $A \mapsto u_A$, $A \mapsto v_A$, sont des applications C^∞ de O^r_p dans $\mathcal{A}$. L'opérateur $u_A A^2 u_A + v_A$ dépend C^∞ de A sur O^r_p. Il est symétrique > 0 sur E. En effet, il laisse stables $(F^{n-r}(A))^+$ et $F^{n-r}(A)$; sur le deuxième, il est l'identité, et, si $x \in (F^{n-r}(A))^+$, $(u_A A^2 u_a x|x) = \|A u_A x\|^2 = \|Ax\|^2$, il est ≥ 0 et ne peut être nul que si $x \in \operatorname{Ker} A$; comme $\operatorname{Ker} A \subset F^{n-r}(A)$, $x = 0$, donc l'opérateur est bien > 0 sur $F^{n-r}(A)$ et $(F^{n-r}(A))^+$ donc sur E. Mais la racine quatrième $\sqrt[4]{\ }$ est une application C^∞ sur l'espace ouvert des opérateurs > 0, donc $A \to A^\bullet = u_A \sqrt[4]{u_A A^2 u_A + v_A}$ est C^∞ de O^r_p dans $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\overset{+}{\mathcal{A}}$. Mais, sur $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r_p = \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r \cap O^r_p$, c'est la fonction $\sqrt{\ }$, $A \mapsto \sqrt{A}$. En effet, si $A \in \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, $\operatorname{Ker} A \subset F^{n-r}(A)$ et $\dim \operatorname{Ker} A = n-r$, donc $F^{n-r}(A) = \operatorname{Ker} A$; sur Ker A, $A^\bullet = 0$, et, sur $(\operatorname{Ker} A)^+$, $A^\bullet = \sqrt[4]{A^2} = \sqrt{A}$. Ensuite $O^r = (\bigcup_{p\in P} O^r_p) \cup (O^r \setminus \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r)$, tous ouverts, et, dans chacun d'eux, il existe une application à valeurs dans $\overset{+}{\mathcal{A}}$, qui est C^∞ à valeurs dans $\mathcal{A}$, et qui vaut $\sqrt{\ }$ sur $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$ (dans $O^r \setminus \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, c'est la fonction nulle). Une partition C^∞ de l'unité donnera une application de O^r dans $\overset{+}{\mathcal{A}}$, C^∞ à valeurs dans $\mathcal{A}$, valant $\sqrt{\ }$ sur $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$. ∎

<u>*PROPOSITION (1.2)*</u> : Si A symétrique ≥ 0 est une fonction C^2 d'un paramètre λ parcourant une variété de classe C^2, $\sqrt{A}$ est une fonction lipschitzienne de λ (lipschitz voudra toujours dire localement lipschitz).

Démonstration : Voir Marc YOR et P. PRIOURET [1], Appendice au chapitre III, théorème III, page 82. ■

Remarque : Par contre, $\sqrt{A}$ n'est pas en général fonction C^1 du paramère λ. En effet, prenons $n=1$, alors $\mathcal{A}=\mathbb{R}$, $\overset{+}{\mathcal{A}}=\mathbb{R}_+$. Prenons $\lambda=(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $A=u^2+v^2$, fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Alors $\sqrt{A}=\sqrt{u^2+v^2}$ n'est pas fonction C^1 de (u,v) au voisinage de $(0,0)$.

(1.3) Appelons $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\overset{+}{\mathcal{A}}}$, $\overline{\overset{+}{\mathcal{A}}}{}^r$, $\overline{0}^r$ ce que nous appelions auparavant $\mathcal{A}$, $\overset{+}{\mathcal{A}}$, $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, 0^r. Appelons alors $\mathcal{A}$ l'espace des formes bilinéaires A symétriques sur $E\times E$, $A(x,y)=A(y,x)$; $\overset{+}{\mathcal{A}}$ sera le sous-ensemble des formes bilinéaires $\geqslant 0$, $A(x,x)\geqslant 0$ pour tout x ; A est de rang r si le sous-espace isotrope de A, c-à-d. l'ensemble des x A-orthogonaux à tout l'espace, $A(x,y)=0$ pour tout y, est de dimension n-r (si $A\geqslant 0$, par l'inégalité de Schwarz, x est isotrope dès que $A(x,x)=0$) ; donc on aura des espaces $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, 0^r, 0^r ouvert, $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$ fermé dans 0^r. Par contre, pour $A\in\overset{+}{\mathcal{A}}$, $\sqrt{A}$ n'a pas de sens. Mais établissons sur E une structure euclidienne, et soit e_k, $k=1,2,\dots,n$, une base orthonormée. On établit ainsi une correspondance bijective $A\mapsto\overline{A}$ entre formes bilinéaires et opérateurs, par $(\overline{A}x|y)=A(y,x)$; elle envoie bijectivement $\mathcal{A}$, $\overset{+}{\mathcal{A}}$, $\overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, 0^r sur $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\overset{+}{\mathcal{A}}}$, $\overline{\overset{+}{\mathcal{A}}}{}^r$, $\overline{0}^r$. Si A est défini par le tableau $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$, $\overline{A}$ est défini par la matrice $a=(a_{i,j})$, $(\overline{A}e_j|e_i)=A(e_i,e_j)=a_{i,j}$. Soit S une forme bilinéaire, $S(e_i,e_j)=\sigma_{i,j}$, $\overline{S}$ son opérateur associé. La relation $\overline{S}\,\overline{S}^*=\overline{A}$ (où $\overline{S}^*$ est le transposé de $\overline{S}$; cette relation s'écrit $\overline{S}^2=\overline{A}$ si $S\in\mathcal{A}$, $\overline{S}=\sqrt{\overline{A}}$ si $S\in\overset{+}{\mathcal{A}}$) s'écrit alors $a_{i,j}=\sum_{\ell=1}^{n}\sigma_{i,\ell}\,\sigma_{j,\ell}$. Appelons alors σ_ℓ la forme linéaire sur E, $\sigma_\ell\in E^*$, telle que $\sigma_\ell(e_k)=\sigma_{k,\ell}$, $\overline{S}\,\overline{S}^*=\overline{A}$ s'écrit, pour $x=\sum_{k=1}^{n}x_k\,e_k$,

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\,x_i\,x_j=\sum_{i,j,\ell=1}^{n}\sigma_{i,\ell}\,x_i\,\sigma_{j,\ell}\,x_j=$$

$$=\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k,\ell}\,x_k\Big)^2=\sum_{\ell=1}^{n}(\sigma_\ell(x))^2\ ,$$

ou une décomposition en carrés : $A=\sum_{\ell=1}^{n}\sigma_\ell^2$ (forme quadratique $\geqslant 0$ = somme de n carrés de formes linéaires). Ceci est maintenant indépendant de toute structure euclidienne, et, de (1.1) et (1.2), on déduit une forme affaiblie (puisqu'on remplace $\overline{S}=\sqrt{\overline{A}}$ par

$\overline{A} = \overline{SS^*}$) :

PROPOSITION (1.4) : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Il existe des applications $A \mapsto \sigma_\ell(A)$, où $\sigma_\ell = \sigma_\ell(A)$ est une forme linéaire sur E, $\sigma_\ell(A) \in E^*$, qui sont C^∞ de $\overset{+}{O}{}^r$ dans E^*, telles que pour tout $A \in \overset{+}{\mathcal{A}}{}^r$, forme bilinéaire symétrique $\geqslant 0$ de rang r,

$$A = \sum_{\ell=1}^{n} (\sigma_\ell(A))^2 \quad , \quad a_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{i,\ell}\, \sigma_{j,\ell} \quad .$$

Si $A \in \overset{+}{\mathcal{A}}$ dépend C^2 d'un paramètre λ parcourant une variété C^2, il existe une décomposition $A = \sum_{\ell=1}^{n} (\sigma_\ell(A))^2$, où les σ_ℓ sont des fonctions lipschitziennes de λ (lipschitz voudra toujours dire localement lipschitz), en général non C^1.

