Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Philippe Biane

Comparaison entre temps d'atteinte et temps de séjour de certaines diffusions réelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 291-296
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__291_0>

COMPARAISON ENTRE TEMPS D'ATTEINTE ET TEMPS DE SEJOUR DE CERTAINES DIFFUSIONS REELLES.

par Ph. BIANE

1. Introduction :

Soient X un processus de Bessel de dimension n issu de 0, et Z un processus de Bessel de dimension $n+2$, également issu de 0, c'est-à-dire que X et Z sont des diffusions de générateurs infinitésimaux respectifs

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n-1}{2x}\frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n+1}{2x}\frac{d}{dx},$$

n étant un réel > 1. Ciesielski et Taylor [1] ainsi que Getoor et Sharpe [3] ont remarqué que les deux variables

$$S_y = \int_0^\infty 1_{\{Z_s < y\}}\, ds \qquad \text{et} \qquad T_y = \inf\{t \,/\, X_t > y\}$$

ont même loi, pour tout réel positif y.

Nous allons voir que des résultats de ce type subsistent pour des couples de diffusions plus généraux.

2. Cas général :

Dans la suite, Z désigne une diffusion régulière sur un intervalle (A,B) de $\overline{\mathbb{R}}$, de mesure de rapidité m, et d'échelle s, deux fois dérivable. On fait sur Z les hypothèses suivantes :

i) $s(A) = -\infty$.

ii) $s(B) < \infty$ (on prendra, à partir de maintenant, $s(B) = 0$).

iii) Z est tuée en B si $B < +\infty$.

iv) $m(dx) = m'(x)dx$ où m' est positive, dérivable sur (A,B).

v) $s(x)\, m'(x) \xrightarrow[s \to A]{} 0$ si $A > -\infty$

$$\int_{-\infty} s^2(x)\, m'(x)dx = \infty \quad \text{si} \quad A = -\infty.$$

Alors, si ζ est le temps de vie de la diffusion, $Z_t \xrightarrow[t\to\zeta]{} B$ (voir [2], [4]). Le générateur infinitésimal de Z est $\Gamma = \frac{1}{2}\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$. Soient y_0, $y \in [A,B]$ vérifiant $-\infty < y_0 \leq y < +\infty$. Nous allons calculer la loi de $S_y = \int_0^\zeta 1_{\{Z_s \leq y\}} ds$ sous P_{y_0} loi de Z issuede y_0. Soit $\lambda > 0$; appelons F_λ la solution positive croissante sur (A,B) de $(\Gamma-\lambda)F_\lambda = 0$, telle que $F_\lambda(A) = 1$.

Si $f_\lambda(x) = F_\lambda(x)$, pour $x \leq y$

$$= s(x)\,\frac{F'_\lambda(y)}{s'(y)} + F_\lambda(y) - \frac{S(y)}{S'(y)}\,F'_\lambda(y) \quad \text{pour } y < x,$$

alors f_λ est solution croissante de $\Gamma f_\lambda = \lambda 1_{(A,B)} \cdot f_\lambda$,

D'après la formule d'Itô $f_\lambda(Z_t)\ \exp\{-\lambda\int_0^t 1_{\{Z_s \leq y\}} ds\}$ est une martingale bornée.

On a donc la formule de Feynman - Kac :

$$E_{y_0}\left[\exp - \lambda \int_0^\zeta 1_{\{Z_s \leq y\}} ds\right] = \frac{f_\lambda(y_0)}{f_\lambda(B)} = \frac{F_\lambda(y_0)}{F_\lambda(y) - \frac{s(y)}{s'(y)}\,F_\lambda(y)}$$

Remarquons que le dénominateur de cette expression, en tant que fonction de y, s'écrit : $s^2 \frac{d}{ds}\left(-\frac{F_\lambda}{s}\right) = \frac{d}{dv}(v\,F_\lambda)$, où $v = -\frac{1}{s}$. Soit $\overline{\Gamma}$ l'opérateur différentiel défini par $\overline{\Gamma} f = \frac{1}{s} F(sf)$, opérant sur les f telles que sf est dans le domaine de Γ.

On a immédiatement $\overline{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\frac{d}{dm}\right)\left(s^2\frac{d}{ds}\right)$, soit, en posant $v = -\frac{1}{s}$ et $dn = s^2\,dm$:

$$\overline{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dn}\frac{d}{dv}\right).$$

<u>Remarque</u> : $\overline{\Gamma}$ est le générateur de la diffusion d'échelle v, de mesure de rapidité n sur (A,B). D'après Sharpe [2], si $L_z = \sup\{t \,/\, Z_t = z\}$ le processus $(Z_{L_z - t}, t \geq 0)$ est une diffusion de générateur $\overline{\Gamma}$, issu de z.

