SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ULRICH G. HAUSSMANN

L'équation de Zakai et le problème séparé du contrôle optimal stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 37-62

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__37_0>

L'Equation de Zakai et le Problème Séparé du Contrôle Optimal Stochastique.

U. G. HAUSSMANN *
University of British Columbia

Abstract The non-linear filtering model which arises in stochastic optimal control theory :

$$dx = f(t,x_t,u(t,y))dt + \sigma(t,x_t,u(t,y))dw$$

$$dy = h(t,x_t)dt + d\hat{w}_t$$

is solved and the "separated" control problem is derived under minimal regularity assumptions and minimal growth restrictions. The method relies on the robust form of the Zakai equation.

I - INTRODUCTION

Le problème fondamental de la théorie du contrôle optimal stochastique avec information partielle est le suivant :

(1.1) $\min \{J(u) : u \in \mathcal{U}\}$

avec

(1.2) $J(u) = E\{\int_o^T \ell(t,x_t,u_t)dt + c(x_t)\}$

(1.3) $dx_t = f(t,x_t,u_t)dt + \sigma(t,x_t,u_t)dw_t$

(1.4) $dy_t = h(t,x_t)dt + d\tilde{w}_t, \; y_o = o,$

(1.5) $\mathcal{U} = \{u : [o,T] \times \mathcal{C}(o,T\,;\mathbb{R}^d) \to U$, borélien, adapté à $\{\mathcal{J}^d_{ot}\}$ tel que $\forall y, u(.,y) \in L^\infty(o,T\,;U)\}$.

Ici $(w,\tilde{w})$ est un mouvement Brownien, $\mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continue $[o,T] \mapsto \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}^m$ donné, $\{\mathcal{J}^d_{ot}\}$ la filtration canonique borélienne sur $\mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ et $L^\infty(o,T;U)$ est l'espace des fonctions $[o,T] \to U$ essentiellement bornées.

* Ce travail était fait pendant que l'auteur était professeur associé au Laboratoire de Probabilité, Université de Pierre er Marie Curie, Paris, et à l'U.E.R. de Mathématiques, Université de Provence, Marseille.

La difficulté de ce problème est, c.f.(1.5), que les contrôles admissibles $u \in \mathcal{U}$ ne peuvent pas dépendre directement de l'état $x_t \in \mathbb{R}^n$, mais seulement de l'observation $y_t \in \mathbb{R}^d$. Dans des cas linéaires on a réussi à résoudre le problème premièrement en remplaçant le problème par un autre avec information complète, le problème séparé, et puis en résolvant ce problème, [7],[8]. La réduction du problème (1.1)-(1.5) au problème séparé est basée sur la théorie de filtrage non-linéaire qui est maintenant bien développée, mais avec des hypothèses de régularité et bornitude qui sont très génantes du point de vue de l'application au contrôle stochastique. Le but de ce travail est le développement du filtrage non-linéaire dans un cadre qui permettra la dérivation du problème séparé. Nous continuons avec une présentation formelle de cette dérivation.

Soit $\{(x_t,y_t)\}$ la solution de (1.3)(1.4) sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, et soit

$$Z_t^s = \exp\{\int_s^t h(r,x_r).dy_r - \frac{1}{2}\int_s^t |h(r,x_r)|^2 dr\}.$$

Si $\tilde{P}$ est la probabilité définie par $d\tilde{P} = (Z_T^o)^{-1}dP$ alors $\{(w_t,y_t)\}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{P})$. Soit $\{\mathcal{F}_t^y\}$ la filtration engendrée par $\{y_t\}$ et soit $p_t(.)$ la densité conditionnelle de x_t sachant $\mathcal{F}_t^y$. Si $\tilde{E}$ est l'espérance par rapport à $\tilde{P}$, on a

$$\begin{aligned}\int_A p_t(x)dx &= \Pr\{x_t \in A|\mathcal{F}_t^y\}\\ &= E\{1_A(x_t)|\mathcal{F}_t^y\}\\ &= \tilde{E}\{1_A(x_t)Z_T^o|\mathcal{F}_t^y\}/\tilde{E}\{Z_T^o|\mathcal{F}_t^y\}\\ &= \tilde{E}\{1_A(x_t)Z_t^o|\mathcal{F}_t^y\}/\tilde{E}\{Z_t^o|\mathcal{F}_t^y\}\\ &\equiv \int_A \rho_t(x)dx / \int_{\mathbb{R}^n}\rho_t(x)dx\end{aligned}$$

i.e. $p_t(x) = \rho_t(x)/\langle 1,\rho_t\rangle$ si $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n) \equiv H$, et si

$$\int_A \rho_t(x)dx \equiv \tilde{E}\{1_A(x_t)Z_t^o|\mathcal{F}_t^y\},$$

i.e. si ρ_t est la densité conditionnelle non-normalisée de x_t sachant $\mathcal{F}_t^y$. On peut caractériser ρ_t comme la solution de *l'équation de Zakai*,

$$(1.6)\quad d\rho_t = L_t^* \rho_t\, dt + \rho_t\, h_t \cdot dy\,,\quad \rho_o = p_o.$$

N.b. p_o est la densité initiale du processus x_t, i.e. de x_o, et L_t^* est l'adjoint de L_t, le générateur de $\{x_t\}$. Il faut interpréter (1.6) comme équation dans H^{-1}, un espace de Sobolev. Rappelons $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$H^1(\mathcal{O}) = \{\varphi \in L^2(\mathcal{O}) : \varphi_{x_i} \in L^2(\mathcal{O}),\ i=1,\dots,n\}$$

où φ_{x_i} est la dérivée partielle au sens des distributions. On définit les normes

$$|\varphi|_H = <\varphi,\varphi>^{1/2} = \{\int |\varphi(x)|^2 dx\}^{1/2}$$

$$\|\varphi\| = |\varphi|_H + \sum_i |\varphi_{x_i}|_H .$$

Rappelons aussi que H^{-1} est le dual de H^1 et $H^1 \subset H \subset H^{-1}$.

L'équation (1.6) définit $\rho_t : \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d) \to H^1$ p.s.(mesure de Wiener), i.e. $\rho_t(x,\omega) = \rho_t(x,y(\omega))$. Le fait qu'on peut définir $\rho_t(x,\eta)$ $\forall \eta \in \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ découle de la forme robuste de l'équation de Zakai :

Soit ψ_t^η la solution de

$$(1.7)\qquad \frac{d\psi}{dt} - \mathcal{L}_t^* \psi = o\ , \qquad \psi_o = p_o\ , \quad \forall \eta \in \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$$

alors

$$(1.8)\qquad \rho_t(x,\omega) = \psi_t^{\eta(\omega)}(x)\ \exp[-y_t(\omega).\ h(t,x)] \qquad \text{p.s.}$$

Ici $\mathcal{L}_t^*$ est l'adjoint d'un opérateur défini pour chaque $\eta \in \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ et lié à L_t, c.f.(2.6).

Maintenant on peut récrire (1.2) comme

$$J(u) = E\{\int_o^T E\{\ell(t,x_t,u_t)|\mathcal{G}_t^y\}dt + E\{c(x_T)|\mathcal{G}_T^y\}\}$$

$$= E\{\int_o^T \frac{<\ell(t,.,u_t),\rho_t>}{<1,\rho_t>} dt + \frac{<c,\rho_T>}{<1,\rho_T>}\}$$

$$= \tilde{E}\{\int_o^T Z_t^o \frac{<\ell,\rho_t>}{<1,\rho_t} dt + Z_T^o \frac{<c,\rho_T>}{<1,\rho_T>}\}$$

$$= \tilde{E}\{\int^T \tilde{E}\{Z_t^o|\mathcal{G}_t^y\}\frac{<\ell,\rho_t>}{<1,\rho_t>} dt + \tilde{E}\{Z_T^o|\mathcal{G}_T^y\}\frac{<c,\rho_T>}{<1,\rho_T>}\}$$

$$= \tilde{E}\{\int_o^T <\ell(t,.,u_t),\rho_t> dt + <c,\rho_T>\}$$

$$(1.9)\qquad = \tilde{E}\int_o^T \Lambda(t,\rho_t,u_t)dt + \chi(\rho_T)\}$$

$$\equiv \tilde{J}(u).$$

Donc le problème séparé est

$$(1.10) \qquad \min\{\tilde{J}(u) : u \in \mathcal{U}\}$$

où $\tilde{J}$ est défini par (1.9) et "l'état" ρ_t est défini par (1.6). Dans le problème (1.10) les contrôles sont fonctions du mouvement Brownien $\{y_t\}$ donc $\{\rho_t\}$ est adapté. Alors on a information complète mais malheureusement l'état ρ_t prend des valeurs dans H^1.

Le but de ce travail est d'établir l'existence d'une solution de (1.6) et de montrer qu'elle est la densité conditionelle non-normalisée de x_t sans exiger trop de régularité de f, h. Il y a deux façons d'aborder le problème dans le cas régulier. C'est facile à voir que la densité conditionelle est une solution faible de (1.6) et donc s'il y a l'unicité des solutions le résultat en découle. De l'autre côté on peut vérifier directement qu'il y a une solution unique de (1.6) ou (1.7) et puis on montre, en utilisant une représentation de Feynman-Kac, que cette solution est la densité conditionelle. De nombreux articles etablissent l'existence et l'unicité des solutions de (1.7), [1], [2], [6], [12], mais toujours sans avoir un contrôle u, et avec des hypotheses de régularité qui sont trop génantes, e.g. contiuité par rapport à t. Beneš et Karatzas [3] ont résolu le problème si u est constant, et Bensoussan [4] l'a fait aussi en trouvant des conditions nécessaires satisfaites par un contrôle optimal mais an exigeant la bornitude de f et h, donc son travail ne s'applique pas au régulateur linéaire. En plus dans [4] σ n'est pas fonction de u. Nous suivons les idées de Pardoux [10] en travaillant avec la forme robuste (1.7), mais nous exigeons moins de régularité.

Dans la section deux on définit le modèle et puis dans la section trois on commence par le cas borné, i.e. quand les fonctions sont bornées. Le cas non-borné est traité dans la prochaine section, et dans la section cinq on déduit le problème séparé.

2. PRELIMINAIRES :

Pour $u \in \mathcal{U}$ fixé, l'état et l'observation du système de contrôle satisfont à

$$(2.1) \qquad dx_t = f(t,x_t,y)dt + \sigma(t,x_t,y)dw_t,$$

$$(2.2) \qquad dy_t = h(t,x_t)dt + d\hat{w}_t \ , \ y_o = o,$$

$$(2.3) \qquad x_o \sim p_o(x)dx,$$

avec

$f : [o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^n$,

$\sigma : [o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$,

$h : [o,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$.

Nous faisons les hypothèses :

(A_1) *σ borélien ; $y \mapsto \sigma(t,x,y)$ mesurable par rapport à $\mathcal{Y}^d_{ot}$ $\forall (t,x)$;*

$|\sigma(t,x,y) - \sigma(t,\bar{x},y)| \leq C_y \, |x - \bar{x}|$

$|\sigma(t,x,y)| \leq C_y$: $C_y \uparrow$ *avec* $|y|$

$a(t,x,y) \equiv \sigma(t,x,y)\sigma'(t,x,y) \geq \alpha I$.

(A_2) *f borélien ; $f(t,x,.)$ mesurable par rapport à $\mathcal{Y}^d_{ot}$ $\forall (t,x)$;*

$x \mapsto f(t,x,y)$ Lipschitzienne, uniformément par rapport à (t,x,y) dans chaque sous-ensemble compact de $[o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$;

$|f(t,x,y)| \leq C_y(1 + |x|)$.