§ 2. CHAMPS DE VECTEURS REGULIERS ENGENDRANT EN CHAQUE POINT L'ESPACE 2-TANGENT SUR UNE VARIETE.

Soit V une variété de classe C^2-lipschitz, de dimension N. Elle n'est pas en général parallélisable, mais, si elle est de dimension N, elle est plongeable dans un espace vectoriel E de dimension n, qu'on peut choisir égal à 2N, donc son fibré tangent $T^1(V)$ est sous-fibré facteur direct du fibré trivial $V \times E$, et son fibré 2-tangent $T^2(V)$ du fibré trivial $V \times (E \oplus (E \odot E))$, donc il existe un système de n champs de vecteurs 1-tangents C^1-lipschitz et de $n + \frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs 2-tangents lipschitz, engendrant en chaque point l'espace 1-tangent et l'espace 2-tangent respectivement ; le fait que n soit $\geqslant$ N et non égal à N est, comme on le verra, sans importance (lipschitz voudra toujours dire localement lipschitz).

PROPOSITION (2.1) : Supposons V plongée dans un espace vectoriel E, de dimension n. Il existe un morphisme $\overset{1}{\varpi}$, de classe C^1-lipschitz, du fibré trivial $V \times X$ sur le fibré $T^1(V)$, et un morphisme $\overset{2}{\varpi}$, lipschitz, du fibré trivial $V \times (E \oplus (E \odot E))$ sur le fibré $T^2(V)$, ayant les propriétés suivantes :

1) $\overset{1}{\varpi}$ et $\overset{2}{\varpi}$ sont des projections : $\overset{1}{\varpi}$ est l'identité sur $T^1(V) \subset V \times E$, $\overset{2}{\varpi}$ est l'identité sur $T^2(V) \subset V \times (E \oplus (E \odot E))$;

2) $\overset{2}{\varpi}$ induit $\overset{1}{\varpi}$ sur $V \times E$, et $\pi\overset{2}{\varpi} : V \times (E \odot E) \xrightarrow{\overset{2}{\varpi}} T^2(V) \xrightarrow{\pi} T^2(V)/T^1(V) = T^1(V) \odot T^1(V)$ est $\overset{1}{\varpi} \circledcirc \overset{1}{\varpi}$ (2). (π est la projection canonique).

3) Si V est C^{m+2}, on peut prendre $\overset{1}{\varpi}$ C^{m+1} et $\overset{2}{\varpi}$ C^m, $m \geq 0$.

Démonstration : Donnons-nous une structure euclidienne sur E, et, pour $v \in V$, soit $\varpi_1(v)$ la projection orthogonale de E sur $T^1(V;v)$; $\overset{1}{\varpi}$ est bien de classe C^1-lipschitz et c'est une projection. Alors $\overset{1}{\varpi}(v) \circledcirc \overset{1}{\varpi}(v)$ est une projection de $E \odot E$ sur $T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$. Soit ρ un relèvement linéaire lipschitzien de $T^1(V) \odot T^1(V)$ dans $T^2(V)$: $\rho(v)$ est linéaire de $T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$, et $\pi(v)\,\rho(v)$ est l'identité de $T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$. Posons $\overset{2}{\varpi}' = \overset{1}{\varpi}$ sur E, $\rho(\overset{1}{\varpi} \circledcirc \overset{1}{\varpi})$ sur $E \odot E$. Il est linéaire lipschitzien de $V \times (E \oplus (E \odot E))$ sur $T^2(V)$, il induit $\overset{1}{\varpi}$ sur $V \times E$, et $\pi\rho(\overset{1}{\varpi} \circledcirc \overset{1}{\varpi}) = \overset{1}{\varpi} \circledcirc \overset{1}{\varpi}$. Mais $\overset{2}{\varpi}'$ n'est pas forcément l'identité sur $T^2(V)$, ce n'est pas forcément une projection. Cependant, $\overset{2}{\varpi}' = \overset{1}{\varpi}$ sur E, donc est l'identité sur $T^1(V)$; ensuite, envoyant $T^1(V)$ sur $T^1(V)$ et $T^2(V)$ sur $T^2(V)$, il envoie $T^2(V)/T^1(V) = T^1(V) \odot T^1(V)$ sur $T^1(V) \odot T^1(V)$, et est égal en tant que tel à $\overset{1}{\varpi} \circledcirc \overset{1}{\varpi} =$ identité. Donc $\overset{2}{\varpi}'$, restreint à $T^2(V) \to T^2(V)$, est inversible ; en effet, si $L \in T^2(V;v)$, et $\overset{2}{\varpi}'(v)L = 0$, d'abord $\pi(v)\overset{2}{\varpi}'(v)L = 0$, donc $\pi(v)L = 0$ puisque $\overset{2}{\varpi}'(v)$ est l'identité sur le quotient, donc $L \in T^1(V;v)$; puisque $\overset{2}{\varpi}'(v)$ est l'identité sur $T^1(V;v)$, $L = 0$. Soit $\theta(v) : T^2(V;v) \to T^2(V;v)$ l'inverse de cet opérateur inversible ; θ est linéaire lipschitzien de $T^2(V)$ sur $T^2(V)$, et il a les mêmes propriétés que $\overset{2}{\varpi}'$, il est l'identité sur $T^1(V)$ et sur $T^2(V)/T^1(V)$. Alors $\overset{2}{\varpi} = \theta\ \overset{2}{\varpi}'$ répond à la question. Si V est C^{m+2}, $\overset{1}{\varpi}$ est C^{m+1}, ρ peut être choisi C^m, alors $\overset{2}{\varpi}$ est C^m. ■

COROLLAIRE (2.2) : Toute semi-martingale X sur V est solution globale d'une équation différentielle stochastique à champs lipschitziens si V est C^2-lipschitz, à champs C^m si V est C^{m+2}. (3)

Démonstration : Soit $(e_k)_{k=1,2,\dots,n}$ une base de E ; X est une semi-martingale à valeurs dans E, soient $(Z_k)_{k=1,2,\dots,n}$ ses coordonnées. Alors

$$\underline{dX} = \begin{pmatrix} dX \\ \\ \frac{1}{2}\, d[X,X] \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} e_k\, dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (e_i \odot e_j)\, d[Z^i, Z^j] \ .$$

Mais, X étant sur V, $\underline{dX} = \overset{2}{\varpi}(X)\underline{dX}$, donc

$$\underline{dX} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k(X)\, dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{i,j}(X)\, d[Z^i, Z^j] \quad ,$$

où $\eta_k(X) = \overset{1}{\varpi}(X)\, e_k$, $\eta_{i,j}(X) = \overset{2}{\varpi}(X)\,(e_i \odot e_j)$; il résulte des propriétés de $\overset{2}{\varpi}$ que l'image $\pi(X)\, \eta_{i,j}(X)$ de $\eta_{i,j}(X)$ dans $T^2(V;X)/T^1(V;X)$ est $\eta_i(X) \odot \eta_j(X)$. ■

Nous retiendrons pour la suite le fait fondamental que les η_k sont n champs de vecteurs 1-tangents à V engendrant en tout point l'espace vectoriel 1-tangent, les $\eta_{i,j}$ $n+\frac{n(n+1)}{2}$ champs de vecteurs 2-tangents engendrant en tout point l'espace 2-tangent, et que $\pi\, \eta_{i,j} = \eta_i \odot \eta_j$. Ils sont définis indépendamment de X ; seules les Z^k dépendent de X. Si X n'est définie que dans un intervalle stochastique $[0,\tau[$, les Z^k de même. Si V est C^{m+2}, on peut prendre les η_k de classe C^{m+1}, $\eta_{i,j}$ de classe C^m.

