MARC YOR

Compléments aux formules de Tanaka-Rosen

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 332-349
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__332_0>

COMPLEMENTS AUX FORMULES DE TANAKA-ROSEN.

Marc YOR

1. Introduction :

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n = 2$, ou 3, issu de 0. Considérons, pour tout ensemble Γ borélien, borné, de $\mathbb{R}_+^2$, la mesure $\lambda_\Gamma(dx)$, définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ par :

(1.a) $\quad \lambda_\Gamma(g) = \iint_\Gamma ds\, du\, g(B_s - B_u),$

pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, borélienne.

D'après Rosen [5], $\lambda_\Gamma(dx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (dx). Plus précisément, il existe une fonction $\alpha(x\, ;\, \Gamma)$ continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, telle que :

(1.b) $\quad \lambda_\Gamma(g) = \int dx\, g(x)\, \alpha(x\, ;\, \Gamma).$

On appellera $(\alpha(x\, ;\, \Gamma),\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$ le temps local d'intersection au point x du mouvement Brownien $(B_t, t \geq 0)$.

Le Gall [4] montre que l'on peut construire très simplement ces temps locaux d'intersection à partir des temps locaux d'intersection associés à deux mouvements Browniens indépendants $(B_s, s \geq 0)$ et $(B'_u, u \geq 0)$; ces derniers temps locaux - dont l'existence a été obtenue par Geman - Horowitz - Rosen [3] - sont définis de la même façon que ci-dessus à partir de la formule (1.a), où l'on a changé $(B_s - B_u)$ en $(B_s - B'_u)$. De plus, lorsque $n = 2$, Le Gall [4] montre que pour tout ensemble borné $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$, la fonction $(\gamma(x\, ;\, \Gamma) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(x\, ;\, \Gamma) - E(\alpha(x\, ;\, \Gamma))\ ;\ x \neq 0)$ se prolonge en une fonction continue sur tout le plan, ce qui lui permet d'obtenir la convergence en probabilité, lorsque $k \to \infty$, de :

(1.c) $\quad k^2 \iint_\Gamma ds\, du \{g(k(B_s - B_u)) - E[g(k(B_s - B_u))]\}$

vers $\gamma(0\, ;\, \Gamma)$, pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, continue, à support compact, et d'intégrale 1.

Cette convergence a été démontrée initialement - pour l'essentiel - par Varadhan [8] pour $\Gamma = [0,1]^2$, et la soustraction de l'espérance effectuée en (1.c) est souvent appellée renormalisation de Varadhan.

(1.2) De son côté, Rosen [6] a dégagé, en dimension 2, une "formule de Tanaka" :

$$\int_0^t ds\ \{K(B_t-B_s-y) - K(y)\}$$

(1.d)

$$= \int_0^t (dB_u\ ;\ \int_0^u ds\ \nabla K(B_u-B_s-y)) + \int_0^t ds \int_s^t du\ K(B_u-B_s-y) + \alpha(y\ ;\ T_t)$$

où $T_t = \{(s,u)\in \mathbb{R}_+^2 : 0 < s < u < t\}$, K est une certaine fonction solution de $(\frac{1}{2}\Delta-1)K = -\delta_0$, et $y\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ (précisément, $K(z) \equiv \frac{1}{\pi}K_0(\sqrt{2}|z|)$; noter $K(z) \underset{z\to 0}{\simeq} \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{|z|}$).

L'objet principal de ce travail est de montrer que l'on peut remplacer la fonction $K(z)$ par $\log|z|$; la formule (1.d) devient alors :

$$\int_0^t ds\ \{\log|B_t-B_s-y| - \log|y|\}$$

(1.e)

$$= \int_0^t (dB_u\ ;\ \int_0^u ds\ \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2}) + \pi\alpha(y\ ;\ T_t) \qquad (y \neq 0).$$

On déduit ensuite aisément de la formule (1.e) - que nous appellerons formule de Tanaka - Rosen - la convergence dans L^2 de

$$\pi\alpha(y\ ;\ T_t) - t\log\frac{1}{|y|}\ ,\ \text{lorsque}\ |y| \to 0,$$

résultat que Rosen ([7]) obtient également, avec un peu plus de difficulté, à partir de (1.d) ; le lien avec les résultats de Varadhan et Le Gall est ainsi établi pour $\Gamma = T_t$.

(1.3) Remarquons maintenant que la formule (1.e) a un air de parenté évident avec la formule de Tanaka :

(1.f) $\qquad |B_t-a| = |B_0-a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s-a)dB_s + L_t^a,$

où (B_t) désigne un mouvement Brownien réel, et (L_t^a) son temps local en $a \in \mathbb{R}$. Toutefois, une différence essentielle entre les deux formules est que l'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique en (1.e) possède une singularité en $1/r$, alors que celui qui figure en (1.f) est borné, quoique discontinu. Cette remarque nous a amené à remplacer dans la formule (1.e) la fonction $(\log r)$ par $\phi(r)$, pour une classe générale de fonctions ϕ, par analogie avec ce qui a été fait en dimension 1, où plusieurs auteurs (Fukushima [2], Yamada [9], Yamada - Oshima [10], Yor [11]) ont remplacé dans la formule (1.f), la fonction $|x|$ par une fonction dont la dérivée, au sens des distributions, appartient à $L^2_{loc}(dx)$.