Ici $\alpha > o$, I est l'identité dans $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ et σ' est la transposée de σ. Avec ces hypothèses, pour chaque $s \in [o,T], x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ il y a une solution forte, unique de

$$(2.1)' \qquad dx_t = f(t,x_t,\eta)dt + \sigma(t,x_t,\eta)dw_t \ , \ x_s = x,$$

sur un espace filtré $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}, \bar{P}_{sx})$, portant le mouvement Brownien standard $\{w_t\}$. De plus la loi de $\{x^\eta_t\}$, $\tilde{P}^\eta_{ox}$, est unique, et

$$\tilde{P}^\eta(.) = \int \tilde{P}^\eta_{ox}(.) \; p_o(x)dx$$

est l'unique loi de la solution de (2.1),(2.3) avec $y = \eta$. Si $\tilde{P}_w$ est la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ et si on définit $\tilde{P}$ sur $\mathcal{F}^n_{oT} \otimes \mathcal{Y}^d_{oT}$ par

$$\tilde{P}(A \times B) = \int_B \tilde{P}^\eta(A) \; \tilde{P}_w(d\eta),$$

alors $\tilde{P}$ est la loi (unique) de

$$(2.4) \quad \begin{cases} dx_t = f(t,x_t,y)dt + \sigma(t,x_t,y)dw_t, \ x_o \sim p_o(x)dx, \\ y_t \text{ Brownien} \end{cases}$$

i.e. (2.4) a une solution (unique) sur l'espace (canonique) $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$. Finalement soient

$$(2.5) \qquad Z^s_t = \exp\{\int_s^t h(r,x_r) \, . \, dy_r - \frac{1}{2}\int_s^t |h(r,x_r)|^2 dr\},$$

$$dP = Z^o_T \, d\tilde{P},$$

puis $\{(x_t,y_t)\}$ est une solution (faible) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de (2.1),(2.2),(2.3), pourvu que $\tilde{E}\, Z_T^o = 1$. Ceci donne le cadre probabiliste de notre travail. En général nous travaillons avec les mesures $\tilde{P}$, $\tilde{P}^{\eta}_{sx}$.

Définissons maintenant les opérateurs différentiels qui vont intervenir. Pour chaque t, η, $L_{t\,\eta}$ est le générateur de la solution de (2.4).

$$(L_{t\,\eta} v)(x) = \frac{1}{2}\, a^{ij}(t,x,\eta) v_{x_i x_j}(x) + f^i(t,x,\eta) v_{x_i}(x)$$

où a^{ij}, f^i sont les composants de a et f, et où nous employons la convention de sommation des indices qui se répètent. On définit aussi ($\eta \in \mathscr{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$ encore)

$$L^*_{t\eta} v = \frac{1}{2}(a^{ij} v)_{x_i x_j} - (f^i v)_{x_i} = \frac{1}{2}\, a^{ij} v_{x_i x_j} + (a^{ij}_{x_j} - f^i) v_{x_i} + (\frac{1}{2}\, a^{ij}_{x_i x_j} - f^i_{x_i}) v \tag{2.6}$$

$$(\mathcal{L}_{t\eta} v)(x) = (L_{t\eta} v)(x) - (\eta_t . h_t(x))_{x_i}\, a^{ij}(t,x,\eta) v_{x_j}(x) + \gamma(t,x,\eta)\, v(x)$$

$$(\mathcal{L}^*_{t\,\eta} v)(x) = (L^*_{t\eta} v)(x) + (\eta_t . h_t(x))_{x_i}\, a^{ij}(t,x,\eta) v_{x_j}(x) + \{[(\eta_t . h_t(x))_{x_i} a^{ij}(t,x,\eta)]_{x_j}$$
$$+ \gamma(t,x,\eta)\} v(x)$$

$$\gamma(t,x,\eta) = \frac{1}{2}(\eta_t . h_t(x))_{x_i} a^{ij}(t,x,\eta)(\eta_t . h_t(x))_{x_j} - \eta_t . \partial_t h_t(x) - L_{t\eta}(\eta_t . h_t)(x)$$
$$- \frac{1}{2}\,|h(t,x)|^2$$

avec $v_{x_i} = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, $\partial_t h_t(x) = \dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x)$.

Puisqu'on ne veut pas exiger la régularité des coefficients imposée par (2.6), on va travailler avec des formes bilinéaires

$$A_{t\eta}(\mu,v) = \langle -\frac{1}{2}\, a^{ij} \mu_{x_i}, v_{x_j}\rangle + \langle (f^i - \frac{1}{2} a^{ij}_{x_j})\, \mu_{x_i}, v\rangle$$

(2.7)

$$\mathscr{A}_{t\eta}(\mu,v) = \langle -\frac{1}{2}\, a^{ij} \mu_{x_i}, v_{x_j}\rangle + \langle b^i_{t\eta} \mu_{x_i}, v\rangle + \langle \frac{1}{2}(\eta_t . h_t)_{x_i} a^{ij} \mu, v_{x_j}\rangle$$
$$- \langle [(\eta_t . h_t)_{x_i} b^i_{t\eta} + \eta_t . \partial_t h_t + \frac{1}{2}|h_t|^2]\mu, v\rangle$$

avec

$$b^i_{t\eta}(x) = f^i(t,x,\eta) - \frac{1}{2}\, a^{ij}(t,x,\eta)[\eta_t . h(t,x)]_{x_j} - \frac{1}{2}\, a^{ij}_{x_j}(t,x,\eta).$$

Ici nous écrivons $\langle f,g\rangle = \int f\, g\, dx$ pourvu que $f\, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Remarquons que μ est une solution faible de $\mathcal{L}_{t\eta}\, \mu = \varphi$ si $\mathscr{A}_{t\eta}(\mu,v) = \langle \varphi, v\rangle$ $\forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ ou $\forall v \in \mathscr{C}^1_0(\mathbb{R}$ Avec des hypothèses supplémentaires, c.f. (3.1), on peut prendre $v \in H^1$. N.b. $\mu \in \mathscr{C}^r_0(\mathbb{R}^n)$ si μ est à support compact et si μ et toutes les dérivées jusqu'à l'ordre r sont continues.

On va résoudre l'équation de Zakai (forme robuste)

$$(2.8)\qquad \frac{d\mu_t}{dt} - \mathcal{L}^*_{t\eta}\,\mu_t = 0\ ,\quad \mu_o = \rho_o\ ,$$

i.e.

$$(2.9)\qquad \left(\frac{d\mu_t}{dt}, v\right) - \mathcal{A}_{t\eta}(v,\mu_t) = 0\ ,\ \forall v \in H^1,$$

et ceci dans un espace tel que $\frac{d\mu_t}{dt}$, la dérivée au sens des distributions, ait un sens. N.b. (φ,v) dénote l'application de $\varphi \in H^{-1}$ à $v \in H^1$. Ecrivons

$$W(o,t) = \{\mu \in L^2(o,t\,;H^1) : \frac{d\mu}{ds} \in L^2(o,t\,;H^{-1})\}\ ;$$

si $\mu \in W(o,t)$, alors $s \to \mu_s : [o,t] \to H$ est continue et donc μ_s, $o \leq s \leq t$, est bien défini, c.f.[5], chapitre 2, §6. Pour identifier la solution de (2.8) comme la densité de x_t il faut aussi résoudre l'équation adjointe de (2.8), i.e.

$$(2.10)\qquad \frac{d\mu_s}{ds} + \mathcal{L}_{s\eta}\,\mu_s + F(s) = 0\ ,\quad \mu_t = \nu$$

i.e.

$$(2.11)\qquad \left(\frac{d\mu_s}{ds}, v\right) + \mathcal{A}_{s\eta}(\mu_s,v) + \langle F(s),v\rangle = 0,\qquad \forall v \in H^1,$$

et trouver une représentation probabiliste de la solution, ce que nous pouvons faire grâce à la formule de Feynman-Kac. En fait, il suffirait de traiter seulement le problème avec $F = 0$, mais pour le problème du contrôle, le cas non homogène est aussi intéressant.

Nous montrerons maintenant que (A_1), (A_2) et la bornitude des coefficients entraîne la coercivité de $-\mathcal{A}_{t\eta}$, dont découle l'existence et l'unicité des solutions de (2.9),(2.11).

<u>Lemme 2.1</u> : *Soient (A_1), (A_2) vérifiés et $\forall \eta \in \mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^n)$*

$(t,x) \longrightarrow b^i_{t\eta}(x)$, $(t,x) \longrightarrow h^i_{x_j}(t,x)$, $(t,x) \longrightarrow \partial_t h^i(t,x)$

dans $L^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$. Alors $-\mathcal{A}_{t\eta}$ est coercive.

Preuve : Il faut montrer qu'il y a $\lambda \geq o$, $\beta > o$ tels que

$$(2.12)\qquad -\mathcal{A}_{t\eta}(v,v) + \lambda|v|^2_H \geq \beta\,\|v\|^2\ .$$

Or,

$$-\mathcal{A}_{t\eta}(v,v) \geq \frac{\alpha}{2}\langle v_{x_i}, v_{x_i}\rangle - c_i|v_{x_i}|_H|v|_H - c_o|v|^2_H$$

avec

$$c_i = |b^i_{t\eta}|_\infty + \frac{1}{2}|(\eta_t . h_t)_{x_i}|_\infty \max_j |a^{ij}|_\infty$$

$$c_o = |(\eta_t . h_t)_{x_j}|_\infty |b^j_{t\eta}|_\infty + |\eta_t . \partial_t h_t|_\infty$$

si $|\,.\,|_\infty$ est la norme dans L^∞. Si $o < \varepsilon \leq \alpha \min_i (2c_i)^{-1}$, alors

$$\sum_i c_i |v_{x_i}|_H |v|_H \leq \sum_i [\frac{\varepsilon}{2} c_i |v_{x_i}|^2_H + \frac{c_i}{2\varepsilon}|v|^2_H]$$

$$\leq \frac{\alpha}{4}\Sigma |v_{x_i}|^2_H + \frac{n\alpha}{4\varepsilon}|v|^2_H$$

i.e.

$$-\mathscr{A}_{t\eta}(v,v) \geq \frac{\alpha}{4}\sum_i |v_{x_i}|^2_H - (c_o + n\,\alpha/(4\varepsilon^2))|v|^2_H ,$$

dont découle (2.12).

Corollaire 2.1 : *Soient les mêmes hypothèses vérifiées et soit $h \in L^\infty$. Pour chaque $F \in L^2(o,t;H^{-1})$, $v \in H$, il existe une solution unique dans $W(o,t)$ de (2.11), et de (2.9) si $p_o \in H$.*

Preuve : Le premier résultat n'est que le théorème 6.10, [5] p. 129. Le deuxième en découle en posant $\hat{\mathscr{A}}_{s\eta}(\mu,v) = \mathscr{A}_{T-s,\eta}(v,\mu)$.

3 LE CAS BORNE.

Dans cette section nous exigeons toujours (A_1), (A_2) et $\forall \eta \in \mathscr{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$

(3.1) $\quad f^i(.,.,\eta), h^i(.,.), h^i_{x_j}(.,.), \partial_t h^i(.,.) \in L^\infty([o,T] \times \mathbb{R})$

On sait donc que $P(\Omega) = 1$ et qu'il y a une solution unique de (1.7) ou (2.9) si

(A_3) $\quad p_o \in H$.