§ 3. MARTINGALES QUI SONT DES INTEGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT AU MOUVEMENT BROWNIEN.

Soient Ω, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{T}$, $\mathbb{P}$, ayant la signification habituelle et dM une différentielle de martingale (4) à valeurs dans un fibré vectoriel (de dimension finie) G optionnel sur un intervalle stochastique $[0,\tau[$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $0 < \tau \leqslant +\infty$. On appelle système n-élargi un système :

$$\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega' \quad , \quad \overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}' \quad , \quad \overline{\mathfrak{T}} = (\overline{\mathfrak{T}}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_t}$$

avec
$$\overline{\mathfrak{T}}_t = \bigcap_{u>t} (\mathfrak{T}_u \otimes \mathfrak{T}'_u) \quad , \quad \overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}' \quad ,$$

$$d\overline{M}(\omega,\omega') = dM(\omega) \quad , \quad \overline{\tau}(\omega,\omega') = \tau(\omega) \quad ,$$

où $(\Omega',\mathcal{O}',\mathfrak{T}',\mathbb{P}')$ admet un mouvement brownien normal B' à valeurs dans un espace R^n, de base $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Pour n donné, il y a une infinité de tels systèmes élargis, mais la loi $B'(\mathbb{P}')$ du brownien B' est toujours la même, sur $C([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$, c'est la mesure de Wiener ; on posera $\overline{B}'(\omega,\omega') = B'(\omega')$. S'il se trouve que Ω, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{T}$, $\mathbb{P}$ porte un brownien B, alors il ne sera pas nécessaire d'introduire Ω', $\mathcal{O}'$, $\mathfrak{T}'$, $\mathbb{P}'$, et on prendra Ω, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{T}$, $\mathbb{P}$, eux-mêmes au lieu de $\overline{\Omega}$, $\overline{\mathcal{O}}$, $\overline{\mathfrak{T}}$, $\overline{\mathbb{P}}$, B au lieu de B', $\overline{B}$ encore défini sur Ω par la même formule : il n'y a de "barre" ni de "prime" nulle part, sauf pour $\overline{B}$.

Soit ensuite σ un morphisme optionnel du fibré trivial $[0,\tau[\times\mathbb{R}^n$ dans G ; $\sigma(t,\omega)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;G(t,\omega))$. Son carré tensoriel $\sigma\circledast\sigma$ est un morphisme de $[0,\omega[\times(\mathbb{R}^n\odot\mathbb{R}^n)$ dans $G\odot G$. On posera $\overline{\sigma}(t,\omega,\omega')=\sigma(t,\omega)$. A la forme quadratique fondamentale sur $\mathbb{R}^n$ on peut associer sa forme duale sur $(\mathbb{R}^n)^*=\mathbb{R}^n$, correspondant à l'élément $\Theta=e_1\odot e_1+\ldots+e_n\odot e_n$ de $\mathbb{R}^n\odot\mathbb{R}^n$. La forme quadratique sur $(\mathbb{R}^n)^*$ est $\xi\mapsto\frac{1}{2}(\xi\odot\xi)\Theta$, Θ est l'opérateur différentiel Δ sur $\mathbb{R}^n$, Δ laplacien.

PROPOSITION (3.1) : Pour que

$$d[M,M]^{(5)}=(\sigma\circledast\sigma)\Theta\,dt\quad\text{dans }[0,\tau[\;,\tag{3.2}$$

il faut et il suffit que

$$d\overline{M}=\overline{\sigma}\,d\overline{B}\quad\text{dans }[0,\overline{\tau}[\;,\tag{3.3}$$

où $\overline{B}$ est un brownien normal sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{O}},\overline{\mathcal{T}},\overline{\mathbb{P}})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et alors on peut prendre $\overline{B}$ défini par (3.4).

Démonstration : Si l'on a (3.3), (3.2) est évident, car alors $d[\overline{M},\overline{M}]=(\overline{\sigma}\circledast\overline{\sigma})\,d[\overline{B},\overline{B}]=(\overline{\sigma}\circledast\overline{\sigma})\Theta\,dt$ dans $[0,\overline{\tau}[$, d'où (3.2) parce que $d\overline{M}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$, ne dépendent pas de ω'.

Inversement, supposons (3.2).

Cela entraîne que la différentielle dM soit tangente à $\operatorname{Im}\sigma$, $dM(t,\omega)\in\sigma(t,\omega)(\mathbb{R}^n)$ (au sens symbolique de SCHWARTZ [2], avant proposition (2.5)). En effet, $d[M,M]$ est tangente à $\operatorname{Im}(\sigma\circledast\sigma)$; si alors ρ est un morphisme du fibré G dans un autre, de noyau $\operatorname{Im}\sigma$ (par exemple, relativement à une structure euclidienne optionnelle sur G, ρ projecteur orthogonal de G sur l'orthogonal $(\operatorname{IM}\sigma)^{\perp}$ de $\operatorname{Im}\sigma$), $(\rho\circledast\rho)\,d[M,M]=(\rho\circledast\rho)(\sigma\circledast\sigma)\Theta\,dt=(\rho\sigma\circledast\rho\sigma)\Theta\,dt=0$; si $dN=\rho\,dM$, on voit que $d[N,N]=0$

donc $dN = \rho dM = 0$, dM est bien tangente à $\mathrm{Im}\,\sigma$. On pourra donc remplacer G par le fibré vectoriel $\mathrm{Im}\,\sigma$, et supposer que, pour tous $(t,\omega) \in [0,\tau[$, $\sigma(t,\omega) : \mathbb{R}^n \to G(t,\omega)$ est surjective. Elle est alors bijective de $(\mathrm{Ker}\,\sigma(t,\omega))^+$, orthogonal de $\mathrm{Ker}\,\sigma(t,\omega)$ dans $\mathbb{R}^n$, sur $G(t,\omega)$; soit $\sigma^{-1}(t,\omega) : G(t,\omega) \mapsto (\mathrm{Ker}\,\sigma(t,\omega))^+$ son inverse. Alors $\sigma^{-1}\sigma$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $(\mathrm{Ker}\,\sigma)^+$, tandis que $\sigma\sigma^{-1}$ est l'identité de G. Nous définirons $\overline{B}$, si K est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Ker}\,\sigma$, $\sigma^{-1}\sigma = 1-K$, par :

$$(3.4) \qquad d\overline{B} = (\overline{\sigma}^{-1}\, d\overline{M} + \overline{K}\, d\overline{B}')\, 1_{[0,\overline{\tau}[} + d\overline{B}'\, 1_{[\overline{\tau},+\infty[} \quad .$$