(1.4) La généralisation ainsi obtenue de la formule (1.e) peut encore être étendue en toute dimension $n \geq 3$. Remarquons en particulier que, pour $n \geq 3$, la formule (1.e) devient :

$$\text{(1.g)} \quad \begin{aligned} &\int_0^t ds\, \{\log|B_t-B_s-y| - \log|y|\} \\ &= \int_0^t (dB_u \,;\, \int_0^t ds \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2}) + \nu \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u-B_s-y|^2}, \end{aligned}$$

où $\nu = \frac{n-2}{2}$, et $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Nous étendons encore la formule (1.g), en dimension $n = 3$, à une classe de fonctions $\phi(r)$, qui vérifient (entre autres) la condition $|\phi'(r)| < \frac{C}{r^2}$ au voisinage de 0.

On dégage en particulier, en s'inspirant de Rosen ([6]), la formule :

$$\text{(1.h)} \quad \begin{aligned} &\int_0^t ds\, \{\frac{1}{|B_t-B_s-y|} - \frac{1}{|y|}\} \\ &= - \int_0^t (dB_u \,;\, \int_0^u ds \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^3}) - 2\pi\alpha(y \,;\, T_t) \qquad (y \neq 0) \end{aligned}$$

(la seule différence, par rapport à Rosen [6], est que l'on explicite ici l'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique).

(1.5) Pour terminer cette introduction, indiquons les propriétés de continuité des temps locaux d'intersection, en dimension $n = 2$ ou 3, qui jouent un rôle important dans les démonstrations ci-dessous :

(1.i) pour tout $t > 0$, l'application : $y \to \alpha(y\ ;\ T_t)$ est localement lipschitzienne, d'ordre $(\frac{1}{2} - \varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque y décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(1.j) pour tous $t > 0$, et $\delta < t$, l'application : $y \to \alpha(y\ ;\ T_t^\delta)$ est localement lipschitzienne, d'ordre $\frac{1}{2} - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque y décrit $\mathbb{R}^n$.

(on note T_t^δ l'ensemble $\{(s,u) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < s < u-\delta < t-\delta\}$).

En fait, lorsque $n = 2$, on peut remplacer, dans les deux cas, $(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ par $(1-\varepsilon)$, mais nous n'utiliserons pas ce raffinement.
Ces résultats ont été obtenus respectivement par Le Gall [4] et Rosen [5].

2. Etude en dimension 2.

(2.1) Le résultat principal de ce travail est le

Théorème 1 : Soit $\phi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, *fonction de classe* C^2, *telle qu'il existe* $\alpha > 0$, *pour lequel* $\int_{0+} du\, u^{3/2-\alpha} |\phi''(u)| < \infty$. *Alors :*

(i) On a, pour tout $y \neq 0$ *:*

$$\int_0^t ds\ \{\phi(|B_t - B_s - y|) - \phi(|y|)\}$$

(2.a)

$$= \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds\ \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|}\ \phi'(|B_u - B_s - y|)\right) + \Phi_y(t),$$

où $\Phi_y(t) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} p.s. \left[\int_0^t ds \int_0^t du\ \frac{1}{2}\ \Delta_\varepsilon \phi(|B_u - B_s - y|) + \pi\varepsilon\phi'(\varepsilon)\ \alpha(y\ ;\ T_t)\right]$

avec $\Delta_\varepsilon \phi(r) = 1_{(r \geq \varepsilon)} \{\frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\}$.

(ii) D'autre part, pour tout $\delta > 0$, *et* $t > \delta$, *on a :*

$$\int_0^{t-\delta} ds\{\phi(|B_t-B_s|) - \phi(|B_{s+\delta}-B_s|)\}$$

(2.b)

$$= \int_\delta^t (dB_u, \int_0^{u-\delta} ds \frac{B_u-B_s}{|B_u-B_s|} \phi'(|B_u-B_s|)) + \Phi^\delta(t),$$

<u>où</u> : $\Phi^\delta(t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} p.s. \int_0^{t-\delta} ds \int_{s+\delta}^t du \frac{1}{2} \Delta_\varepsilon \phi(|B_u-B_s|) + \pi\varepsilon\phi'(\varepsilon)\, \alpha(0 ; T_t^\delta)$.

Les démonstrations des points (i) et (ii) sont tout à fait semblables ; on ne donnera donc les détails que pour l'assertion (i).

On considère tout d'abord la fonction $F_\varepsilon(x) = \phi(\varepsilon + |x-y|)$, et on applique la formule d'Itô au processus $(F_\varepsilon(B_t-B_s), t \geq s)$. Il vient :

$$\text{(2.c)} \qquad F_\varepsilon(B_t-B_s) - F_\varepsilon(0) = \int_s^t (dB_u ; \nabla F_\varepsilon(B_u-B_s)) + \frac{1}{2}\int_s^t du\, \Delta F_\varepsilon(B_u-B_s).$$

On intègre ensuite les deux membres de cette identité par rapport à (ds), sur (0,t). Il reste enfin à faire tendre ε vers 0. On décompose la démonstration en 3 étapes, qui concernent respectivement le membre de gauche de (2.a), et les 2 expressions figurant dans le membre de droite de (2.a).