Pour démontrer que cette solution donne via(1.8) la densité conditionnelle non-normalisée de x_t, il nous faut une représentation probabiliste des solutions de (2.11), qui découlera de la formule de Feynman-Kac, mais seulement avec plus de régularité que nous avons. Nous employerons donc la méthode de régularisation.

Ecrivons $\mathscr{C}^\infty_b([o,T] \times \mathbb{R}^n)$ pour l'ensemble des μ dans $\bigcap_k \mathscr{C}^k([o,T] \times \mathbb{R}^n)$ tel que μ et toutes ses dérivées soient bornées. Si $\eta \in \mathscr{C}(o,T;\mathbb{R}^d)$, posons

$$\overline{L}_{t\eta} v = L_{t\eta} v - (\eta_t . h_t)_{x_j}\; a^{ij}(t,x,\eta) v_{x_i} .$$

Puis $\overline{L}$ est le générateur de la solution de

(3.2) $\quad dx_t = [f(t,x_t,\eta) - a(t,x_t,\eta)\nabla_x(\eta_t . h_t(x_t))]\,dt + \sigma(t,x_t,\eta)dw,$

qui s'obtient de la solution de (2.1)' par une transformation de Girsanov. Alors la loi de cette solution, avec la condition initiale $x_s = x$, est

$$dQ^\eta_{sx} = \exp\{-\int_s^T [\sigma'\nabla_x(\eta.h)].dw - \frac{1}{2}\int_s^T |\sigma'\nabla_x(\eta.h)|^2 dt\} d\tilde{P}^\eta_{sx} .$$

Théorème 3.1 *Soient* $(A_1),(A_2)$ *vérifiés et* $a(.,.,\eta)$, $b_{.\eta}(.)$, $h,\eta,F,\nu \in \mathcal{C}_b^\infty([o,T]\times \mathbb{R}^n)$, *alors*

(3.3) $\mu_{s\eta}(x) \equiv \bar{E}^\eta_{sx}\{\nu(x_t)\exp[\int_s^t \gamma(r,x_r,\eta)dr] + \int_s^t F(r,x_r)\exp[\int_s^r \gamma(\zeta,x_\zeta,\eta)d\zeta]dr\}$

est la solution unique de (2.11). $\bar{E}^\eta_{sx}$ *est espérance par rapport à* Q^η_{sx} .

Preuve : La solution μ du corollaire 2.1 est maintenant régulière, i.e. une solution de

$$\frac{d\mu_s}{ds} + \mathcal{L}_{s\eta}\,\mu_s + F(s) = 0 \;, \quad \mu_t = \nu \;,$$

donc le résultat découle du théorème 7.4, [5], page 153.

Observons que (3.3) équivaut

$$(3.4)\quad \mu_{s\eta}(x) = \tilde{E}^\eta_{sx}\{\nu(x_t)\exp[-\int_s^t[\sigma'\nabla(\eta.h)].dw - \int_s^t e(r)dr] + \int_s^t F(r,x_r)\exp[-\int_s^r[\sigma'\nabla(\eta.h)].dw - \int_s^r e(\zeta)d\zeta]dr\}$$

si

$$e(r) = \eta_r.\partial_r\, h_r(x_r) + L_{r\eta}(\eta_r.h_r)(x_r) + \frac{1}{2}\,|h(r,x_r)|^2.$$

Nous pouvons maintenant obtenir le même résultat, i.e. (3.4) sans exiger la régularité sauf celle de h (sinon γ et e ne sont pas définis).

Théorème 3.2 *Soient* $(A_1),(A_2)$ *et (3.1) vérifiés. Si* $h \in \mathcal{C}_b^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$, $F \in L^2(o,T;H)\cap L^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$, $\nu \in H \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et* $F(t,.)$, $\nu(.)$ *continues uniformément par rapport à t, alors (3.4) donne la solution de (2.11).*

Preuve : Soient $a_n, f_n, \eta_n, F_n, \nu_n \in \mathcal{C}_b^\infty$ des régularisations de $a(.,.,\eta)$, $f(.,.,\eta)$, $\eta(.)$, $F(.,.)$, $\nu(.)$. Pour chaque n il y a une solution μ^n de (2.11) quand a_n etc. sont utilisés qui de plus satisfait à (3.3). Soit μ la solution unique de (2.11) qui existe d'après le corollaire 2.1. Nous montrerons qu'on peut passer à la limit dans (3.3).

Ecrivons Q^n_{sx} pour le Q^η_{sx} qui correpond aux $a_n, f_n, \dots$. Selon le théorème 11.3.4 de [13], $Q^n_{sx} \to Q^\eta_{sx}$ étroitement pourvu que $\forall\varphi \in \mathcal{C}_o^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$

(i) $\lim_n \int_o^T\int (a_n^{ij}(t,x,\eta) - a^{ij}(t,x,\eta))\varphi(t,x)dx\,dt = o$

(ii) $\lim_n \int_o^T\int[f_n^i(t,x,\eta) - (\eta_n(t).h(t,x))_{x_j} a_n^{ij}(t,x,\eta) - f^i(t,x,\eta) + (\eta(t).h(t,x))_{x_j} a^{ij}(t,x,\eta)]\varphi(t,x)dx\,dt = o$.

Soit B = support φ, alors $a^{ij} \in L^2(B)$ et donc $a_n^{ij} \to a^{ij}$ dans $L^2(B)$ $\forall \eta$, dont découle (i). Puisque $f_n^i \to f^i$ dans $L^2(B)$ et $\eta_n \to \eta$ uniformément sur $[o,T]$ car η est continu, alors (ii) est vérifié. Donc si $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(s,t;\mathbb{R}^n);\mathbb{R})$ est borné il découle que $\overline{E}_{sx}^{\eta}\psi(x.) \to \overline{E}_{sx}^{\eta}\psi(x.)$. De plus si $\{\psi_n\}$ est une suite de telles fonctions, bornée telle que $\psi_n \to \psi$ uniformément sur les compactes, le fait que $\{Q_{s,x}^n\}$ est une suite tendue entraîne que $\overline{E}_{sx}^{n}\psi_n \to \overline{E}_{sx}^{\eta}\psi$.

Interposons le lemme suivant. Notons

$$\psi_n(x) = \nu_n(x_t)\exp[\int_s^t \gamma_n(r)dr] + \int_s^t F_n(r,x_r)\exp[\int_s^r \gamma_n(\zeta)d\zeta]dr,$$

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{2}(\eta_n(t).h(t,x_t))_{x_i}\, a_n^{ij}(t,x_t,\eta)(\eta_n(t).h(t,x_t))_{x_j} - \eta_n(t).\partial_t h(t,x_t)$$

$$- \frac{1}{2}\, a_n^{ij}(t,x_t,\eta)[\eta_n(t).h(t,x_t)]_{x_i x_j} - f_n^i(t,x_t,\eta)[\eta_n(t).h(t,x_t)]_{x_i} - \frac{1}{2}|h(t,x_t)$$

<u>Lemme 3.1</u> *$\{\psi_n\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(s,t;\mathbb{R}^n);\mathbb{R})$ est bornée et converge uniformément sur les compactes.*

Preuve : C'est facile à voir que $\psi_n \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(s,t;\mathbb{R}^n);\mathbb{R})$ et que la suite est bornée, parce que (3.1) et la bornitude de ν,F entraînent des bornes uniformes de a_n^{ij}, f_n^i, η_n, ν_n, F_n .

Soit $\Gamma \subset \mathcal{C}(s,t;\mathbb{R}^n)$ compact, i.e.

$$\sup\{\,|x_r| \;:\; s \leqslant r \leqslant t,\quad x \in \Gamma\} < \infty,$$

et $r \to x_r$ est continu uniformément par rapport à $x \in \Gamma$.
La continuité de ν entraîne que $\nu_n \longrightarrow \nu$ uniformément sur les compactes de $\mathbb{R}^n$, donc $\nu_n(x_t) \to \nu(x_t)$ uniformément par rapport à $x \in \Gamma$. Le terme $\int_s^t \gamma_n(r)dr$ est plus diffic

$$\int_s^t (\eta_n - \eta).[h_{x_i}\, a_n^{ij}(\eta_n.h)_{x_j}]dr \to o$$

uniformément par rapport à $x \in \Gamma$, parce que le terme entre les crochets droits est uniformément borné , et $\eta_n \longrightarrow \eta$ uniformément. De la même façon

$$\int_s^t \eta \,.\, h_{x_i}\, a_n^{ij}[(\eta_n - \eta).h_{x_j}]dr \to o$$

uniformément. De plus

$$\int_s^t |a_n^{ij} - a^{ij}|\,dr \leqslant \int_s^t |\iint [a^{ij}(\zeta,Z,\eta) - a^{ij}(\zeta,x_r,\eta)]\alpha_n(r-\zeta)\beta_n(x_r - Z)d\zeta\, dZ|$$

$$(3.5) \qquad + |\iint [a^{ij}(\zeta,x_r,\eta) - a^{ij}(r,x_r,\eta)]\alpha_n(r-\zeta)\beta_n(x_r - Z)d\zeta\, dZ\,|\,dr$$

si $\alpha_n(t),\beta_n(x)$ sont les noyaux de la régularisation, i.e.

$\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_n(t)dt = 1$, $\alpha_n \geqslant o$, $\alpha_n(t) = o$ si $|t| \geqslant 1/n$, $\alpha_n \in \mathcal{C}^{\infty}$, et β_n pareils. Mais (A_1)

et (3.1) entraînent que $x \to a^{ij}(t,x,\eta)$, est continu, uniformément par rapport à (t,x) dans un compact, $\forall\eta$, et donc la première intégrale du côté droit de (3.5) converge vers zéro uniformément.

Soit $\varepsilon > o$. La compacité de Γ entraîne qu'il y a $x^1,x^2,\dots,x^N$ tels que pour tout $x \in \Gamma$, il y a x^k tel que

$$\sup_r |x_r - x_r^k| < \varepsilon \ .$$

Mais pour chaque x^k il y a $x^{k1}, x^{k2},\dots,x^{kM} \in \mathbb{R}^n$ et des intervalles $I^{k\ell},\ell=1,\dots,M$, tel que

$$\bigcup_\ell I^{k\ell} = [s,t] \ , \ |x_r^k - x^{k\ell}| < \varepsilon$$

si $r \in I^{k\ell}$. Alors

$$\int_s^t \left| \int [a^{ij}(\zeta,x_r,\eta) - a^{ij}(r,x_r,\eta)]\alpha_n(r-\zeta)d\zeta \right| dr$$

$$= \int_s^t \left| \int [a^{ij}(\zeta,x_r^k,\eta) - a^{ij}(r,x_r^k,\eta)]\alpha_n(r-\zeta)d\zeta + R_o \right| dr$$

$$\leqslant \sum_\ell \int_{I^{k\ell}} \int |a^{ij}(\zeta,x^{k\ell},\eta) - a^{ij}(r,x^{k\ell},\eta)|\alpha_n(r-\zeta)d\zeta\, dr + R_1$$

où $R_1 \to o$ si $\varepsilon \to o$ grâce à la continuité uniforme par rapport à (t,x) dans un compact, de $x \to a^{ij}(t,x,\eta)$ $\forall\eta$. Chacune des dernières intégrales (un nombre fini) converge vers zéro, donc la deuxième intégrale du côté droit de (3.5) converge vers zéro uniformément par rapport à $x \in \Gamma$.