Bien évidemment $d\overline{B}$ est une différentielle de martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Calculons son crochet. Comme $(d\overline{M},\overline{\tau})$ et $d\overline{B}'$ sont indépendantes, $d[\overline{M},\overline{B}']=0$; le crochet de la première expression du 2nd membre est :

$$(\overline{\sigma}^{-1} \circledast \overline{\sigma}^{-1})\, d[\overline{M},\overline{M}]\, 1_{[0,\overline{\tau}[} + \overline{K} \circledast \overline{K}\, d[\overline{B}',\overline{B}']\, 1_{[0,\overline{\tau}[} =$$

$$= (\text{par } (3.2))\ (\overline{\sigma^{-1}\sigma \circledast \sigma^{-1}\sigma}\, \Theta\, dt + \overline{K \circledast K}\, \Theta\, dt)\, 1_{[0,\overline{\tau}]} \quad ;$$

il est indépendant de ω' ; et Θ peut s'écrire $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \circledast \varepsilon_i$, où $(\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n}$ est n'importe quelle base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, en particulier une base formée de vecteurs de $(\mathrm{Ker}\,\sigma)^+$ suivis de vecteurs de $\mathrm{Ker}\,\sigma$, et alors, comme $\sigma^{-1}\sigma = 1-K$, la parenthèse vaut Θ, et la première expression $\Theta\, 1_{[0,\overline{\tau}[}\, dt$. Ensuite $d[\overline{B}',\overline{B}']\, 1_{[\overline{\tau},+\infty[} = \Theta\, 1_{[\overline{\tau},+\infty[}\, dt$.
Le crochet mixte des 2 termes du 2nd membre est nul, puisqu'il contient en facteur $1_{[0,\overline{\tau}[}\, 1_{[\overline{\tau},+\infty[}$. Finalement $d\overline{B} = \Theta\, dt$. Donc $\overline{B}$ est un brownien normal. [Ceci est connu pour $\overline{B}$ martingale (sous-entendu : locale continue), mais c'est vrai aussi pour $d\overline{B}$ différentielle de martingale. Cela repose sur le lemme : si N est une martingale <u>formelle</u>, et si $[N,N]$ est un <u>vrai</u> processus à variation finie, N est une <u>vraie</u> martingale. En effet, il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties optionnelles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, de réunion $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, telle que $1_{A_n} \cdot N$ soit une vraie martingale, et que N en soit la limite dans l'espace des martingales formelles. Mais elles forment une suite de Cauchy dans l'espace des vraies martingales, car, pour $n \geqslant m$:

$$[1_{A_n}\cdot N-1_{A_m}\cdot N,\ 1_{A_n}\cdot N-1_{A_m}\cdot N]_\infty$$

$$= (1_{A_n-A_m}\cdot[N,N]) \quad \text{et } [N,N] \text{ est un vrai processus} \quad .\ ^{(6)}\ ]$$

D'autre part :

$$1_{[0,\bar{\tau}[}\ \bar{\sigma}\ d\bar{B} = (\overline{\sigma\sigma^{-1}}\ d\bar{M}+\overline{\sigma K}\ d\bar{B}')\ 1_{[0,\bar{\tau}[} = d\bar{M} \qquad (\sigma\sigma^{-1}=1, \quad K=0) \quad ;$$

donc $\bar{\sigma}\ d\bar{B}=d\bar{M}$ dans $[0,\bar{\tau}[$. ■

<u>Remarque</u> : Le fait que G soit fibré au lieu d'être un vectoriel est une généralisation banale, puisqu'un fibré optionnel de dimension fixe finie est trivial.

§ 4. <u>EXISTENCE ET UNICITE DE LA DIFFUSION SUR UNE VARIETE.</u>

Soit V une variété C^2-lipschitz, L un opérateur différentiel d'ordre 2, sans terme d'ordre 0, à coefficients lipschitziens, semi-elliptique de rang constant r. En tout point v de V, $L(v)\in T^2(V;v)$ et son image $\pi(v)\ L(v)$ dans $T^1(V;v)\odot T^1(V;v)$ définit une forme bilinéaire $\geqslant 0$ de rang r sur $T^1{*}(V;v)\times T^1{*}(V;v)$.

Utilisons la situation du § 2, avec les mêmes notations. Le vecteur L(v) est dans $T^2(V;v)\subset E\oplus(E\odot E)$, donc s'écrit, d'une manière unique, dans ce dernier espace, sous la forme

$$(4.1) \qquad L(v) = \sum_{k=1}^{n} b^k(v)\ e_k+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(v)\ e_i\odot e_j \quad ,$$

$$a^{j,i} = a^{i,j} \quad . \qquad (7)$$

Comme il est dans $T^2(V;v)$, il s'écrit donc aussi

$$L(v) = \overset{2}{\varpi}(v)\ L(v) = \sum_{k=1}^{n} b^k(v)\ \eta_k(v)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(v)\ \eta_{i,j}(v) \quad .$$

Ici l'écriture ne serait pas unique, mais peu importe, nous prenons celle-là, et les b^k, η^k, $a^{i,j}$, $\eta_{i,j}$ sont lipschitziens sur V, C^m si L est C^m et V C^{m+2}. Supprimons v :

$$(4.2) \qquad L = \sum_{k=1}^{n} \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}\, \eta_{i,j} \quad .$$

Mais $(a^{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ est le tableau des coefficients d'une forme bilinéaire $\geqslant 0$ de rang constant r sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. D'après la proposition (1.4), il existe une décomposition en carrés, $a^{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell^i\, \sigma_\ell^j$, où les σ_ℓ^i sont des fonctions réelles lipschitziennes sur V, C^m si L est C^m. Si V est C^4 et L C^2, même de rang non constant, on peut faire de même, les σ_ℓ^k sont encore lispchitziennes, mais elles ne sont pas en général C^1. Finalement

$$(4.3) \qquad L = \sum_{k=1}^{n} b^k\, \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell^i\, \sigma_\ell^j\, \eta_{i,j} \quad ,$$

et l'image πL de L dans $T^1 \odot T^1$ est

$$(4.3\text{bis}) \qquad \pi L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell^i\, \sigma_\ell^j\, \eta_i \odot \eta_j \quad .$$

Si $\sigma(v)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $T^1(V;v)$ qui, à l'élément ε_ℓ de la base canonique $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$, fait correspondre $\sum_{k=1}^{n} \sigma_\ell^k(v)\ \eta_k(v)$, on voit que, toujours en appelant Θ l'élément $\sum_{\ell=1}^{n} \varepsilon_\ell \odot \varepsilon_\ell$ de $\mathbb{R}^n \odot \mathbb{R}^n$, l'image de L dans le quotient $T^1 \odot T^1$ est

$$(4.4) \qquad \pi L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell^i\, \sigma_\ell^j\, \eta_i \odot \eta_j = \frac{1}{2}\, (\sigma \circledcirc \sigma) \quad \Theta \ .$$

On appelle $\hat{V}$ le compactifié d'Alexandroff $V \cup \{\infty\}$ de V, et $C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$ le sous-espace de $C([0,+\infty[;\hat{V})$ formé des trajectoires continues à valeurs dans $\hat{V}$ qui, dès qu'elles atteignent ∞, y restent. On le munit des tribus naturelles, et du processus canonique θ, $\theta_t(w) = w_t$ pour $w \in C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$. Le temps d'atteinte de ∞, $\zeta = \operatorname{Inf}\{t;\theta_t=\infty\}$ est appelé temps de mort. C'est un temps d'arrêt prévisible : si