<u>Étape 1</u> : Le membre de gauche obtenu à partir de (2.c) est :

$$\int_0^t ds\{\phi(\varepsilon + |B_t-B_s-y|) - \phi(\varepsilon + |y|)\}.$$

Le processus $(|B_t-B_s-y| ; 0 < s < t)$ ne s'annulant presque sûrement pas, l'expression ci-dessus converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers le membre de gauche de (2.a).

<u>Etape 2</u> : Nous commençons par établir une inégalité a priori concernant

$$M_t^{(h)} \equiv \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|} h(|B_u-B_s-y|)),$$

en supposant tout d'abord $h : [0,\infty[\to \mathbb{R}_+$, continue, bornée.

On obtient aisément :

$$E[(M_t^{(h)})^2] \leq E\Big[\int_0^t du\, (\int_0^u ds\, h(|B_u-B_s-y|))^2\Big]$$

$$\text{(2.d)} \qquad \leq t\, E\Big[(\int_0^t ds\, h(|B_s-y|))^2\Big].$$

Considérons maintenant le processus de Bessel $R_t = |B_t - y|$, et remarquons que l'on a, d'après la formule d'Itô :

$$\text{(2.e)}\qquad g(R_t) = g(R_0) + \int_0^t d\beta_s\, g'(R_s) + \int_0^t ds\, h(R_s),$$

avec (β_t) mouvement Brownien réel, nul en 0, et g la fonction nulle en 0, définie par :

$$\text{(2.f)}\qquad g'(r) = \frac{2}{r}\int_0^r du\, uh(u)$$

(g est solution de l'équation : $\frac{1}{2}\left(\frac{g'(r)}{r} + g''(r)\right) = h(r)$).

Utilisons l'identité (2.e) pour estimer (2.d). Il vient, si l'on note $\ell_t^a(y)$ le temps local en a du processus (R_t), et $\mu_t = 1 + \sup_{s\leq t} |B_s|$:

$$E[(M_t^{(h)})^2] \leq Ct\{E\left[\int_0^t ds(g'(|B_s - y|))^2\right] + E\left[(g(|B_t - y|) - g(|y|))^2\right]\}$$

$$\leq Ct\;\{E\left[\int_0^{\mu_t} da(g'(a))^2\, \ell_t^a(y) + \left(\int_0^{\mu_t} da\, g'(a)\right)^2\right]\}$$

$$\leq Ct\; E\left[(\ell_t^*(y) + \mu_t)\int_0^{\mu_t} da(g'(a))^2\right] \qquad (\ell_t^*(y) \equiv \sup_a \ell_t^a(y))$$

$$\leq Ct\, \|\ell_t^*(y) + \mu_t\|_2\, \left\|\int_0^{\mu_t} da(g'(a))^2\right\|_2$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hardy dans L^2 : pour tout $A > 0$, et toute fonction $f \in L^2(0,A)$,

$$\int_0^A ds\, \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x du\, f(u)\right)^2 \leq 4\int_0^A du\, f^2(u)$$

pour obtenir, à l'aide de l'expression de g' en fonction de h (égalité (2.f)) le

<u>Lemme</u> : *<u>Il existe</u> $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ <u>telle que, pour toute fonction</u> h <u>continue</u>, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, <u>on ait, pour tout</u> y <u>tel que</u> : $|y| < 1$:*

$$E[(M_t^{(h)})^2] \leq \gamma(t)\, \left\|\int_0^{\mu_t} dr\, r^2\, h^2(r)\right\|_2.$$

Ainsi, l'application : $h \to M_t^{(h)}$ se prolonge par continuité en une application de $L^2([0,1],\, r^2\, dr)$ dans $L^2(\Omega)$ (on se restreint ici aux fonctions h à support dans $[0,1]$). Si $\phi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^2, et vérifie :

$\int_{0+} dr\; r^{3/2-\alpha}\, |\phi''(r)| < \infty$, pour certain $\alpha > 0$, alors $h = \phi'|_{]0,1[}$ appartient à $L^2([0,1], r^2\, dr)$. En effet, on a :

$$\int_0^1 dr\; r^2 \left(\int_r^1 du\, |\phi''(u)|\right)^2 < \left(\int_0^1 du\; u^{3/2-\alpha}\, |\phi''(u)|\right)^2 \int_0^1 \frac{dr}{r^{1-2\alpha}} < \infty .$$

Finalement, l'intégrale stochastique obtenue à partir de (2.c) :

$$\int_0^t ds \int_s^t (dB_u \,;\, \nabla F_\varepsilon(B_u - B_s)) = \int_0^t (dB_u \,;\, \int_0^u ds\; \nabla F_\varepsilon(B_u - B_s))$$

converge bien en probabilité, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers l'intégrale stochastique qui figure en (2.a) (et lorsque ϕ est à support compact, cette convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$).