On traite le reste de $\int_s^t \gamma_n dr$, qui est en fait $-\int_s^t e_n dr$, pareil, pour obtenir que

$$\int_s^t \gamma_n(r)dr \to \int_s^t \gamma(r,x_r,\eta)dr$$

uniformément par rapport à $x \in \Gamma$. D'ailleurs

$$\int_s^t F_n \exp[\int_s^r \gamma_n(\zeta)d\zeta]dr = \int_s^t (F_n - F)\exp[\int_s^r \gamma_n d\zeta]dr + \int_s^t F \exp[\int_s^r \gamma_n d\zeta]dr \ ,$$

dont la première intégrale du côté droit converge vers zéro uniformément, parce que $\int \gamma_n d\zeta$ est borné uniformément et $\int |F_n - F| dr \to o$ uniformément par la même démonstration que pour a_n. Maintenant le lemme découle aisément.

Dans la démonstration du théorème on a donc que le côté droit de (3.3) pour μ^n converge vers la mêmeexpression, mais sans n, quand $n \to \infty$. Considérons maintenant le côté gauche.

Soient q^n, θ^n définis par

$$q^n = \mu^n - \mu$$

$$(\theta_s^n,v) = \mathcal{A}_s^n(\mu_s,v) - \mathcal{A}_{s\eta}(\mu_s,v) + \langle F_n - F,v \rangle , \quad \forall v \in H^1 .$$

Ici $\mathcal{A}_s^n$ est défini comme $\mathcal{A}_{s\eta}$ mais utilisant a_n,f_n,η_n . Alors

$$\left(\frac{dq^n_s}{ds},\ q^n_s\right)+\mathcal{A}^n_s(q^n_s,q^n_s)+(\theta^n_s,q^n_s)=o\ , \qquad p.p.(s)$$
$$q^n_t=\nu_n-\nu\ .$$

En outre on a (avec λ du théorème 2.1)

$$-\mathcal{A}^n_s(q^n_s,\ q^n_s)+\lambda|q^n_s|^2_H \geqslant \frac{\alpha}{4}\|q^n_s\|^2\ , \quad \forall n\ ,$$

donc

$$|q^n_t|^2_H=|q^n_s|^2_H-\int_s^t 2\,[\mathcal{A}^n_r(q^n_r,\ q^n_r)+(\theta^n_r,\ q^n_r)]dr$$
$$\geqslant |q^n_s|^2_H+\int_s^t \frac{\alpha}{2}\|q^n_r\|^2-2\lambda\ |q^n_r|^2_H-2\|\theta^n_r\|_{H^{-1}}\|q^n_r\|\,dr$$
$$\geqslant |q^n_s|^2_H-2\lambda\int_s^t|q^n_r|^2_H\ dr-\frac{2}{\alpha}\|\theta^n\|^2_{L^2(s,t;H^{-1})}$$

L'inégalité de Gronwall entraîne que

$$|q^n_s|^2_H\leqslant K\,[\,|\nu_n-\nu|^2_H+\|\theta^n\|^2_{L^2(s,t;H^{-1})}]\ .$$

Nous montrerons que $\|\theta^n\|^2_{L^2}\to o$ car $\nu_n\to\nu\in H$ déjà.

Mais $F_n\to F$ dans $L^2([o,T]\times\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^2(s,t;H^{-1})$.

Considérons

$$\|\mathcal{A}^n_{\cdot}(\mu.,.)-\mathcal{A}_{\cdot\eta}(\mu.,.)\|^2_{L^2(s,t;H^{-1})}$$
$$\leqslant K\{\int_s^t\sum_j|[a^{ij}_n-a^{ij}]\mu_{x_i}|^2_H dr+\int_s^t|(b^i_n-b^i)\mu_{x_i}|^2_H dr$$
$$+\int_s^t\sum_j|[(\eta_n.h)_{x_i}\ a^{ij}_n-(\eta.h)_{x_i}\ a^{ij}]\mu|^2_H dr$$
$$+\int_s^t|[(\eta_n.h)_{x_i}\ b^i_n-(\eta.h)_{x_i}\ b^i]\mu|^2_H dr+\int_s^t|(\eta_n-\eta).\partial_t h\,\mu|^2_H dr\}.$$

Puisque μ, $\mu_{x_i}\in L^2(s,t;H)$, il ne faut que démontrer que les différences qui multiplient soit μ soit μ_{x_i} convergent vers zéro p.p. Or $\eta_n\to\eta$ ponctuellement et $a^{ij}_n\to a^{ij}$ dans $L^2([s,t]\times B)$ $\forall B$ borné i.e. quitte à extraire une sous-suite $a^{ij}_n\to a^{ij}$ p.p.(t,x), et pareil pour f^i_n. Il en découle que $\forall s\leqslant t$ $\mu^n_s\to\mu$ si on prend une sous-suite. Ce résultat entraîne le théorème.

<u>Corollaire 3.1</u> *Soient (A_1), (A_2) et (3.1) vérifiés. Si $h\in\mathcal{E}^\infty_b([o,T]\times\mathbb{R}^n)$, $F\in L^2(o,T;H)\cap L^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$, $\nu\in H\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors la solution de (2.11) satisfait à (3.4).*

Preuve : Soient ν^n, F^n des approximations continues, uniformément bornées de ν, F telles que $\nu^n\to\nu$ dans H, $F^n\to F$ dans $L^2(o,T;H)$.

Si μ^n est la solution correspondante à ν^n, F^n, alors (3.3) est vérifié pour (μ^n,ν^n, F^n). De plus $\mu_s^n \to \mu_s$ par la même démonstration que dans le théorème. Par contre sur le côté droit de (3.3), $\bar{E}_{sx}^n$ est en fait indépendant de n. Comme auparavant, quitte à extraire une sous-suite $\nu^n \to \nu$, $F^n(r,.) \to F(r,.)$ p.p.(x) pour presque tout r, donc p.s. (Q_{sx}^η), car la solution de (3.2) a une densité. Le théorème de Lebesgue entraîne le résultat.

Nous voulons maintenant supprimer la régularité de h. C'est possible si nous posons

$$\nu(x) = g(x)\exp[\eta_t.h_t(x)]$$

$$F(t,x) = G(t,x)\exp[\eta_t.h_t(x)]$$

Théorème 3.3 *Soient (A_1), (A_2), (3.1) vérifiés et $g \in H \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $G \in L^2(o,T;H) \cap L^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$. Alors la solution unique de (2.11) est*

$$\mu_{s\eta}(x) = \tilde{E}_{sx}^\eta\{g(x_t)Z_t^s + \int_s^t G(r,x_r)Z_r^s dx\}e^{\eta_s.h_s(x)} \quad p.p(s,x),\ p.s.(\eta)$$

où le p.s.(η) est par rapport à la mesure de Wiener.

Preuve : Soient h^m des approximations de h telles que $h^m \in \mathcal{C}_b^\infty([o,T]\times\mathbb{R}^n)$, $|h^m(t,x)|+|h^m_{x_i}(t,x)|+|\partial_t h^m(t,x)| \leq K$, et $h^m, h^m_{x_i}, \partial_t h^m \to h, h_{x_i}, \partial_t h$ dans $L^2([o,T]\times B)\ \forall B\subset\mathbb{R}^n$, B borné. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_o(\mathcal{C}(s,t;\mathbb{R}^d);\mathbb{R})$. Définissons $\tilde{P}_{sx}$ sur $\mathcal{G}_{sT}^n \otimes \mathcal{G}_{oT}^d$ par

$$\tilde{P}_{sx}(A\times B) = \int_B \tilde{P}_{sx}^\eta(A)\ \tilde{P}_w(d\eta)$$

et si $e^m(t)$ est défini comme e(t) sauf que h^m remplace h,

$$\xi_t = \eta_t.h_t^m(x_t) - \int_s^t[\sigma'\nabla(\eta.h^m)].dw - \int_s^t e^m(\zeta)d\zeta\ .$$

Puis

$$\tilde{E}_w\ \varphi(\eta)\ \mu_{s\eta}^m(x) = \tilde{E}_{sx}\{\varphi(\eta)[g(x_t)e^{\xi_t} + \int_s^t G(r,x_r)e^{\xi_r}dr]\}\ .$$

La formule de Itô appliquée à $\eta_r.h^m(r,x_r)$ entraîne que (n.b. la loi de $\{(x_r,\eta_r)\}$ est $\tilde{P}_{sx}$)

$$\xi_t = \eta_s.h_s^m(x) + \int_s^t h^m(r,x_r).d\eta_r - \frac{1}{2}\int_s^t|h^m(r,x_r)|^2 dr\ ,$$

ainsi

$$(3.6)\quad \tilde{E}_w\varphi(\eta)\mu_{s\eta}^m(x) = \tilde{E}_{sx}\{\varphi(\eta)[g(x_t)\,{}^mZ_t^s + \int_s^t G(r,x_r)\,{}^mZ_r^s dr]e^{\eta_s.h_s^m(x)}\}$$

si ${}^mZ_t^s$ est défini par (2.5) avec h^m au lieu de h, (n.b. $y = \eta$).

Nous voulons passer à la limite, $m \to \infty$. Pour $\eta \in$ supp φ, i.e. borné, on peut prendre la constante λ du lemme 2.1 indépendant de η, dont découle que

$$|\mu_{s\eta}^m|_H^2 \leq K\{|\nu|_H^2 + \|F\|_{L^2(s,t;H^{-1})}\} \leq K_o$$

i.e. $|\mu_{s\eta}^m|_H^2$ est bornée uniformément par rapport à $\eta \in$ supp φ.

D'ailleurs comme dans la démonstration du théorème 3.2, $|\mu^m_{s\eta} - \mu_{s\eta}|_H \to o \ \forall \eta$. Alors quitte à extraire une sous-suite

$$\tilde{E}_w\, \varphi(\eta)\mu^m_{s\eta}(x) \to \tilde{E}_w\, \varphi(\eta)\, \mu_{s\eta}(x) \qquad \text{p.p. } (x).$$

Quant au côté droit de (3.6), $h^m_s \to h_s$ p.p.(x) (pour une sous-suite) et d'ailleurs ${}^mZ^s_r \to Z^s_r$ en probabilité $\forall r$ car $\tilde{E}_{sx}|\int_s^r (h^m - h).d_\eta|^2 \to o$. En outre la borne $|h^m| \leq K$ entraîne qu'il y a $p > 1$ tel que

$$\sup_{m\,,\,r} \tilde{E}_{sx}\{({}^mZ^s_r)^p\} < \infty \ .$$

De cette intégrabilité uniforme découle maintenant la convergence du côté droit de (3.6) et donc le théorème.

<u>Corollary 3.2</u>. *Soient (A_1) (A_2), (3.1) vérifiés avec $C_y \leq C$ et $g \in H$, $G \in L^2(0,T;H)$,*

$$|g(x)| + |G(t,x)| \leq K(1 + |x|^q),\ q \geq 0$$

alors la conclusion du théorème 3.3 est encore correcte.

Preuve: Donnons la démonstration seulement pour le cas $G = 0$. Il exist $g_n \to g$ ponctuellement, g_n borné, $|g_n| \leq K(1 + |x|^q)$. En outre

$$\tilde{E}_w \tilde{E}^\eta_{sx}\{|x_t|^q Z^s_t\} = E_{sx}|x_t|^q < \infty\ ,$$

donc

$$\tilde{E}^\eta_{sx}\{g_n(x_t)Z^s_t\} \to \tilde{E}^\eta_{sx}\ g(x_t)Z^s_t\} \quad \text{p.s.}$$

La corollaire découle du fait que

$$|\mu^n_{s\eta} - \mu_{s\eta}|^2_H \leq K|g_n - g|^2_H \to 0,$$

si μ^n est la solution de (2.11) avec g_n.