$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de compacts de V, telle que tout compact soit contenu dans l'un d'entre eux, et si ζ_n est le temps de sortie de θ du compact K_n, les $\zeta_n \wedge n$ annoncent ζ. On dit qu'une probabilité $\mathbb{P}^x$ sur $C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$, $x\in V$, est une diffusion pour L, x, si $\mathbb{P}^x$ ps. $\theta_o = x$, et si le processus M :

$$M_{t,\varphi} = \varphi(\theta_t) - \int_{]0,t]} L\varphi(\theta_u)\ du \quad ,$$

est une $\mathbb{P}^x$-martingale locale continue dans $[0,\zeta[$. Si ζ_n est défini comme ci-dessus, $\zeta_n < \zeta$ pour $\zeta < +\infty$, le processus arrêté M^{ζ_n}, prolongé à $[0,+\infty[\times C^{\cdot}([0,\infty[;\hat{V})$, est une martingale continue vraie sur $[0,+\infty[\times C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$, car il est une martingale locale continue, bornée aux temps bornés. Il en est de même pour M elle-même, sans qu'il soit besoin de l'arrêter, si φ est à support compact, avec $\varphi(\infty) = L\varphi(\infty) = 0$, pour la même raison, car M est limite des M^{ζ_n}, toutes bornées aux temps bornés. Cette condition, restreinte aux φ à support compact, est équivalente à l'autre. Cette condition de martingale s'écrit aussi : pour $\mathbb{P}^x$, $\underline{d\tilde{\theta}} = L(\theta)\ dt$ (8). En effet, elle exprime que $d(\varphi(\theta)) - (L\varphi)(\theta)dt$ est une différentielle de martingale scalaire ; mais, par Ito, $d(\varphi(\theta)) = ((D^2\varphi)(\theta)\,|\underline{d\theta})$, $(L\varphi)(\theta) = ((D^2\varphi)(\theta)\,|L(\theta))$, $(\ |\ )$ étant le produit scalaire de dualité entre $T^{2*}(V)$ et $T^2(V)$; donc, pour toute φ, $((D^2\varphi)(\theta)\,|\underline{d\theta} - L(\theta)dt)$ est une différentielle de martingale scalaire ; comme les $(D^2\varphi)(\theta)$ Opt-engendrent localement $\mathrm{Opt}(\mathbb{R}_+\times\Omega\ ;\theta;T^2(V))$ (voir Schwartz [1], démonstration de la proposition (2.7) p. 17), cela exprime que $\underline{d\tilde{\theta}} - L(\theta)dt$ est une différentielle de martingale, ou $\underline{d\tilde{\theta}} - L(\theta)dt = 0$.

PROPOSITION (4.5) : 1) Soit $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{T},\mathbb{P},B)$ un système habituel, où B est un brownien normal à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit X une semi-martingale à valeurs dans V, définie sur un intervalle stochastique $[0,\tau[$, τ temps d'arrêt, vérifiant, dans $[0,\tau[$, l'équation différentielle stochastique suivante, où L s'écrit (4.3) :

$$(4.6)\qquad \underline{dX} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \eta_k(X)\ \sigma_\ell^k(X)\ dB^\ell + L(X)\ dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \eta_k(X)(b^k(X)\ dt + \sigma_\ell^k(X)\ dB^\ell)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell^i(X)\ \sigma_\ell^j(X)\ \eta_{i,j}(X)\ dt$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} \eta_k(X)\ b^k(X))\ dt + \sum_{\ell=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} \eta_k(X)\ \sigma_\ell^k(X))\ dB^\ell$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}(\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_\ell^i(X)\ \sigma_\ell^j(X)\ \eta_{i,j}(X))\ dt$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} \eta_k(X)\ b^k(X))\ dt + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(X)\ \sigma_\ell^k(X))\ dB^\ell$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\ell,\ell'=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_\ell^i(X)\ \sigma_{\ell'}^i(X)\ \eta_{i,j}(X))\ d[B^\ell, B^{\ell'}] \quad . \qquad (9)$$

Alors $\underline{d\widetilde{X}} = L(X)\ dt$ dans $[0,\tau[$. Si les b^k et les σ_ℓ^k sont lipschitz, si X^x est la solution qui part de x à l'instant 0, si τ est son temps de mort ζ^x, et si on pose $X_t^x = \infty$ pour $t \geq \zeta^x$ si $\zeta^x < +\infty$, l'image $\mathbb{P}^x = X^x(\mathbb{P})$ dans $C^\bullet([0,+\infty[;\hat{V})$ est une diffusion pour L, x .

2) Inversement, soit $\mathbb{P}^x$ une diffusion pour L, x (c-à-d. pour le processus canonique θ sur $C^\bullet([0,+\infty[;V))$. Si on construit un système n-élargi (suivant le § 3), où $\overline{B}$ est défini suivant (3.4) (brownien pour $\overline{\mathbb{P}}^x = \mathbb{P}^x \otimes \mathbb{P}'$, sur $\overline{\Omega} = C^\bullet([0,+\infty[;\hat{V}) \times \Omega')$, alors $\overline{\theta}$ est la solution de (4.6) à valeurs dans $\hat{V}$, où X est remplacé partout par $\overline{\theta}$, avec la condition initiale x, $\overline{\theta}_o = x$ $\overline{\mathbb{P}^x}$ ps., et $\overline{\zeta}$ est son temps de mort ; $\mathbb{P}^x = \overline{\theta}(\overline{\mathbb{P}^x})$.

3) Si les b^k et σ_ℓ^k sont lipschitz, par exemple si $L \geq 0$ est lipschitz de rang constant r ou si $L \geq 0$ est C^2, il existe pour tout L et tout x, une diffusion $\mathbb{P}^x$ et une seule.

<u>Démonstration</u> : 1) Que (4.6) entraîne $\underline{d\widetilde{X}} = L(X)\ dt$ est évident. Ensuite, $\mathbb{P}$ ps. $X_o^x = x$, et, quand $t < \tau = \zeta^x < +\infty$ tend vers ζ^x, X_t^x tend vers ∞, on peut donc poser $X_t^x = \infty$ si $t \geq \zeta^x$ et $\zeta^x < +\infty$, X^x reste $\mathbb{P}$-ps. continue, à valeurs dans $\hat{V}$, et reste en ∞

dès qu'elle l'a atteint ; alors $\mathbb{P}^x = X^x(\mathbb{P})$ est une probabilité sur $C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$; $\mathbb{P}^x$ - ps. $\theta_o = x$; et, si $w = X^x(\omega)$, $w \in C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$, $\zeta^x(\omega)$ est le temps de mort $\zeta(w)$. Pour vérifier la condition de diffusion, le plus simple ici est de l'écrire sous forme de problème des martingales. Puisque $\underline{d}\tilde{X}^x - L(X)\, dt = 0$, pour $\mathbb{P}$, dans $[0,\zeta^x[$, pour toute fonction φ réelle C^2 sur V à support compact, $t \mapsto \varphi(X^x_t) - \int_{]0,t]} L\varphi(X^x_u)\, du$ est une $\mathbb{P}$-martingale dans $[0,+\infty[\times\Omega$, avec $\varphi(\infty) = L\varphi(\infty) = 0$; cela entraîne aussitôt que $t \mapsto \varphi(\theta_t) - \int_{]0,t]} L\varphi(\theta_u)\, du$ est une $\mathbb{P}^x$-martingale dans $[0,+\infty[\times C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$.