Etape 3 : Il s'agit maintenant d'étudier la convergence, lorsque $\varepsilon \to 0$, du dernier terme provenant de (2.c), qui est :

$$\frac{1}{2}\int_0^t ds \int_s^t du\, \left\{\frac{\phi'(\varepsilon + r)}{r} + \phi''(\varepsilon + r)\right\}\Big|_{r=|B_u - B_s - y|}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} dx\; \alpha(x \,;\, T_t)\, \left\{\frac{\phi'(\varepsilon + r)}{r} + \phi''(\varepsilon + r)\right\}\Big|_{r=|x-y|}$$

$$= \pi \int_0^\infty dr\; r\left\{\frac{\phi'(\varepsilon + r)}{r} + \phi''(\varepsilon + r)\right\}\, \overline{\alpha}(r \,;\, T_t),$$

où $\overline{\alpha}(r \,;\, T_t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, \alpha(y + re^{i\theta} \,;\, T_t)$.

Posons $J_{(a,b)}(\varepsilon) = \int_a^b dr\; r\left\{\frac{\phi'(\varepsilon + r)}{r} + \phi''(\varepsilon + r)\right\}\, \overline{\alpha}(r \,;\, T_t)$.

La fonction : $r \to \overline{\alpha}(r \,;\, T_t)$ étant continue sur $]0,\infty[$, et à support borné, la convergence de $J_{(1,\infty)}(\varepsilon)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, ne pose pas de problème. En ce qui concerne $J_{(0,1)}(\varepsilon)$, on écrit :

$$J_{(0,1}(\varepsilon) = \int_0^1 dr\, r\{\frac{\phi'(\varepsilon+r)}{r} + \phi''(\varepsilon+r)\}(\overline{\alpha}(r\ ;\ T_t) - \alpha(y\ ;\ T_t))$$

(2.g)

$$+ \alpha(y\ ;\ T_t) \int_0^1 dr\ \{\phi'(\varepsilon+r) + r\ \phi''(\varepsilon+r)\}.$$

A l'aide de l'inégalité : $|\overline{\alpha}(r\ ;\ T_t) - \alpha(y\ ;\ T_t)| < C_\omega\ r^{1/2-\alpha}$, valable pour r suffisamment petit (d'après (1.i)), on montre aisément que la première intégrale qui figure en (2.g) converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers :

$$\int_0^1 dr\ r\{\frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\}\ [\overline{\alpha}(r\ ;\ T_t) - \alpha(y\ ;\ T_t],$$

intégrale qui est absolument convergente.

D'autre part, après intégration par parties, on voit que la seconde intégrale converge lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $\phi'(1)$. Finalement, on a obtenu la convergence de $J_{(0,\infty)}(\varepsilon)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers la quantité suivante :

$$J_{(0,\infty)}(0+) \equiv \int_1^\infty dr\ r\{\frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\}\ \overline{\alpha}(r\ ;\ T_t)$$

$$+ \int_0^1 dr\ r\{\frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\}\ [\overline{\alpha}(r\ ;\ T_t) - \alpha(y\ ;\ T_t)] + \alpha(y\ ;\ T_t)\ \phi'(1).$$

Les mêmes arguments permettent de démontrer que $\Phi_y(t) \equiv \pi J_{(0,\infty)}(0+)$, ce qui termine la démonstration de la formule (2.a).

(2.2) Plutôt que de donner dès maintenant des exemples d'application des formules (2.a) et (2.b), nous comparons les comportements asymptotiques de $\Phi_y(t)$ et $\Phi^\delta(t)$, lorsque y et δ tendent vers 0. On a le :

Théorème 2 : Soit $t > 0$, et ϕ : $]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$, fonction de classe C^2, telle que :

a) il existe $\alpha > 0$ tel que $\displaystyle\int_{0+} dr\ r^{3/2-\alpha}\ |\phi''(r)| < \infty$

b) il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\displaystyle\int^\infty dr\ r\ \phi^2(r) e^{-r^2/2\varepsilon} < \infty$

Alors :

$$\lim_{|y|\to 0} \{\Phi_y(t) + t\ \phi(|y|)\} = \lim_{\delta\to 0} \{\Phi^\delta(t) + t\ E[\phi(|B_\delta|)]\},$$

les deux limites étant des limites en probabilité [1].

Démonstration : D'après le lemme dégagé dans l'étape 2, chacune des intégrales stochastiques qui figurent dans les formules (2.a) et (2.b) converge en probabilité, lorsque $|y| \to 0$, et $\delta \to 0$, vers la même limite. On a donc, d'après ces 2 formules:

$$\lim_{|y|\to 0} \{\varpi_y(t) + t\,\phi(|y|)\} = \lim_{\delta\to 0} \{\varpi^\delta(t) + \int_0^{t-\delta} ds\, \phi(|B_{s+\delta}-B_s|)\}$$

Remarquons maintenant que, à l'aide de b), on a :

$$\text{(2.h)} \qquad \delta\, E[\phi^2(|B_\delta|)] \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

En effet, $\delta\, E[\phi^2(|B_\delta|)] = \int_0^\infty dr\, r\, \phi^2(r) e^{-r^2/2\delta} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, par convergence dominée.