<u>Théorème 3.4</u> *Soient (A_1)-(A_3) et (3.1) vérifiés. Soit ψ^η la solution unique de (2.9) et*

$$\rho^\eta_t(x) = \psi^\eta_t(x)\ exp[\eta_t . h_t(x)],$$

alors ρ^η_t est la densité conditionnelle non-normalisée de x_t sachant $\mathcal{Y}^d_{ot}$ (i.e. $\rho^{y(\omega)}_t$ est la densité sachant $\mathcal{F}^y_t$) et $\rho^{y(\omega)}_t$ vérifie $\forall v \in H^1$

$$(3.7) \quad d < \rho_t, v > = A_{t\,y(\omega)}(v, \rho_t)dt + < \rho_t\ h_t, v > .dy_t$$

$$\rho_o = p_o \ .$$

Preuve : selon le corollaire 2.1 ψ^η existe, unique.
Grâce à l'unicité, ψ^η_t ne dépend que de $\{\eta_s : o \leq s \leq t\}$. Soit $\mu_{.\eta}$ la solution de (2.11) avec $F = 0$, $\nu = g\, e^{\eta_t . h_t}$, $g \in H \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Grâce au théorème 3.3

$$< \psi_t^\eta, \mu_{t\eta} > - < \psi_o^\eta, \mu_{o\eta} > = \int_o^t \frac{d}{ds} < \psi_s^\eta , \mu_{s\eta} > ds$$

$$= \int_o^t \hat{\mathcal{A}}_{s\eta}(\mu_{s\eta}, \psi_s^\eta) - \mathcal{A}_{s\eta}(\mu_{s\eta}, \psi_s^\eta) ds$$

$$= 0$$

i.e.

$$< \psi_t^\eta , g\, e^{\eta_t . h_t} > = < p_o , \tilde{E}_{ox}^\eta \{g(x_t) Z_t^o\} > \quad \text{p.s.}$$

$$= \tilde{E}^\eta \{ g(x_t) Z_t^o \}$$

$$= \tilde{E} \{ g(x_t)\, Z_t^o | \mathcal{G}_{ot}^d \}$$

$$= E\{g(x_t) | \mathcal{G}_{ot}^d\} \tilde{E}\{Z_t^o | \mathcal{G}_{ot}^d\} .$$

Alors

$$(3.8) \quad < \rho_t^{y(\omega)}, g > = E\{g(x_t) | \mathcal{G}_t^y\} \tilde{E}\{ Z_t^o | \mathcal{G}_t^y\} \quad \text{p.s.,}$$

dont il découle que $\rho_t^{y(\omega)}(x) \geq 0$ p.s. On prend une suite $g^m \uparrow 1$ telle que $g^m \in H \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Puis (3.8) et la convergence monotone entraînent que

$$< \rho_t^{y(\omega)}, 1 > = \tilde{E}\{ Z_t^o | \mathcal{G}_t^y\} \quad \text{p.s.}$$

et alors $< p_t^{y(\omega)} , g > = E\{g(x_t) | \mathcal{G}_t^y\}$ si $p_t^\eta(x) = \rho_t^\eta(x) < \rho_t^\eta , 1 >^{-1}$.
Donc $p_t^{y(\omega)}$ est la densité conditionnelle de x_t sachant $\mathcal{G}_t^y$.

Il ne reste que la preuve de (3.7). Soit $\Phi(t,\psi,y) = < \psi \exp(y.h_t), v >$, $(t,\psi,y) \in [o,T] \times H \times \mathbb{R}^n$. Le processus $Y_t = (t,\psi_t,y_t)'$ satisfait à

$$dY_t = B_t\, dt + D\, dy_t$$

si $B_t' = (1, \mathcal{A}_{ty}(.,\psi_t^y), 0)$, $D' = (0,0,1)$. Observons que $< \rho_t^y , v > = \Phi(t,\psi_t^y,y_t)$ et appliquons la formule de Itô établie dans la partie(a)de la démonstration du théorème 1.2,[11], pour déduire

$$(3.9) \quad d < \rho_t^y , v > = [\mathcal{A}_{ty}(e^{y_t . h_t} v, \psi_t^y) + < \rho_t^y y_t . \partial_t h_t , v > + \frac{1}{2} < |h_t|^2 \rho_t^y , v >]\, dt$$

$$+ < \rho_t^y h_t , v > . dy_t .$$

Nous vérifions aisément que

$$\mathcal{A}_{ty}(v\, e^{y.h}, \psi) + < \rho_t^y (y.\partial_t h + \frac{1}{2} |h|^2), v > = A_{ty}(v, e^{y.h} \psi),$$

dont découle (3.7). Remarquons que la formule de Itô exige que $t \to \partial_t h_t$ soit continue mais on peut quand même établir (3.9) en régularisant h (dans la définition de Φ , mais pas dans $\mathcal{A}_{ty}$) et puis en passant à la limite dans (3.9).

4 LE CAS NON-BORNE

Nous voulons maintenant remplacer (3.1) par

$$(A_4)\qquad |\partial_t h(t,x)| \leq K(1+|x|^2), \quad |h_{x_i}(t,x)| \leq K(1+|x|)$$
$$\tilde{E}_{sx}\, Z_T^s = 1 \qquad \forall s \in [o,T],\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Observons que les bornes dans (A_4) entraînent

$$(4.1)\qquad |h(t,x)| \leq K_h(1+|x|^2).$$

et que nous donnons une condition, indépendente de h, qui entraîne $\tilde{E}\, Z = 1$ à la fin de l'article.

Pour le problème

$$(4.2)\qquad \frac{d\mu}{ds} + \mathcal{L}_{s\eta}\,\mu + F = 0 \quad , \qquad o \leq s \leq t,$$
$$\mu_t = \nu,$$

on sait déjà dans le cas régulier, i.e. solutions dans $C^{1,2}$, que les solutions ne sont pas à priori bornées, mais plutôt elles satisfont $|\mu_t(x)| \leq \exp(\beta|x|^2)$. Alors on ne peut plus souhaiter que $\mu \in W(o,t)$. Posons

$$L^2_{\ell oc}(o,t;H^1) = \bigcap_{\mathcal{O}} L^2(o,t;H^1(\mathcal{O}))$$

où l'intersection est sur tout $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, borné, ouvert. Puis si $v \in \mathcal{C}_o^\infty((o,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ et si $\mu \in L^2_{\ell oc}(o,t;H^1)$ on a $(\mathcal{L}_{s\eta}\ \mu_s,\ v_s) \equiv (\mu_s,\ \mathcal{L}_{s\eta}{}^* v_s) = \mathcal{A}_{s\eta}(\mu_s, v_s)$ puisque $\mu_s v_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Donc on dit que $\mu \in L^2_{\ell oc}(o,t;H^1)$ est une solution de (4.2) ou (2.11) si $\forall\ v \in \mathcal{C}_o^\infty((o,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, μ vérifie

$$(4.3)\qquad \langle \nu, v_t \rangle + \int_o^t \mathcal{A}_{r\eta}(\mu_r, v_r)dr + \int_o^t \langle F(r), v_r \rangle dr = \int_o^t \langle \mu_r, \partial_t v_r \rangle dr.$$

Avec $d > o$, $\xi \geq 1$, $\delta > o$ définissons

$$\varphi^{d,\xi,\tau}(s,x) = \exp\{(d+\xi|x|^2)e^{d(\tau-s)}\}$$
$$S_t^{d,\delta} = \{u \in L^2_{\ell oc}(o,t;H^1) : (\varphi^{d,\zeta,\tau})^{-1} u \in L^2((\tau-\delta)^+,\tau;H^1), \forall \tau = t, t-\delta, t-2\delta, \ldots, \tau > o\}$$

Rappelons que $\tau^+ = \max\{\tau, o\}$. Ici on a fixé η encore et on a posé $\zeta = \max\{\sup_s |\eta_s| K_h, 1\}$

Lemme 4.1 *Soient t,η fixés. Il y a $d,\delta > o$ tels que (4.3) n'a qu'une solution dans $S_t^{d,\delta}$.*

Preuve : Soient μ_1, μ_2 deux solutions dans $S_t^{d,\delta}$. Posons $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2$ et fixons $\xi > \zeta$. Soit

$$\lambda_s(x) = \varphi^{d\xi t}(s,x)^{-1}\ \bar{\mu}_s(x)$$

Alors $(1+|x|^4)\lambda \in L^2(t-\delta,t;H^1)$ parce que

$$\varphi^{d\xi t}(s,x)=\varphi^{d\zeta t}(s,x)\exp[(\xi-\zeta)|x|^2 e^{d(t-s)}]$$

et $(1+|x|^4)\exp[-(\xi-\zeta)|x|^2]$ est borné.

Soit $v\in \mathcal{C}_0^\infty((t-\delta,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, puis (4.3) entraîne

$$\int_{t-\delta}^{t} \mathcal{A}_{r\eta}(\lambda\varphi,v)\,dr = \int_{t-\delta}^{t} <\lambda\varphi, \partial_t v>dr = \int_{t-\delta}^{t}<\lambda,\partial_t(\varphi v)>dr - \int_{t-\delta}^{t}<\lambda, v\,\partial_t\varphi>dr$$

En posant $v(r,x) = \varphi^{-1}(r,x)\bar{v}(x)\zeta(r)$ avec $\bar{v}\in {}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\zeta\in {}_0^\infty(t-\delta,\infty)$ on obtient (avec $\frac{dy}{ds}$ une fonctionelle sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)

$$<\frac{d\lambda}{ds},\bar{v}>+<\lambda,\varphi^{-1}\frac{d\varphi}{ds}\bar{v}>+\mathcal{A}_{s\eta}(\lambda\varphi,\varphi^{-1}\bar{v})=0$$

i.e.

$$(4.4)\qquad \frac{d\lambda}{ds}+\hat{A}_s(\lambda_s\,,\,.)=0$$

où

$$\hat{A}_s(\lambda,\bar{v}) = <\lambda,\varphi^{-1}\frac{d\varphi}{ds}\bar{v}>+\mathcal{A}_{s\eta}(\lambda\varphi,\varphi^{-1}\bar{v})$$

$$=<\lambda,-(d+\xi|x|^2)d\,e^{d(t-s)}\bar{v}>-\frac{1}{2}<a^{ij}\lambda_{x_i},\bar{v}_{x_j}>$$

$$-\frac{1}{2}<a^{ij}\lambda,2\xi x_i e^{d(t-s)}\bar{v}_{x_j}>+\frac{1}{2}<a^{ij}\lambda_{x_i},2x_j\xi e^{d(t-s)}\bar{v}>$$

$$+\frac{1}{2}<a^{ij}\lambda,4\xi^2 x_i x_j e^{2d(t-s)}\bar{v}>+<b^i\lambda_{x_i},\bar{v}>$$

$$+<b^i\lambda,2\xi x_i e^{d(t-s)}\bar{v}>+\frac{1}{2}<(\eta.h)_{x_i}a^{ij}\lambda,\bar{v}_{x_j}>$$

$$-\frac{1}{2}<(\eta.h)_{x_i}a^{ij}\lambda,2\xi x_j e^{d(t-s)}\bar{v}>-<[(\eta.h)_{x_i}b^i+(\eta.\partial_t h)+\frac{1}{2}|h|^2]\lambda,\bar{v}>$$

parce que $\frac{d\varphi}{ds}=-(d+\xi|x|^2)d\,e^{d(t-s)}\varphi$, $\frac{d\varphi}{dx_i}=2\xi x_i e^{d(t-s)}\varphi$.