2) Supposons inversement que $\mathbb{P}^x$ soit une diffusion pour L, x. De $\underline{d}\tilde{\theta} - L(\theta)\, dt = 0$, on déduit, par (4.4), que

$$\frac{1}{2}\, d[\theta^c,\theta^c] = \frac{1}{2}\, d[\underline{\theta},\underline{\theta}] = \pi\, \underline{d\theta} = \pi\, \underline{d}\tilde{\theta} = \pi\, L(\theta)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\, (\sigma(\theta) \circledast \sigma(\theta))\, \Theta\, dt \quad .$$

Il résulte alors aussitôt de la proposition (3.1) que, pour le processus élargi, $d\overline{\theta}^c = \sigma(\overline{\theta})\, d\overline{B}$; donc $\underline{d\overline{\theta}} = d\overline{\theta}^c + \underline{d}\tilde{\overline{\theta}}$, ou $\underline{d\overline{\theta}} = \sigma(\overline{\theta})\, d\overline{B} + L(\overline{\theta})\, dt$, ce qui est (4.6), où l'on remplace Ω par $\overline{\Omega} = C^{\cdot}([0,+\infty];\hat{V}) \times \Omega'$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{T}$ par $\overline{\mathcal{O}}$, $\overline{\mathcal{T}}$, $\mathbb{P}$ par $\overline{\mathbb{P}^x} = \mathbb{P}^x \otimes \mathbb{P}'$, X par $\overline{\theta}$, B par $\overline{B}$ défini à (3.4) ; $\mathbb{P}^x$ est aussi bien la loi de θ que celle de $\overline{\theta}$.

3) Maintenant 1) entraîne l'existence de la diffusion pour L ,x. Pour l'unicité, si $(\mathbb{P}^x)_1$ et $(\mathbb{P}^x)_2$ sont deux solutions, elle sont, d'après 2), les lois des solutions $(\overline{\theta})_1$, $(\overline{\theta})_2$, de deux équations (4.6), sur le même espace $\overline{\Omega}$, les mêmes $\overline{\mathcal{O}}$, $\overline{\mathcal{T}}$, deux browniens $(\overline{B})_1$, $(\overline{B})_2$, et deux probabilités $\overline{(\mathbb{P}^x)_1}$, $\overline{(\mathbb{P}^x)_2}$. Mais on sait que, pour des champs η_k, $\eta_{i,j}$, b^k, σ^k_ℓ, donnés, la loi de la solution de condition initiale x, c-à-d. $\overline{(\mathbb{P}^x)_1}$ ou $\overline{(\mathbb{P}^x)_2}$, ne dépend que de la loi des semi-martingales directrices, soit $(\overline{B}_1)\overline{(\mathbb{P}^x)_1}$, ou $(\overline{B})_2\overline{(\mathbb{P}^x)_2}$, qui sont les mêmes lois browniennes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, d'où l'unicité (voir Schwartz [4], théorème 2.4, p. 4).

<u>*EXTENSION (4.7)*</u> : Appelons ${}^s\mathbb{P}^x$ la loi de diffusion de départ en x à l'instant s ; cela veut dire que c'est toujours une probabilité sur $C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$, mais que ${}^s\mathbb{P}^x$ ps., $\theta_t = x$ pour $0 \leq t \leq s$, et que $\underline{d}\tilde{\theta} = L(\theta)\, d(t-s)_+$ pour ${}^s\mathbb{P}^x$, dans $[0,\zeta[$. (Ici

$\zeta > s$ ${}^s\mathbb{P}^x$ ps.) En termes de problème des martingales, $t \mapsto \varphi(\theta_t) - \int_{]s,t]} L\varphi(\theta_u)\, du$ est une martingale locale continue dans $[s,\zeta[$. Dans ce cas, l'équation différentielle stochastique (4.6) est à remplacer par une autre, où dB^ℓ est à remplacer par $d(B^\ell - (B^\ell)^s) = 1_{[s,+\infty[} dB^\ell$. (Le théorème utilisé pour l'unicité est toujours (3.1), mais (3.2) est à remplacer par $d[M,M] = \sigma \circledcirc \sigma \ \Theta \ d(t-s)_+$ dans $[0,\tau[$, (3.3) est à remplacer par $d\overline{M} = \overline{\sigma}\ d(\overline{B} - \overline{B}^s) = 1_{[s,+\infty[} \overline{\sigma}\ d\overline{B}$ dans $[0,\overline{\tau}[$, et (3.4) à remplacer par

$$d\overline{B} = 1_{[0,s[} d\overline{B}' + 1_{[s,\overline{\tau}[} (\overline{\sigma}^{-1}\ d\overline{M} + \overline{K}\ d\overline{B}') + 1_{[\overline{\tau},+\infty[} d\overline{B}') \quad .$$

A part cela, la démonstration de l'existence et de l'unicité de ${}^s\mathbb{P}^x$ est la même que ci-dessus. Mais on sait en outre qu'il existe un flot Φ relatif à (4.6), application de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times V \times \Omega$ dans l'espace Cadlag $([0,+\infty[;\hat{V})$, et ayant des propriétés remarquables de continuité, et que ${}^s\mathbb{P}^x = \Phi(s;x;.)(\mathbb{P})$ (10).

Si l'équation différentielle stochastique est fortement conservative, c-à-d. si, pout $\mathbb{P}$-presque tout ω, pour tous s, x, $\zeta(s;x;\omega) = +\infty$, on sait que, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, $(s,x) \mapsto \Phi(s;x;\omega)$ est continue à valeurs dans V, donc $(s,x) \mapsto {}^s\mathbb{P}^x$ est continue pour la topologie étroite des probabilités sur l'espace topologique $C([0,+\infty[;V)$. Il ne semble guère question qu'il y ait une conclusion analogue si $\zeta \not\equiv +\infty$. Mais on sait que $(s,x,\omega) \mapsto \Phi(s;x;\omega)$ est borélienne de $\mathbb{R}_+ \times V \times \Omega$ à valeurs dans l'espace $C^{\cdot\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$ des trajectoires admettant un temps de mort ζ, continues dans $[0,\zeta[$ à valeurs dans V, égales à ∞ dans $[\zeta,+\infty[$, mais peut-être discontinues à gauche en ζ ; $C^{\cdot\cdot} \supset C^{\cdot}$.
Donc $(s,x) \mapsto {}^s\mathbb{P}^x = \Phi(s;x;.)(\mathbb{P})$ est borélienne en tant que fonction à valeurs probabilités. Mais ${}^s\mathbb{P}^x$ est toujours portée par $C^{\cdot}$, donc elle est borélienne en tant que fonction à valeurs probabilités sur $C^{\cdot}([0,+\infty[;\hat{V})$, ou pour la topologie étroite des probabilités sur $C^{\cdot}([0,+\infty[,\hat{V})$.