A l'aide de (2.h) principalement, on montre maintenant :

$$\text{(2.i)} \qquad \int_0^{t-\delta} ds\, \phi(|B_{s+\delta}-B_s|) - t\; E[\phi(|B_\delta|)] \xrightarrow[\delta\to 0]{L^2} 0$$

ce qui terminera la démonstration du théorème 2.

D'après (2.h), on peut remplacer, en (2.i), $\int_0^{t-\delta} ds\, \phi(|B_{s+\delta} - B_s|)$ par

$\int_0^t ds\, \phi(|B_{s+\delta}-B_s|)$. Posons maintenant $\bar{\phi}_\delta = E[\phi(|B_\delta|)]$, et $\tilde{\phi}_\delta(r) = \phi(r) - \bar{\phi}_\delta$.

On a :

$$E[(\int_0^t ds\, (\phi(|B_{s+\delta}-B_s|) - \bar{\phi}_\delta))^2]$$

$$= 2\int_0^t ds \int_s^t ds'\; E[\tilde{\phi}_\delta(|B_{s+\delta}-B_s|)\; \tilde{\phi}_\delta(|B_{s'+\delta}-B_{s'}|)]$$

$$\overset{(*)}{=} 2\int_0^t ds \int_s^{s\wedge(s+\delta)} ds'\; E[\tilde{\phi}_\delta(|B_{s+\delta}-B_s|)\; \tilde{\phi}_\delta(|B_{s'+\delta}-B_{s'}|)]$$

$$\leq 2\int_0^t ds \int_s^{s+\delta} ds'\; E[\phi^2(|B_\delta|)] = 2t\delta\; E[\phi^2(|B_\delta|)],$$

---

(1) dans la suite, sauf précision contraire, toutes les limites de v.a sont des limites en probabilité.

et, d'après (2.h), cette dernière expression tend vers 0, lorsque $\delta \to 0$. (Soulignons que l'identité (*) provient de ce que les accroissements du mouvement Brownien sont indépendants).

(2.3) Nous donnons maintenant quelques exemples d'applications particulièrement intéressantes des théorèmes 1 et 2.

① $\underline{\phi(r)=\log r}$. On a alors $\Delta_\varepsilon\phi(r) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, et la formule (1.a) devient :

$$\text{(2.j)} \quad \begin{aligned} &\int_0^t ds\{\log|B_t-B_s-y| - \log|y|\} \\ &= \int_0^t \left(dB_u \,;\, \int_0^u ds \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2}\right) + \pi\alpha(y\,;\,T_t). \end{aligned}$$

De plus, d'après le théorème 2, $\gamma(T_t) \equiv \lim\limits_{|y|\to 0} \left[\pi\alpha(y\,;\,T_t) - t\log\frac{1}{|y|}\right]$ existe, en probabilité, et l'on a :

$$\text{(2.k)} \quad \int_0^t ds \log|B_t-B_s| = \int_0^t \left(dB_u \,;\, \int_0^u ds \frac{B_u-B_s}{|B_u-B_s|^2}\right) + \gamma(T_t).$$

Remarquons que la formule (2.j) permet également de donner une interprétation de $\alpha(y\,;\,T_t)$ comme limite de temps locaux. Pour cela, notons $\lambda_t^a(z)$ le temps local au niveau a de la martingale locale $\log|B_t-z|$. On a alors la

__Proposition__ : Les identités suivantes sont satisfaites :

1) $\pi\alpha(y\,;\,T_t) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t ds\{\lambda_t^{-N}(B_s+y) - \lambda_s^{-N}(B_s+y)\}$

2) $\pi\alpha(0\,;\,T_t^\delta) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^{t-\delta} ds\{\lambda_t^{-N}(B_s) - \lambda_{s+\delta}^{-N}(B_s)\}$.

__Démonstration__ : Pour montrer 1), par exemple, on utilise la formule de Tanaka :

$$((\log|B_t-B_s-y|) + N)^+ - (\log|y| + N)^+ = \int_s^t \left(dB_u \,;\, \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2}\right) 1_{(|B_u-B_s-y| > e^{-N})}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\lambda_t^{-N}(B_s-y) - \lambda_s^{-N}(B_s+y)\right).$$

On intègre ensuite les deux membres par rapport à (ds) sur (0,t), puis on fait tendre N vers $+\infty$.

② $\underline{\phi(r)=(\log r)^2}$. On a alors : $\frac{1}{2}\Delta_\varepsilon\phi(r) = 1_{(r>\varepsilon)}{}^{1}\!/_{r^2}$, et, d'après les théorèmes 1 et 2,

$$\Phi_y(t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t ds\int_s^t du\,\frac{1_{|B_u-B_s-y|>\varepsilon}}{|B_u-B_s-y|^2} - 2\pi(\log\frac{1}{\varepsilon})\,\alpha(y\,;\,T_t)$$

existe, ainsi que : $\lim_{y\to 0}\{\Phi_y(t) + t(\log|y|)^2\}$.