Puisque $(1+|x|^4)\lambda\in L^2(t-\delta,t;H^1)$ on peut prolonger $\hat{A}_s(\lambda,.)$ à H^1 et donc (4.4) entraîne que $\frac{d\lambda}{ds}\in L^2(t-\delta,t;H^{-1})$, i.e. $\lambda\in W(t-\delta,t)$. Alors si $t-\delta\leqslant s\leqslant t$ et si c_o, c_1, c_2 sont des constantes convenables on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|\lambda_s|^2=<\frac{d\lambda_s}{ds},\lambda>$$

$$\geqslant -\hat{A}_s(\lambda,\lambda)-\frac{1}{2}<|h|^2\lambda,\lambda>$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{4}|\lambda_x|^2-<[c_o\xi^2 e^{2d(t-s)}|x|^2+c_1\xi(1+|x|^2)e^{d(t-s)}+c_2(1+|x|^2)-$$

$$-d(d+\xi|x|^2)e^{d(t-s)}]\lambda,\lambda>$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{4}|\lambda_x|^2$$

si $d\xi\geqslant c_o\xi^2e^{d\delta}+c_1\xi+c_2$ et $d^2\geqslant c_1\xi+c_2$.

Un tel choix de (d,δ) est toujours possible - e.g. on pose $d>\max\{\xi,c_o\xi+c_1+c_2\}$ et puis on pose $\delta=d^{-1}\log[d-c_1-c_2)/c_o\xi]>d^{-1}\log 1=0$.

Remarquons que nous avons utilisé $2|<\beta u,v>| \leq \varepsilon |u|^2 + \varepsilon^{-1} <\beta^2 v,v>$.

Mais $\lambda_t = 0$ et $\frac{d}{ds}|\lambda_s|^2 \geq 0$; il découle que $\lambda_s \equiv 0$ sur $[t-\delta,t]$, i.e. $\overline{\mu}_s \equiv 0$ sur $[t-\delta,t]$. Répétons l'argument sur $[t-\delta,t-2\delta]$. Puisque c_o, c_1, c_2 sont uniforme par rapport à t, alors d,δ le sont aussi , i.e. (4.5) est encore vérifié et $\overline{\mu} \equiv 0$ sur $[t-2\delta,t-\delta]$.

On continue jusqu'à 0 i.e. $\overline{\mu} \equiv 0$ sur $[o,t]$. C.Q.F.D.

Observons que d,δ dépend seulement de c_o, c_1, c_2, i.e. seulement des constantes dans (A_1) (A_2) (A_4) - et de η fixé. On choisit d,δ tel que le résultat est vrai quand on a dans (A_4): $|h_{x_i}| \leq K(1+3|x|)$. On verra tout de suite pourquoi le 3.

Soit $S_t = S_t^{d\delta}$.

<u>Théorème 4.1</u> *Soient (A_1)-(A_4) vérifiés et η, g, G fixés tel que*

$$|g(x)| + |G(s,x)| \leq K(1+|x|^q) \qquad q<\infty$$

Alors il y a une solution $\mu_{s\eta}$, unique dans S_t, de

$$(4.6)\quad <g e^{\eta_t . h_t}, v_t> + \int_0^t \mathcal{A}_{s\eta}(\mu_s, v_s)ds + \int_0^t <G(s,.)e^{\eta_s . h_s}, v_s> ds =$$

$$= \int_0^t <\mu_s, \partial_t v_s> ds, \quad v \in \mathcal{C}_o^\infty((o,\infty)\times \mathbb{R}^n).$$

De plus

$$(4.7)\quad \mu_{s\eta}(x) = \tilde{E}^\eta_{sx}\{g(x_t)Z_t^s + \int_s^t G(r,x_r)Z_r^s dr\} exp[\eta_s . h_s(x)].$$

Preuve : Soient $g^m(x) = g(x)\,\mathbb{I}_{\{|x|\leq m\}}(x)$, $G^m(t,x) = G(t,x)\,\mathbb{I}_{\{|x|\leq m\}}(x)$ et g^m_ε, G^m_ε des régularisations par rapport à x de g^m et G^m. Soient

$$h^n(s,x) = \begin{cases} h(s,x) & \text{si } |x| \leq n \\ h(s,x)\left(\dfrac{1+n^2}{1+|x|^2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^n(s,x,\eta) = \begin{cases} f(s,x,\eta) & \text{si } |x| \leq n \\ f(s,x,\eta)\left(\dfrac{1+n}{1+|x|}\right) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Alors $g^m_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H$, continue, $G^m_\varepsilon \in L^\infty(o,t)\times \mathbb{R}^n) \cap L^2(o,t;H)$ continue par rapport à x, $|h^n(s,x)| \leq K(1+n^2)$, $|\partial_t h^n(s,x)| \leq K(1+n^2)$ $|h^n_{x_i}(s,x)| \leq K(1+3|x|)$: observons l'apparence du 3! Aussi $|f^n(t,x,\eta)| \leq C_\eta(1+|x|)$.

Soit μ^n la solution de (2.11) (c.f. Théorème 3.3) correspondante à f^n, h^n, g^m_ε, G^m_ε. Soit $\lambda^n_s = \mu^n_s\, \varphi^{d\zeta t}(s,.)^{-1}$ sur $[t-\delta,t]$. Comme dans la démonstration du lemme mais avec $\xi = \zeta$, $h = h^n$, $f = f^n$ on obtient

$$\frac{d}{ds}|\lambda^n|^2_H \geq \frac{\alpha}{2}|\lambda^n_x|^2_H - 2 <F^m_\varepsilon \varphi^{-1}, \lambda^n>$$

avec $F^m_\varepsilon = G^m_\varepsilon e^{y.h^n}$. Alors

$$\frac{\alpha}{2}\int_{t-\delta}^{t}|\lambda_x^n|^2 \leq |\lambda_t^n|_H^2 - |\lambda_{t-\delta}^n|_H^2 + \int_{t-\delta}^{t}|F_\varepsilon^m\,\varphi^{-1}|_H^2 + \int_{t-\delta}^{t}|\lambda^n|_H^2$$

et aussi

$$\frac{d}{ds}|\lambda_s^n|_H^2 \geq -|F_\varepsilon^m\varphi^{-1}|_H^2 - |\lambda_s^n|_H^2$$

i.e. $|\lambda_s^n|_H^2 \leq |\lambda_t^n|_H^2\, e^{t-s} + \int_s^t |F_\varepsilon^m\,\varphi^{-1}|_H^2\, e^{r-s}\,dr$

$$\leq [\,|\lambda_t^n|_H^2 + \|F_\varepsilon^m\varphi^{-1}\|^2_{L^2(s,t;H)}\,]\,e^\delta$$

si $t-\delta\leq s\leq t$. Il découle que

$$\int_{t-\delta}^{t}\|\lambda^n\|^2_{H^1}\,ds \leq \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2\delta e^\delta}{\alpha} + \delta e^\delta\right)\left(|\lambda_t^n|_H^2 + \|F_\varepsilon^m\,\varphi^{-1}\|^2_{L^2(t-\delta,t;H)}\right)$$

et

$$(4.8)\qquad |\lambda_t^n|_H^2 \leq \int |K(1+|x|^q)e^{|\eta_t|K_h(1+|x|^2)}\,e^{-(d+\zeta|x|^2)}|^2\,dx < \infty$$

$$\|F_\varepsilon^m\varphi^{-1}\|^2_{L^2} \leq \int_{t-\delta}^{t}\int |K(1+|x|^q)e^{|\eta_r|K_h(1+|x|^2)}\,e^{-(d+\zeta|x|^2)}|^2\,dx\,dr < \infty\,.$$

Alors

$$(4.9)\qquad \sup_{n,m,\varepsilon}\int_{t-\delta}^{t}\|\lambda^n\|^2_{H^1}\,ds<\infty\,,\qquad \sup_{n,m,\varepsilon,s\in[t-\delta,t]}|\lambda_s^n|_H^2<\infty.$$

Donc λ^n est contenu dans un ensemble borné de $L^2(t-\delta,t;H^1)$ et $\lambda^k_{t-\delta}$ dans un ensemble borné de H. Alors, quitte à extraire une sous-suite, il y a λ tel que $\lambda^n \to \lambda$ faiblement. D'ailleurs $\lambda_t^n \to g_\varepsilon^m\, e^{\eta_t\cdot h(t,.)}\varphi(t,.)^{-1}\in H$ par convergence dominée. Soit $v\in\mathcal{C}_o^\infty((o,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Selon le corollaire 2.1.

$$(4.10)\qquad <\mu_t^n,v_t> - <\mu_{t-\delta}^n,v_{t-\delta}> + \int_{t-\delta}^{t}\mathcal{A}_{s\eta}^n(\mu_s^n,v_s)ds + \int_{t-\delta}^{t}<F_\varepsilon^m,v_s>ds = \int_{t-\delta}^{t}<\mu_s^n,\partial_t v_s^n>ds$$

i.e. $<\lambda_t^n,\varphi v> - <\lambda_{t-\delta}^n,\varphi v> + \int_{t-\delta}^{t}\mathcal{A}_{s\eta}^n(\lambda_s^n\varphi,v_s)ds + \int_{t-\delta}^{t}<F_\varepsilon^m,v_s>ds = \int_{t-\delta}^{t}<\lambda_s^n,\varphi\,\partial_t v_s>ds.$

Mais $\mathcal{A}_{s\eta}^n(\lambda^n\varphi,v) = \mathcal{A}_{s\eta}(\lambda^n\varphi,v)$ si supp $v\subset\{x: |x|\leq n\}\times(o,\infty)$.

Donc la convergence s'obtient dans (4.10) si $n\to\infty$, i.e. $\mu_s^n \to \lambda\varphi \equiv \mu_{s\eta}$ et

$$<\mu_t,v_t> - <\mu_{t-\delta},v_{t-\delta}> + \int_{t-\delta}^{t}\mathcal{A}_{s\mu}(\mu_s,v_s)ds + \int_{t-\delta}^{t}<F_\varepsilon^m,v_s>ds = \int_{t-\delta}^{t}<\mu_s,\partial_t v_s>ds\,.$$

On peut continuer sur $[t-2\delta,\ t-\delta]$ $[t-3\delta,t-2\delta]$, ... pour éventuellement obtenir $\mu_{s\eta}$ sur $[o,t]$ qui satisfait à (n.b. $v_o = o$)

$$(4.11)\qquad <g_\varepsilon^m e^{\eta_t\cdot h_t}\,,\ v_t> + \int_o^t\mathcal{A}_{r\eta}(\mu_r,v_r)dr + \int_o^t<F_\varepsilon^m,v_r>dr = \int_o^t<\mu_r,\partial_t v_r>dr$$

Comme au dessus on a convergence faible des λ quand $\varepsilon\to o$, $m\to\infty$ à cause de (4.9). De plus $g_\varepsilon^m\to g$, $F_\varepsilon^m\to F$ p.p. et donc on peut passer à la limite dans (4.11), i.e. (4.6) est vérifié.