<u>Remarques (4.8)</u> : 1) Puisque V est plongée dans $\mathbb{R}^n$, le champ L-lipschitzien de vecteurs 2-tangents $\geqslant 0$ sur V est prolongeable en un champ $\hat{L}$-lipschitzien de vecteurs 2-tangents $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^n$ (c'est vrai au voisinage de tout point de V, donc partout par

partition de l'unité). Mais rien ne dit que $\hat{L}$ soit de rang r ni qu'il donne lieu à des diffusions. Mais on peut prolonger l'équation différentielle stochastique (4.6) en prolongeant les champs ou fonctions b^k, η^k, σ^k, $\eta_{i,j}$, en $\hat{b}^k$, $\hat{\eta}_k$, $\hat{\sigma}^k_\ell$, $\hat{\eta}_{i,j}$ de manière que la composante de $\hat{\eta}_{i,j}$ dans $E\odot E$ soit $\hat{\eta}_i \odot \hat{\eta}_j$. Alors on a un nouvel opérateur différentiel (ou champ de vecteurs 2-tangents) $\hat{L}$ (suivant (4.1), avec $\hat{a}^{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \hat{\sigma}^i_\ell \hat{\sigma}^i_\ell$), qui est ≥ 0 partout sur E, peut être pas de rang r, mais (en utilisant (4.6) ainsi prolongée à E) admettant une diffusion unique ${}^s\mathbb{P}^x$, pour $s\in\mathbb{R}_+$, $x\in E$, ayant toutes les propriétés précédentes, et qui redonne ${}^s\mathbb{P}^x$ déjà trouvé si $x\in V$.

2) D'après Ikeda-Watanabe, une diffusion de rang maximum sur une variété est la loi de l'enroulée d'un mouvement brownien, relativement à une connexion définie par le générateur infinitésimal (voir note (1) *p. 19*). Ici nous voyons que la différentielle de martingale $d\overline{\theta}^c$ (relativement à $\overline{\mathbb{P}^x}$) est l'image par $\sigma(\overline{\theta})$ d'une différentielle de mouvement brownien $(d\overline{B}^\ell)_{\ell=1,2,\ldots,n}$, où σ est un morphisme d'espaces fibrés sur V, de $V\times\mathbb{R}^n$ dans $T^1(V)$.

3) Il était essentiel de pouvoir appliquer un théorème du type (1.4), avec un rang constant r non nécessairement maximum. En effet, même si L est de rang maximum N sur V, il n'est que de rang constant N dans E, de dimension $n\geq N$.

(4.9) LES ENSEMBLES POLAIRES.

Le fait que les ${}^s\mathbb{P}^x$ soient définies par une équation différentielle stochastique, à coefficients indépendants du temps, et que la semi-martingale directrice soit $(dt,d\overline{B})$, où $\overline{B}$ est markovienne homogène dans le temps, entraîne le caractère markovien, homogène dans le temps, de la diffusion. Mais les ensembles polaires ne sont pas clairement visibles ; on doit montrer, pour $r=N$, que ce sont ceux qu'on pense.

Un ensemble H de $\mathbb{R}^N$ est dit polaire s'il est contenu dans un ensemble $\{f=+\infty\}$, où f est surharmonique ≥ 0 ; f surharmonique veut dire $<+\infty$ Lebesgue-ps., localement Lebesgue-intégrable, semi-continue inférieurement, et $\frac{1}{2}\Delta f\leq 0$ au sens des distributions. Comme $\{f=+\infty\}$ est un G_δ, un ensemble polaire est contenu dans un G_δ polaire. On sait alors que, si B est le brownien usuel (de générateur infinitésimal

$\frac{1}{2}\Delta$), de valeur initiale à répartition μ quelconque (μ probabilité sur $\mathbb{R}^N$), alors ps. B ne rencontre pas H aux temps > 0. La polarité est une propriété locale, et on sait aussi que si, au lieu de $\frac{1}{2}\Delta$, on considère n'importe quel opérateur différentiel L C^∞ sur $\mathbb{R}^N$, $L = \sum_{k=1}^{N} b^k \partial_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a^{i,j}\partial_i\partial_j$, $a^{j,i} = a^{i,j}$, à coefficients indépendants du temps, uniformément bornés, et uniformément elliptique, $\sum_{i,j=1}^{N} a^{i,j}\xi_i\xi_j \geqslant c\,|\xi|^2$, c constante, la diffusion correspondante à les mêmes ensembles polaires : H $\frac{1}{2}\Delta$-polaire est L-polaire, et vice-versa, et le mouvement L-brownien ps. ne rencontre pas H aux temps > 0. (Pour simplifier nous commençons au temps 0, c'est sans importance.) D'où la possibilité de définir les ensembles polaires sur des variétés C^∞ par des cartes, en se ramenant aux ensembles polaires de $\mathbb{R}^N$ (11).

PROPOSITION (4.10) : Soit L un opérateur différentiel C^∞ sur une variété V C^∞, elliptique d'ordre 2 (sans terme d'ordre 0) (donc $\geqslant 0$ de rang $N = \dim V$). Soit $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, ayant la signification habituelle, et soit X une V-semi-martingale sur un ouvert A de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, vérifiant $\underline{d\tilde{X}} = L(X)\,dt$. Si H est un ensemble polaire de V (localement par des cartes sur des ouverts de $\mathbb{R}^N$), $\mathbb{P}$ ps. X ne rencontre pas H aux temps > 0.

Démonstration : Soit V' un ouvert relativement compact de V, tel qu'un voisinage de $\overline{V}'$ soit difféomorphe à un ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si on démontre que X ne rencontre pas H aux temps > 0 dans $X^{-1}(V')$, le résultat sera démontré en recouvrant V par une suite d'ouverts tels que V'. Mais alors cela revient à supprimer V', à supposer que V est un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^N$, et que L est la restriction à V d'un opérateur analogue défini sur un voisinage U de $\overline{V}$; en appelant $(\alpha, 1-\alpha)$ une partition de l'unité relative à U, $\complement\,\overline{V}$, et L par $\alpha L + (1-\alpha)\frac{1}{2}\Delta$, on est ramené au cas où $V = \mathbb{R}^N$, et où L est défini et C^∞ sur $\mathbb{R}^N$, uniformément borné, uniformément elliptique. Soit $s \in \mathbb{Q}_+$, et S le temps de sortie $\geqslant s$ de A ; si nous démontrons que, dans $]s,S[$, X ne rencontre pas H, le résultat sera montré, car $A \setminus (\{0\} \times \Omega) = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+}]s,S[$. Cela revient à supposer que $A =]s,S[$, mais avec X défini dans $[s,S[$ et $\underline{d\tilde{X}} = L(X)\,dt$ dans $[s,S[$. On raisonnera désormais sur $[s,+\infty[\times \Omega$, ou plus simplement, en remplaçant s par 0, ce qui ne change rien, sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ comme d'habitude, avec $A = [0,S[$. Ici $V = \mathbb{R}^N$, donc $n = N$, et, si $(e_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$, L est donné par (4.1), et $\eta_k = e_k$, $\eta_{i,j} = e_i \odot e_j$; $a^{i,j} = \sum_{\ell=1}^{N} \sigma_\ell^i \, \sigma_\ell^j$. Alors la méthode antérieure (proposition (4.5)) montre que, dans un système élargi,

$$\underline{d\overline{X}} = \begin{pmatrix} d\overline{X} \\ \\ \frac{1}{2}\, d[\overline{X},\overline{X}] \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^N \\ \oplus \\ \mathbb{R}^N \odot \mathbb{R}^N \end{pmatrix} ,$$

et $d\overline{X}$ est solution dans $[0,\overline{S}[$ de l'équation différentielle stochastique :

$$d\overline{X} = \sum_{k,\ell=1}^{N} e_k \, \sigma_\ell^k(\overline{X}) \, \overline{dB^\ell} + \sum_{k=1}^{N} b^k(\overline{X}) \, dt$$

$$= \sigma(\overline{X}) \, d\overline{B} + b(\overline{X}) \, dt \quad ,$$

avec la condition initiale $\overline{X}_o$ arbitraire, $\mathcal{T}_o$-mesurable ; en termes d'opérateurs ou de matrices dans $\mathbb{R}$ euclidien, $\sigma^2 = a$, σ elle-même symétrique > 0.