③ $\underline{\phi(r)=r^{-\beta}}$. Lorsque $0 < \beta < \frac{1}{2}$, ϕ satisfait les hypothèses du théorème 1. On a alors :

$$\Phi_y(t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^t ds\int_s^t du\,\frac{\beta^2}{2|B_u-B_s-y|^{\beta+2}} - \frac{\pi\beta}{\varepsilon^\beta}\,\alpha(y\,;\,T_t)\right]$$

et $\lim_{|y|\to 0}(\Phi_y(t) + {}^{t}\!/_{|y|^\beta})$ existe.

3. Etude en dimension $n > 3$:

(3.1) Le cas des dimensions $n > 4$ pose beaucoup moins de problèmes que celui des dimensions $n=2$, ou 3, car la trajectoire Brownienne n'admet p.s. pas de points doubles (en fait, on utilise aussi la propriété : pour $y \neq 0$, il n'existe pas de réels $s,u > 0$ tels que $B_u-B_s=y$).

Soit donc $\phi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, fonction de classe C^2. On obtient alors sans difficulté les variantes suivantes des identités (1.a) et (1.b) :

$$\int_0^t ds\{\phi(|B_t-B_s-y|) - \phi(|y|)\}$$

(3.a)

$$= \int_0^t \left(dB_u\,;\,\int_0^u ds\,\frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|}\,\phi'(|B_u-B_s-y|)\right) + \Phi_y(t), \qquad (y \neq 0)$$

où $\Phi_y(t) = \int_0^t ds\int_s^t du\,\frac{1}{2}\left\{\frac{(n-1)\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\right\}\Big|_{r=|B_u-B_s-y|}$ ainsi que :

(3.b)
$$\int_0^{t-\delta} ds\{\phi(|B_t-B_s|)-\phi(|B_{s+\delta}-B_s|)\}$$
$$= \int_\delta^t (dB_u\ ;\ \int_0^{u-\delta} ds \frac{B_u-B_s}{|B_u-B_s|}\phi'(|B_u-B_s|)) + \Phi^\delta(t), \qquad (\delta > 0)$$

où $\Phi^\delta(t) = \int_0^{t-\delta} ds \int_{s+\delta}^t du \frac{1}{2}\{\frac{(n-1)\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\}\Big|_{r=|B_u-B_s|}$.

Remarquons ensuite que le lemme qui figure dans l'étape 2 ci-dessus est encore valable, sous la même forme, et ceci même en dimension $n = 3$.
La démonstration est seulement modifiée par le fait que g' est maintenant solution de :

$$\frac{1}{2}\{\frac{(n-1)}{r} g'(r) + g''(r)\} = h(r),$$

et l'on prend :

$$g'(r) = \frac{2}{r^{n-1}} \int_0^r du\ u^{n-1}\ h(u),$$

puis on utilise ensuite l'inégalité de Hardy dans L^2, sous une forme légèrement différente, pour obtenir l'inégalité voulue.
Le lemme étant donc toujours valable, on a la variante suivante du théorème 2.

Théorème 2': *$(n \geq 4)$: Soit $t > 0$, et $\phi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, fonction de classe C^2 telle que*

a') $\int_{0+} dr\ r^2(\phi'(r))^2 < \infty$, *et*

b') *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\int^\infty dr\ r^{n-1}\ \phi^2(r) e^{-r^2/2\varepsilon} < \infty$.

Alors : $\lim_{|y|\to 0} \{\Phi_y(t) + t\,\phi(|y|)\} = \lim_{\delta\to 0} \{\Phi^\delta(t) + t\,E[\phi(|B_\delta|)]\}$, *les deux limites ayant lieu en probabilité.*

(3.2) Le cas de la dimension $n = 3$ est beaucoup plus semblable à celui de la dimension $n = 2$. Cependant, on peut, pour $n = 3$, aller "plus loin" qu'en dimension 2, en établissant la validité des identités (3.a) et (3.b) pour une classe de fonctions ϕ telles que la singularité permise à ϕ' au voisinage de $r = 0$

soit de l'ordre de $1/_{r^2}$ (en dimension 2, la singularité permise à ϕ' au voisinage de $r = 0$ est, grosso modo, de l'ordre de $1/_r$). De façon précise, on a le

Théorème 3 : Soit $\phi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *fonction de classe* C^2, *telle que :*

c) Soit : (c.1) $\int_{0+} dr\, r^2\, \phi'(r)^2 < \infty$, *soit : (c.2)* $|\phi'(r)| < \frac{C}{r^2}$, *dans un voisinage de 0.*

et :

d) il existe $\alpha > 0$ *tel que* $\int_{0+} dr\, r^{5/2-\alpha} |\phi''(r)| < \infty$.

Alors, les formules (2.a) et (2.b) sont satisfaites avec :

$$\Phi_y(t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t ds \int_s^t du\, \frac{1}{2}\, \Delta_\varepsilon \phi(|B_u - B_s - y|) + 2\pi\varepsilon^2 \phi'(\varepsilon)\, \alpha(y\ ;\ T_t)$$

où :

$$\Delta_\varepsilon \phi = 1_{(r>\varepsilon)} \{\frac{(n-1)\phi'(r)}{r} + \phi''(r)\},$$

et :

$$\Phi^\delta(t) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t-\delta} ds \int_{s+\delta}^t du\, \frac{1}{2}\, \Delta_\varepsilon \phi(|B_u - B_s|) + 2\pi\varepsilon^2 \phi'(\alpha)\, \alpha(0\ ;\ T_t^\delta)$$

En outre, sous les hypothèses (c.1) et (d), on a :

$$\lim_{|y|\to 0} \{\Phi_y(t) + t\, \phi(|y|)\} = \lim_{\delta\to 0} \{\Phi^\delta(t) + t\, E\, \phi(|B_\delta|)\},$$

les deux limites ayant lieu en probabilité.