Vérifions maintenant (4.7). Fixons $s\in[o,t]$. Selon le théorème 3.3.

$$\mu_s^n(x)={}^n\tilde{E}_{sx}^\eta\{g_\varepsilon^m(x_t)\,{}^nZ_t^s+\int_s^t G_\varepsilon^m(r,x_r)\,{}^nZ_r^s dr\}\exp[y_s.h^n(s,x)]$$

où ${}^n\tilde{E}_{sx}^\eta$ est l'espérance par rapport à ${}^n\tilde{P}_{sx}^\eta$, la loi de la solution de

$$(4.12)\qquad dx=f^n\,dt+\sigma dw\ ,\quad x_s=x\ .$$

Avec $\rho\in\mathcal{C}_o(\mathbb{R}^n)$, $\rho\geq o$, $\int_{\mathbb{R}^n}\rho\,dx=1$ posons

$${}^n\tilde{P}_{s\rho}^\eta(A)\equiv\int\rho(x)\ {}^n\tilde{P}_{sx}^\eta(A)\,dx\ ,$$

alors ${}^n\tilde{P}_{s\rho}^\eta$ est la loi de la solution de (4.12) avec distribution initiale, i.e. distribution de x_s, $\rho(x)dx$. Définissons $\tilde{P}_{s\rho}^\eta$ de la même façon, et ${}^nP_{s\rho}^r, P_{s\rho}^r$ par

$$d({}^nP_{s\rho}^r)={}^nZ_r^s\ d({}^n\tilde{P}_{s\rho}^\eta)d\tilde{P}_w\ ,$$

$$d\ P_{s\rho}^r=Z_r^s\ d(\tilde{P}_s^\eta)d\tilde{P}_w\ ,$$

donc ${}^nP_{s\rho}$ est la loi de la solution de

$$dx=f^n(t,x,y)dt+\sigma(t,x,y)dw\qquad t\geq s,$$

$$dy=h^n(t,x)dt+d\tilde{w}\qquad r\geq t\geq s,$$

y mouvement Brownien $t>r$

avec la loi initiale $\rho(x)dx\times N(o,sI)$, où $N(o,sI)$ est la loi de y_s si y est un mouvement Brownien standard.

Soit $\Psi\in\mathcal{C}(\mathcal{E}(o,T;\mathbb{R}^d);\mathbb{R})$ borné, $\mathcal{Y}_{st}^d$ mesurable.

Alors

$$(4.13)\quad \tilde{E}_w\{\Psi(\eta)<\mu_s^n e^{-\eta_s.h_s^n},\rho>\}=\tilde{E}\{\Psi(\eta)\ {}^n\tilde{E}_{s\rho}^\eta\{g_\varepsilon^m(x_t)\,{}^nZ_t^s+\int_s^t G_\varepsilon^m(r,x_r)\,{}^nZ_r^s dr\}$$

$$={}^nE_{s\rho}^t\{\Psi(\eta)g_\varepsilon^m(x_t)\}+\int_s^t {}^nE_{s\rho}^r\{\Psi(\eta)G_\varepsilon^m(r,x^r)\}dr$$

mais $f^n=f$, $h^n=h$ si $|x|\leq n$, alors ${}^nP_{s\rho}^r\to P_{s\rho}^r$ étroitement, [13], Théorème II.3.4, et ainsi on peut passer à la limite dans le côté droit de (4.13) car Ψ, g_ε^m, G_ε^m sont bornés, continus.

Quant au côté gauche, pour n suffisamment grand on a

$$<\mu_s^n,\rho e^{-\eta_s.h_s^n}>=<\mu_s^n,\rho e^{-\eta_s.h_s}>$$

$$=<\lambda_s^n,\varphi\rho e^{-\eta_s.h_s}>$$

$$\to<\lambda_s,\varphi\rho e^{-\eta_s.h_s}>$$

$$=<\mu_{s\eta},\rho e^{-\eta_s.h_s}>$$

$\forall\eta$ parce que $\varphi\rho e^{-\eta_s.h_s}\in H$ et $\lambda_s^n\to\lambda_s$ faiblement. De plus

$$|\mu_s^n(x)e^{-\eta_s.h_s(x)}|\leq|{}^n\tilde{E}_{sx}^\eta\{g_\varepsilon^m(x_t)\,{}^nZ_t^s+\int_s^t G_\varepsilon^m(r,x_r)\,{}^nZ_r^s dr\}$$

$$\leq K_\varepsilon^m\ .$$

La convergence dominée entraîne qu'on peut passer à la limite dans le côté gauche. Puisque $<\mu_{s\eta}, \rho \exp(-\eta_s.h_s)>$ est $\mathcal{Y}^d_{st}$ mesurable et ρ est arbitraire, il découle

$$(4.14) \quad \mu_{s\eta}(x)= \tilde{E}^{\eta}_{sx}\{ g^m_\varepsilon(x_t)Z^s_t + \int_s^t G^m_\varepsilon(r,x_r)^n Z^s_r dr\} \qquad \text{p.p } x,\eta.$$

Maintenant on fait tendre $\varepsilon \to o$ et puis $m \to \infty$. Comme nous avons déjà remarqué , le côté gauche converge, et de même pour le côté droit quand $\varepsilon \to o$ grâce à la convergence dominée. Si $P_{sx} = P_{s\rho}$ avec la mesure de Dirac concentrée à x, alors

$$E_{sx}\{ \sup_{s\leq r\leq t} |x_r|^q | \mathcal{Y}^d_{st}\} = E^{\eta}_{sx}\{\sup|x_r|^q\} < \infty$$

grâce à $(A_1),(A_2)$. Donc

$$\tilde{E}^n_{sx}|\int_s^t G(r,x_r)Z^s_r dr| = \int_s^t \tilde{E}_{sx}\{|G(r,x_r)|Z^s_r|\mathcal{Y}^d_{sr}\}dr$$

$$= \int_s^t E_{sx}\{|G| \,|\mathcal{Y}^d_{sr}\}\tilde{E}^{\eta}_{sx}(Z^s_r)dr$$

$$\leq K(\eta) \int_s^t \tilde{E}^{\eta}_{sx}(Z^s_r)dr$$

Selon (A_4)

$$1 = \tilde{E}_{sx}\{Z^s_T\} = \tilde{E}_{sx}\{Z^s_t\} = \tilde{E}_{sx}\{\tilde{E}^{\eta}_{sx}(Z^s_t)\},$$

donc $\int_s^t \tilde{E}^{\eta}_{sx}(Z^s_r)dr < \infty$ p.s. (η), et on peut passer à la limite $(m \to \infty)$ dans (4.14) grace à la convergence dominée.

Corollaire 4.1 *Soient (A_1)-(A_4) vérifiés. Alors il y a une solution unique dans S_T de*

$$(4.15) \quad <p_o,v_o> + \int_0^T \mathcal{A}_{t\eta}(v_t,\psi_t)dt + \int_0^t <\psi_t, \partial_t v_t> dt = 0 ,\forall v \in \mathcal{C}^\infty_0((-\infty,T)\times\mathbb{R}^n).$$

Preuve : En faisant un retournement du temps on retombe sur le théorème 4.1 avec $\mathcal{A}_{s\eta}(u,v)$ remplacé par $\mathcal{A}_{T-s,\eta}(v,u)$. On peut même poser $\zeta = 1$. La première partie de la démonstration du théorème donne le résultat, en observant que la borne dans (4.8) peut être remplacée par

$$|\lambda^n_T|^2_H = |p^n_o|^2_H |(\varphi^{d,1,T})^{-1}|^2_\infty \leq |p^n_o|^2_H$$

qui est borné uniformément par rapport à n car $p^n_o \to p_o$ dans H. Remarquons que la deuxième partie de la démonstration, i.e. la représentation, ne marcherait plus parce que y n'est plus un mouvement Brownien.

Corollaire 4.2 *Soient (A_1)-(A_4) vérifiés et soit ψ^η la solution unique de (4.15). Alors*

$$\rho^y_t(x) \equiv \psi^y_t(x) \exp[y_t.h(t,x)]$$

est la densité conditionnelle non-normalisée de x_t sachant $\mathcal{G}^y_t$, et $\forall v \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^n)$

$$(4.16)\quad <\rho^y_t, v> = <p_o, v> + \int_o^t A_{sy}(v,\rho^y_s)ds + \int_o^t <\rho^y_s h_s, v> .dy_s .$$

Preuve : Soit μ^n la solution de (2.11) correspondante à f^n, h^n, $g \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R}^n)$, $G=0$, c.f. la démonstration du théorème 4.1, et soit ψ^n la solution correspondante de (2.9). Alors, c.f. la démonstration du théorème 3.4,

$$(4.17)\quad <\psi^n_t, g\, e^{\eta_t . h^n(t,.)}> = {}^n\tilde{E}^\eta\{g(x_t)\,{}^nZ^o_t\}$$

avec ${}^n\tilde{P}^\eta = {}^n\tilde{P}^\eta_{op_o}$, c.f. (4.12) et suivant. Mais

$$<\psi^n_t, g\, e^{\eta_t . h^n_t}> = <\psi^n_t \varphi^{-1}, \varphi g\, e^{\eta . h^n}>$$
$$\to <\psi^\eta_t \varphi^{-1}, \varphi g\, e^{\eta . h}>$$
$$= <\psi^\eta_t, g\, e^{\eta_t . h_t}>$$

parce que $\psi^n_t \varphi^{-1} \to \psi^y_t \varphi^{-1}$ faiblement dans H et $h^n = h$ sur support g si n suffisament grand. Pour le côté droit de (4.17) on a, pour $\Psi \in \mathcal{E}(\mathcal{C}(o,T;\mathbb{R}^d);\mathbb{R})$ borné, $\mathcal{G}^d_{ot}$ mesurable, que

$$\tilde{E}_w\{\Psi(\eta)\,{}^n\tilde{E}^\eta\{g(x_t)\,{}^nZ^o_t\}\} = {}^nE^t_{op_o}\{\Psi(\eta)g(x_t)\}$$
$$\to E^t_{op_o}\{\Psi(\eta)g(x_t)\} = \tilde{E}_w\{\Psi(\eta)\tilde{E}^\eta\{g(x_t)Z^o_t\}\}$$

comme dans la démonstration de (4.14). Alors

$$(4.18)\quad <\psi^y_t, g\, e^{y_t . h(t,.)}> = \tilde{E}^y\{g(x_t)Z^o_t\} = \tilde{E}\{g(x_t)Z^o_t | \mathcal{G}^y_t\} .$$

Le reste de la démonstration que ρ est la densité se fait comme pour le théorème 3.4.