En fait, d'après l'uniformité lipschitz, cette équation n'a pas de temps de mort, $\overline{X}$ est prolongeable à $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Et $\overline{X}$ est un L-brownien, donc ne rencontre $\mathbb{P}$ ps. pas H aux temps > 0, donc X $\mathbb{P}$ ps. pas aux temps > 0. ■

<u>Remarque</u> : Ici, bien évidemment, cela s'impose d'utiliser une carte, étant donné le caractère local de l'énoncé.

***

NOTES

(1), *p. 92* S. Ikeda - N. Watanabe [1], chapitre 5, § 4, p. 260.

Ce procédé est sans doute le meilleur parce qu'il est entièrement intrinsèque, et permet donc des estimations par les éléments intrinsèques de la variété riemannienne, courbure, etc., ce que ne permettent guère ni le recollement des morceaux de Courrège-Priouret, ni le plongement de la variété dans un espace vectoriel comme nous l'indiquerons plus loin. Par ailleurs, Stroock et Varadhan ont prouvé l'existence et l'unicité pour un opérateur différentiel de rang maximum N, avec des hypothèses de régularité beaucoup moindres, mais la méthode est bien plus complexe, et seul le recollement des morceaux de Courrège et Priouret paraît alors possible (voir P. Priouret [1], chapitre IV, p. 85 ; et D.W. Stroock - S.R.S. Varadhan [1]).

(2), *p. 96* Pour la géométrie différentielle du 2ème ordre, voir L. Schwartz [1], notamment le § 1. Ici π est le projecteur canonique de T^2 sur son quotient $T^2/T^1 = T^1 \odot T^1$.

(3), *p. 96* Ce théorème est énoncé à L. Schwartz [1], (4.20) p. 59 et (9.20) p. 115.

On l'a démontré alors sous la forme de Stratonovitch, nous le démontrons ici sous la forme d'Ito. Pour Stratonovitch, il suffit d'utiliser $\overset{1}{\varpi}$; la démonstration est alors triviale, si on la fait comme ici, celle de Schwartz [1] était trop lourde.

(4), *p. 97* Rappelons que différentielle de martingale veut dire différentielle de martingale continue formelle. Les notations employées sont celles de L. Schwartz [1], [2], [3].

(5), *p. 98* dM est une différentielle de martingale , élément de $\mathrm{Opt}(G) \otimes_{\mathrm{Opt}} \mathfrak{M}^c$, donc $d[M,M]$ est une différentielle de processus à variation finie, $d[M,M] \in \mathrm{Opt}(G \odot G) \otimes_{\mathrm{Opt}} \mathfrak{v}^c$. Voir notations de Schwartz [2], propositions (2.3), (2.5). Ici $A = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ est omis. Pour les processus formels, voir Schwartz [3].

(6), *p. 100* Voir Schwartz [3], 2.5 p. 428 et 3.9 bis p. 446.

(7), *p. 100* Soit $A^{\bullet}$ une forme bilinéaire $\geqslant 0$ sur $F^{\bullet} \times F^{\bullet}$, où $F^{\bullet}$ est un quotient d'un espace vectoriel F. Alors on définit A, forme bilinéaire $\geqslant 0$ sur $F \times F$, par $A(x,y) = A^{\bullet}(x^{\bullet},y^{\bullet})$, où $x^{\bullet}$, $y^{\bullet}$ sont les images de $x,y \in F$ dans $F^{\bullet}$. Le rang de A est le rang de $A^{\bullet}$. En effet, $x \in F$ est A-isotrope ssi $A(x,x) = 0$, ou $A^{\bullet}(x^{\bullet},x^{\bullet}) = 0$, c-à-d. ssi $x^{\bullet}$ est $A^{\bullet}$-isotrope, et la codimension d'un sous-espace de $F^{\bullet}$ est celle de son image réciproque dans F. Ici $T^{1}*(V;v)$ est un quotient de E^* ; donc le rang de $\pi(v)\ L(v) \in T^{1}(V;v) \odot T^{1}(V;v)$ est aussi son rang dans $E \odot E$; la matrice $(a^{i,j})$ bilinéaire symétrique $\geqslant 0$ est de rang r.

(8), *p. 102* J'ai déjà démontré cette formule dans Schwartz [1]. Les définitions $\underline{dY}$, dY^{c}, $\underline{d\tilde{Y}}$, $d\ \frac{1}{2}[Y,Y]$ pour une semi-martingale sur une variété, sont données dans Schwartz [1] , voir § 3, et dans Schwartz [2], propositions (2.10) et suivantes.

(9), *p. 103* C'est bien une équation différentielle stochastique sous la forme canonique. Si on laisse tomber $H_o = \sum_{k=1}^{n} \eta_k\ b^k$, avec $dZ^o = dt$, qui ne contribue pas aux crochets, on a des $H_\ell(X)\ dB^\ell$, $H_\ell = \sum_{k=1}^{n} \eta_k\ \sigma^k$, et des $\frac{1}{2} H_{\ell,\ell'}(X)\ d[B^\ell, B^{\ell'}]$, $H_{\ell,\ell'} = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_\ell^i\ \sigma_{\ell'}^j\ \eta_{i,j}$, et l'image dans le quotient $T^1 \odot T^1$, $\pi H_{\ell,\ell'}$, est $\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_\ell^i\ \sigma_{\ell'}^j\ \eta_i \odot \eta_j = H_\ell \odot H_{\ell'}$. Pour cette forme canonique, voir Schwartz [1], (8.4) p. 105.

(10), *p. 105* Le flot dépendant de s, x, ω et pas seulement x, ω, a été démontré, dans le cas brownien, par Kunita [1], théorème (4.3).
Pour le cas général, avec les complications qui s'y rattachent relativement à $C^{\bullet}$ et $C^{\bullet\bullet}$, voir L. Schwartz [4], théorème (5.5), 2) et 3).

(11), *p. 107* Bien que ces faits soient "connus", je n'ai que des références partielles, pas de référence précise pour cet énoncé. J'ai supposé les coefficients C^{∞}, je ne sais pas à partir de quelle régularité des coefficients le résultat subsiste.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

N. IKEDA - S. WATANABE [1], Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North Holland Kodansha, Amsterdam-Oxford New York, and Tokyo, 1981.

H. KUNITA [1], Stochastic Differential Equations, and Stochastic Flows of Diffeomorphisms, Cours d'été de Probabilités de Saint-Flour XII, 1982.

P. PRIOURET [1], Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour III, 1973, Lect. Notes in Mathematics 390, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

L. SCHWARTZ [1], Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle, Séminaire de Probabilités XVI, Strasbourg 1980-81, Supplément Géométrie différentielle et stochastique, Lect. Notes in Mathematics 921, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[2], Les gros produits tensoriels en analyse et probabilités, à paraître en 1984, North-Holland, Amsterdam-Oxford-New York, dans un livre en l'honneur de Leopoldo Nachbin.

[3], Les semi-martingales formelles, Séminaire de Probabilités XV, Strasbourg 1979-80, Lect. Notes in Mathematics 850, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.

[4], Calculs stochastiques directs sur les trajectoires, et propriétés de boréliens porteurs, Séminaire de Probabilités XVIII, Strasbourg 1982-83, Lect. Notes in Mathematics 1059, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.

INDEX TERMINOLOGIQUE