Démonstration : On utilise la même méthode qu'en dimension 2. Examinons comment les détails des arguments des 3 étapes sont modifiés :

- l'étape 1 ne nécessite pas de modification.
- pour l'étape 2, la validité du lemme, remarquée plus haut, permet de passer à la limite, dans l'intégrale stochastique, lorsque $\varepsilon \to 0$, sous l'hypothèse (c.1).

Sous l'hypothèse (c.2), on utilise un argument de convergence dominée, après avoir remarqué que, quitte à supposer : $|\phi'(r)| < \frac{C}{r^2}$ sur tout $\mathbb{R}_+$ (ce qui est possible par localisation), le crochet de la martingale locale

$$\int_0^t (dB_u\ ;\ \int_0^u ds\, \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} \phi'(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)) \quad .$$

est majoré par : $\int_0^t du \left(\int_0^u ds \frac{C}{|B_u-B_s-y|^2}\right)^2$, expression dont l'espérance est elle-même majorée par :

$$t\, C^2\, E\left[\left(\int_0^t \frac{ds}{|B_s-y|^2}\right)^2\right] < \infty$$

(en fait, on montre aisément à l'aide de la formule :

$$\log|B_t-y| - \log|y| = \int_0^t \frac{d\beta_u}{|B_u-y|} + \nu \int_0^t \frac{du}{|B_u-y|^2}, \quad \text{où} \quad \nu = \frac{n-2}{2},$$

que, pour $y \neq 0$, $\int_0^t \frac{ds}{|B_s-y|^2}$ possède des moments de tous ordres).

- pour l'étape 3, on passe, comme en dimension 2, en coordonnées polaires, d'où l'apparition de la mesure (sur $\mathbb{R}_+$) $4\pi r^2\, dr$.

Enfin, une intégration par parties fournit le terme de correction $2\pi\varepsilon^2\phi'(\varepsilon)\, \alpha(y\, ;T_t)$ dans l'expression de $\Phi_y(t)$.

(3.3) De même que pour la dimension 2, nous développons maintenant quelques exemples particulièrement importants.

① $\underline{\phi(r)=\log r}$. En toute dimension $n \geq 3$, on a:

$$\Phi_y(t) \equiv \nu \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u-B_s-y|^2}, \quad \text{où} \quad \nu = \frac{n-2}{2},$$

et, d'après le théorème 2',

(3.c) $$\lim_{|y|\to 0} \left\{\Phi_y(t) - t \log \frac{1}{|y|}\right\} \quad \text{existe.}$$

Des résultats voisins ont été obtenus par Kusuoka en dimension 4 (voir [1]).

Soulignons ici que l'existence de la limite (3.c) est remarquable. En effet, on a, d'après la formule d'Itô :

(3.d) $$\log|B_t-B_s-y| - \log|y| = \int_s^t \left(dB_u\, ; \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2}\right) + \nu \int_s^t \frac{du}{|B_u-B_s-y|^2}.$$

En divisant les 2 membres par $\log \frac{1}{|y|}$, on obtient sans difficulté la convergence en probabilité de $\dfrac{\nu}{\log \frac{1}{|y|}} \displaystyle\int_s^t \frac{du}{|B_u-B_s-y|^2}$ vers 1, lorsque $|y| \to 0$. Mais, il n'est pas vrai que $\nu \displaystyle\int_s^t \frac{du}{|B_u-B_s-y|^2} - \log \frac{1}{|y|}$ converge.

En fait, on a, grace à (3.d) :

$$\text{(3.e)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}} \left(\nu \int_s^t \frac{du}{|B_u-B_s-y|^2} - \log \frac{1}{|y|}\right) \xrightarrow[|y|\to 0]{(d)} \nu^{-1/2}.N,$$

où N est une variable gaussienne, centrée, réduite.

Ce résultat est à comparer avec (3.c), où la normalisation en $\dfrac{1}{\log \frac{1}{|y|}}$ a disparu.

On peut expliquer partiellement cette disparition par la remarque suivante :

pour $t > 0$ fixé, et $s < t$, notons $X_s(y)$ le membre de gauche de (3.e).

En utilisant la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement Brownien, il n'est pas difficile de renforcer (3.e) en :

$$\text{(3.e')} \qquad (X_s(y), X_{s'}(y)) \xrightarrow[|y|\to 0]{(d)} \nu^{-1}(N,N')$$

où $s \neq s'$, et N et N' sont deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indédantes.

On en déduit aisément que :

$$\frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}} \left(\Phi_y(t) - t \log \frac{1}{|y|}\right) \equiv \int_0^t ds\, X_s(y)$$

converge dans L^2 vers 0, résultat qui est bien évidemmenten accord avec (3.c).