Grâce à (3.7) on a

$$(4.19)\quad <\rho^n_t, v> = <p_o, v> + \int_o^t A^n_{sy}(v,\rho^n_s)ds + \int_o^t <\rho^n_s h^n, v>.dy.$$

Posons tout de suite n suffisament grand que $h^n = h$, $f^n = f$ sur le support de v. Prenons $o \leqslant t \leqslant \delta$ pourqu'on n'ait qu'un φ. Le cas plus général se fait en répétant la démarche suivante. $\lambda^n \to \lambda$ faiblement dans $L^2(o,t;H^1)$, alors il y a une combinaison convexe telle que la convergence est forte. Parce que (4.19) est linéaire par rapport à ρ^n on a donc, même pour les combinaisons convexes, que

$$<\psi^n_t, e^{y_t . h_t} v> = <p_o, v> + \int_o^t A_{sy}(v, e^{y_s . h_s}\psi^n_s)ds + \int_o^t <\psi^n_s, h_s e^{y_s . h_s} v> dy$$

On a déjà vu que $<\psi^n_t, e^{y_t . h_t} v> \to <\psi^y_t, e^{y_t . h_t} v>$, c.f. (4.17). La convergence (même faible) de $\psi^n \varphi^{-1} = \lambda^n \to \lambda = \psi^y \varphi^{-1}$ dans $L^2(o,t;H^1)$ entraîne que

$$\int_o^t A_{sy}(v, e^{y_s . h_s}\psi^n_s)ds \to \int_o^t A_{sy}(v, e^{y_s . h_s}\psi^y_s)ds \quad \text{p.s.}$$

c.f. (2.7). Finalement la convergence forte de $\psi^n \varphi^{-1} \to \psi^y \varphi^{-1}$ et

$$|\varphi\, h\, e^{y.h} v|^2 \leqslant K_o\, e^{|y|k} \leqslant K_1\, e^{\varepsilon |y|^2}$$

et

$$|\lambda_s^n|_H^2 \leq K_2 |p_o|_H^2$$

entraînent, par convergence dominée, que

$$\int_o^t < \psi_s^n, h\, e^{y.h} v > dy \to \int_o^t < \psi_s^y, h\, e^{y.h} v > dy$$

dans $L^2(\tilde{P}_w)$. Donc (4.16) est vérifié.

Remarque Observons que $|\varphi^{d,\zeta,\tau}(s,x)| \leq e^{(d+\zeta|x|^2)e^{d\delta}} \leq K\, e^{\beta|x|^2}$ et même $|\varphi_{x_i}^{d,\zeta,\tau}(s,x)| \leq K\, e^{\beta|x|^2}$ si K, β suffisament large.

Notons

$$H_\beta = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, e^{-2\beta|x|^2} dx \equiv |f|_\beta^2 < \infty \}$$

$$H_\beta^1 = \{ f \in H_\beta : |f_{x_i}|_\beta < \infty \},$$

$$\|f\|_\beta = |f|_\beta + \sum_i |f_{x_i}|_\beta$$

Puis $\mu_{.\eta} \in L^2(o,t;H_\beta^1)$ parce que

$$|\mu_{s\eta}|_\beta = |\lambda_s\, \varphi_s^{d,\zeta,\tau}|_\beta \leq |\lambda_s|_H\, K \quad .$$

Donc

$$\int_o^t \|\mu_{s\eta}\|_\beta^2\, ds \leq K^2 \sum_i \int_{t-(i+1)\delta}^{t-i\delta} \|\lambda_s\|^2\, ds < \infty$$

Il faut se rendre compte que β dépend de ζ, alors de η .
Par contre pour ψ^η nous avons posé $\zeta = 1$, alors $\psi^\eta \in L^2(o,t;H_\beta^1)$ avec β indépendant de η.

5. LE PROBLEME SEPARE

Nous pouvons déduire facilement le problème séparé qui correspond au problème de contrôle optimal stochastique avec information partielle, (1.1)-(1.5). Faisons les hypothèses suivantes :

(B_1) $\sigma : [o,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, borélien,

$|\sigma(t,x,u) - \sigma(t,\bar{x},u)| \leq C_R\, |x-\bar{x}|$, $\forall |u| \leq R$,

$|\sigma(t,x,u)| \leq K$

$a(t,x,u) = \sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)' \geq \alpha I,\ \alpha > o$

On pourrait, en fait, remplacer la dernière inégalité par :

$a(t,x,u) \geq \alpha_R I,\ \ \forall |u| \leq R\ ,\ \alpha_R > o$

(B_2) $f : [o,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, borélien

$|f(t,x,u)| \leq K(1 + |x| + |u|)$,

$x \to f(t,x,u)$ Lipschitzien uniformément par rapport à (t,x,u) dans chaque sous-ensemble compact de $[o,T] \times \mathbb{R}^n \times U$.

(B_3) $\quad p_o \in H$

(B_4) $\quad h : [o,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ borélien

$\quad |h(t,x)| + |h_{x_i}(t,x)| \leq K(1 + |x|)$

$\quad |\partial_t h(t,x)| \leq K(1 + |x|^2)$

(B_5) $\quad \ell : [o,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ borélien

$\quad c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélien

$\quad |\ell(t,x,u)| + |c(x)| \leq K(1 + |x|^q)$, $q > o$

<u>Lemme 5.1</u> *Soient $(B_1),(B_2),(B_4)$ vérifiés et soit*

(5.1) $|u(t,y)| \leq K(1 + \sup_{o \leq s \leq t} |y_s|)$

alors $\tilde{E}_{sx} Z_t^s = 1.$

Ce résultat est bien connu. Le théorème suivant nous donne le problème séparé.

<u>Théorème 5.1</u> *Soient (B_1)-(B_5) vérifiés. Alors* $\forall u \in \mathcal{U}$ *tel que (5.1) soit satisfait,*

$$J(u) = \tilde{E}\{\int_o^T < \ell(t,.,u_t), \rho_t^y > dt + <c, \rho_t^y> \}.$$

Preuve : Grâce à (4.18)

$$J(u) = \tilde{E}\{ Z_T^o [\int_o^T \ell(t,x_t,u_t)dt + c(x_T)]\}$$

$$= \tilde{E}\{\int_o^T \tilde{E}^y\{Z_t^o \ \ell(t,x_t,u_t)\}dt + \tilde{E}^y\{Z_T^o \ c(x_T)\}\}$$

$$= \tilde{E} \int_o^T < \rho_t^y, \ell(t,.,u_t)> dt + < \rho_T^y , c >\}$$

si nous observons que (4.18) est satisfait si $g = c$ ou $g = \ell(t,.,u_t)$. En fait le théorème de convergence monotone entraîne que (4.18) est vrai avec g borné soit au-dessus soit au-dessous. Sans cette bornitude on observe que $|h| \leq K(1 + |x|)$, (5.1) et (B_5) entraînent, comme dans la corollaire 3.2, que p.s. $\tilde{E}^y|g(x_t)|Z_t^o < \infty$ (g=c ou ℓ); donc on peut appliquer la convergence monotone à g^+ et g^- si $g = g^+ - g^-$.

<u>Corollaire 5.1</u> *Avec les hypothèses du théorème,*

$J(u) = \tilde{E} < \mu_{oy}, p_o >$

Preuve : Le résultat découle de (4.7).

<u>Remarque 5.1</u> On peut remplacer (B_4) (B_5) et (5.1) par

(B_6) $\quad h: [o,t] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ borélien

$$|h_{x_i}(t,x)| \leq K(1 + |x|)$$
$$|\partial_t h(t,x)| \leq K(1 + |x|^2)$$
$$\ell\colon [o,t] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R} \text{ borélien}$$
$$c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ borélien}$$
$$\ell,\ c \text{ borné unilatéralement}$$
$$|f(t,x,u)| \leq K(1 + |x|),\ \sigma = \sigma(t,x).$$

On voit tout de suite que la démonstration du théorème 5.1 est encore correct parce que on a le premier cas discuté pour (4.18), i.e. on n'a plus besoin du $|h| \leq K(1 + |x|)$. N.b. J(u) n'est plus forcément fini. Mais cette condition est aussi utilisée dans le lemme 5.1 pour démontrer que $\tilde{E}_{sx} Z^s_t = 1$; néanmois ce résultat découle du calcul suivant. Soit $\overset{\circ}{P}$ la loi de (X,Y) si

$$dX_t = \sigma(t,X_t)d\hat{w}_t,\ X_s = x$$
$$(\hat{w},Y) \text{ mouvement Brownien.}$$

Alors

$$dX = \sigma\ d\hat{w},\quad X_s = x$$
$$dY = h\ dt + d\tilde{w}$$

ou $(\hat{w}, \tilde{w})$ est un mouvement Brownien sous $d\hat{P} = Z^s_T\ d\overset{\circ}{P}$. L'indépendence de(X,Y) sous $\overset{\circ}{P}$ entraîne que $\overset{\circ}{E}\ Z^s_T = \overset{\circ}{E}\ \overset{\circ}{E}\{Z^s_T|\mathcal{F}^X\} = \overset{\circ}{E}\ 1 = 1$.

En plus

$$dX = f\ dt + \sigma\ dw$$

ou (w,Y) est un mouvement Brownien sous $d\tilde{P}_{sx} = \tilde{Z}^s_T d\overset{\circ}{P}$,

$$\tilde{Z}^s_T = \exp\{\int_s^T (\sigma^{-1}f)\cdot d\hat{w} - \frac{1}{2}\int_s^T |\sigma^{-1}f|^2 dt\}$$

Encore $\overset{\circ}{E}\ \tilde{Z}^s_T = \overset{\circ}{E}\ \overset{\circ}{E}\{\tilde{Z}^s_T|\mathcal{F}^Y\} = 1$. Finalement (X,Y) satisfont (2.1) (2.2), $X_s = x$ avec $(w,\tilde{w})$ un mouvement Brownien sous $dP = \tilde{Z}^s_T d\hat{P}$. Observons que $\hat{E}\ \tilde{Z}^s_T = 1$, et donc

$$1 = \hat{E}\ \tilde{Z}^s_T = \overset{\circ}{E}\ Z^s_T\ \tilde{Z}^s_T = \tilde{E}_{sx} Z^s_T$$

N.b. par l'unicité (même forte) on sait que $\tilde{P}_{sx}$ défini ici est egal au $\tilde{P}_{sx}$ du §2.

On peut maintenant établir des conditions nécessaires, c.f.[4], ou des conditions suffisantes, c.f. [3], pour ce problème, ce que nous ferons ailleurs. Probablement il est également posssible d'établir des liens entre la solution faible de l'équation de "Zakai" pour le cas "white noise" et le nôtre, c.f. [9] .

REFERENCES

[1] J.S. BARAS, G.L. BLANKENSHIP et W.E. HOPKINS.
Existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions to a class of Zakai equations with unbounded coefficients, IEEE Trans. A.C., 28(1983), 203-214.

[2] J.S. BARAS, G.L. BLANKENSHIP et S.K. MITTER.
Non linear filtering of diffusion processes, Proc. IFAC Congr., Kyoto, Japan, 1981.

[3] V.E. BENES et I. KARATZAS.
On the relation of Zakai's equation and Mortensen's equation, SIAM J. Control and Optimization, 21 (1983), 472 - 489.

[4] A. BENSOUSSAN.
Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially observed diffusions, Stochastics, 9 (1983), 169 - 222.

[5] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS.
Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique, Dunod, Paris, 1978.

[6] G.S. FERREYRA.
The robust equation of non linear filtering, preprint, Dept. of Mathematics, Louisiana State University.

[7] W.H. FLEMING et R.W. RISHEL.
Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York, 1975.

[8] U.G. HAUSSMANN. Optimal control of partially observed diffusions via the separation principle, Stochastic Differential Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 43 (1982), 302-311 .

[9] G. KALLIANPUR et R.L. KARANDIKAR.
A finitely additive white noise approach to nonlinear filtering, Appl.Math. Optim, 10 (1983), 159 - 185.

[10] E. PARDOUX.
Equation du filtrage non linéaire de la prédiction et du lissage, Stochastics, 6 (1982), 193 - 231.

[11] E. PARDOUX.
Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, Stochastics, 3 (1979), 127 - 167.

[12] S.J. SHEU.
Solutions of certain parabolic equations with unbounded coefficients and its application to nonlinear filtering, Stochastics, 10 (1983), 31 - 46.

[13] D. STROOCK et S.R.S. VARADHAN.
Multidimensional Diffusion Processes, Springer - Verlag, 1979.