2 $\underline{\phi(r)=(\log r)^2 - \frac{1}{\nu}(\log r)}$. En toute dimension $n \geq 3$, on a alors :

$$\Phi_y(t) = 2\nu \int_0^t ds \int_s^t du \frac{\log|B_u-B_s-y|}{|B_u-B_s-y|^2},$$

et $\qquad \Phi_y(t) + t\{(\log \frac{1}{|y|})^2 + \frac{1}{\nu}\log \frac{1}{|y|}\}$ converge en probabilité, lorsque $y \to 0$.

③ $\underline{\phi(r)=r^{-\beta}}$.

- Lorsque $0 < \beta < \frac{1}{2}$, on a, en toute dimension $n \geq 3$:

$$\Phi_y(t) = \frac{\beta(\beta+2-n)}{2} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u-B_s-y|^{\beta+2}},$$

et $\lim\limits_{|y|\to 0} (\Phi_y(t) + t/|y|^\beta)$ existe.

- Lorsque $\frac{1}{2} < \beta < 1$, et $n = 3$, les conditions (c.2) et d) du théorème 3 sont satisfaites, et on a :

$$\Phi_y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{\beta(\beta-1)}{2} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u-B_s-y|^{\beta+2}} + \frac{2\pi}{\varepsilon^{\beta-1}} \alpha(y\ ;\ T_t)\right].$$

Notons en particulier que, dans le cas $\beta = 1$, la formule (3.a) devient :

$$\int_0^t ds \left\{\frac{1}{|B_t-B_u-y|} - \frac{1}{|y|}\right\}$$

(3.f)

$$= - \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^3}\right) - 2\pi\alpha(y\ ;\ T_t),$$

ce qui complète la formule obtenue par J. Rosen en [6], où l'intégrand de (dB_u) n'était pas tout à fait explicité.

De même que pour la dimension 2, on déduit aisément de la formule (3.f) une approximation de $\alpha(y\ ;\ T_t)$ à l'aide des temps locaux de $\left(\frac{1}{|B_t-z|}, t \geq 0\right)$.

Proposition : Pour tout $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, et tout $a \in \mathbb{R}_+$, notons $\lambda_t^a(z)$ le temps local au niveau a de la martingale locale $\frac{1}{|B_t-z|}$. On a alors, pour tout $\delta > 0$, et $t > 0$:

$$1)\ 2\pi\alpha(y\ ;\ T_t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^t ds\{\lambda_t^N(B_s+y) - \lambda_s^N(B_s+y)\}$$

$$2)\ 2\pi\alpha(0\ ;\ T_t^\delta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \int_\delta^t ds\{\lambda_t^N(B_s) - \lambda_{s+\delta}^N(B_s)\}.$$

On utilise, pour la démonstration de cette propostion, la formule de Tanaka qui permet de développer $\{(\frac{1}{|B_t-B_s-y|} - N)^-, t > s\}$, ce qui fournit la décomposition canonique de la semi-martingale :

$$\int_0^t ds\ \{(\frac{1}{|B_t-B_s-y|} - N)^- - (\frac{1}{|y|} - N)^-\}$$

puis on fait tendre N vers $+\infty$.

(3.4) Indiquons enfin que l'étude asymptotique de : $2\pi\alpha(y\ ;\ T_t) - \frac{1}{|y|}$, lorsque $|y| \to 0$, est menée en [12], à l'aide de (3.f). On utilise d'ailleurs dans la démonstration des arguments analogues à (3.e').

REFERENCES :

[1] S. ALBEVERIO, Ph. BLANCHARD, R. HØEGH-KROHN : Newtonian diffusions and planets, with a remark on non-standard Dirichlet forms and polymers. A paraître in Proc. L.M.S. Symposium, Swansea (1983). L.N. in Maths. (Springer).

[2] M. FUKUSHIMA : A decomposition of additive functionals of of finite energy. Nagoya Math. J. 74 (1979),137-168.

[3] D. GEMAN, J. HOROWITZ, J. ROSEN : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Annals of Proba., 12 (1984), 86-107.

[4] J.F. LE GALL : Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. Dans ce volume.

[5] J. ROSEN : A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. Comm. Math. Phys. 88, 327-338 (1983).

[6] J. ROSEN : A representation for the intersection local time of Brownian motion in space. Preprint (1984).

[7] J. ROSEN : Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. Preprint (1984).

[8] S. VARADHAN : Appendice à "Euclidean quantum field theory", par K. Symanzik, in : Local quantum theory, R. Jost (ed.), Academic Press (1969).

[9] T. YAMADA : On some representations concerning stochastic integrals. A paraître dans Prob. Math. Stat. 4.

[10] T. YAMADA, Y. OSHIMA : On some representations of continuous additive functionals locally of finite energy. J. Math. Soc. Japan 36, n° 2, 1984.

[11] M. YOR : Sur la transformée de Hilbert des temps locaux Browniens, et une extension de la formule d'Itô. Sém. Proba. XVI, Lect. Notes 920. Springer (1982).

[12] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce volume.

Je voudrais remercier J.Y. Calais, M. Génin et J.F. Le Gall pour de nombreuses discussions au sujet de cet article.