De $\Gamma = s\,\overline{\Gamma}(\frac{1}{s}\,\cdot) = \frac{1}{v}\,\overline{\Gamma}(v\cdot)$ on tire :

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}\frac{d}{dn}\left(\frac{d}{dv}(v\cdot)\right)\right) = \frac{1}{2}\ PQ \text{ où } P = \frac{1}{v}\frac{d}{dm} \text{ et } Q = \frac{d}{dv}(v\cdot)$$

Posons $H_\lambda = QF_\lambda$. Alors : $\frac{1}{2} QPH_\lambda = \frac{1}{2} Q(PQF_\lambda) = \lambda\,\frac{1}{2}\,QF_\lambda = \lambda H_\lambda$.

Ceci nous amène donc à considérer la diffusion X de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\, QP = \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \frac{d}{dn}$ sur (A,B). D'après v), on a :

1) si $A > -\infty$, $H'_\lambda(x) = 2\lambda m'(x)\, s'(x)\, F_\lambda(x) \xrightarrow[x\to A]{} 0$. Donc, si on impose à X d'être réfléchi en A, si $X_0 < y_0$, X atteint presque sûrement tout point de (y_0,B), et donc :

$$E[\exp -\lambda\, T_y/X_0] = \frac{H_\lambda(X_0)}{H_\lambda(y)} \qquad (T_y = \inf\{t \;/\; X_t > y\}).$$

2) si $A = -\infty$, l'échelle de la diffusion X vaut $-\infty$ en A, donc X atteint presque sûrement tout point de (y_0,B) si $X_0 < y_0$. On a donc :

$$E[\exp - \lambda\, T_y/X_0] = \frac{H_\lambda(X_0)}{H_\lambda(y)}.$$

Pour retrouver la transformée de Laplace de S_y, il faut donner à X une loi initiale μ convenable, de sorte que $E_\mu[H_\lambda(X_0)] = F_\lambda(y_0)$. Si on prend pour $\mu(dx) = 1_{\{A \;\; x \;\; y_0\}}\, (-s(y_0))\, dv(x)$

$$E[H_\lambda(X_0)] = \int_A^{y_0} H_\lambda(x)\, (-s(y_0))\, dv(x) = \int_A^{y_0} (-s(y_0))\, \frac{d}{dv}\, (v\, F_\lambda)(x)\, dv(x)$$

$$= F_\lambda(y_0).$$

<u>Remarque</u> : Si $Z_0 = y_0 > A$, la loi μ est exactement la loi de $I = \inf\limits_{0<s<\zeta} \{Z_s\}$. Si $Z_0 = A > -\infty$, il suffit de prendre $X_0 = A$. On a finalement le

<u>Théorème</u> : <u>Soit</u> Z <u>une diffusion régulière sur</u> (A,B) <u>vérifiant les propriétés</u> i)...v) <u>et admettant pour générateur infinitésimal</u> $\frac{1}{2} \frac{d}{dm} \frac{d}{ds}$. <u>Soit</u> X <u>la diffusion sur</u> (A,B) <u>de générateur</u> $\frac{1}{2} \frac{d}{dv} \frac{d}{dn}$ $(v = -\frac{1}{s},\ dn = s^2\, dm)$ <u>réfléchie en</u> A <u>si</u> $A > -\infty$, <u>et</u> $|n(A)| < \infty$.

<u>Alors, pour tout</u> $y \in (A,B)$, <u>tout</u> $y_0 \in (A,y)$, <u>si</u> P_{y_0} <u>est la loi de</u> Z <u>issue de</u> y_0, <u>et</u> $P'_{\mu(y_0)}$, <u>la loi de</u> X, <u>de loi initiale</u> $\mu(y_0)$ <u>avec</u> $\mu(y_0)(dx) = -1_{(A<x<y_0)}\, s(y_0)\, dv(x)$, <u>alors</u> $\int_0^\zeta 1_{\{Z_s<y\}}\, ds$ <u>a même loi sous</u> P_{y_0} <u>que</u> $T_y = \inf\{t \;/\; X_t > y\}$ <u>sous</u> $P'_{\mu(y_0)}$.

3) Quelques exemples :

a) Si Z est un processus de Bessel de dimension $n+2 > 3$, issu de 0, on retrouve le résultat de l'introduction (on a $A = 0$, $B = +\infty$). Si $Z_0 = y_0 > 0$, on peut obtenir le résultat du théorème d'une autre façon : soient β, γ des processus de Bessel indépendants de dimensions respectives n et 2, issus de 0 ; alors alors $\delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ est un processus de Bessel de dimension $n+2$ issu de 0. Soit $\tau_{y_0} = \inf\{t \,/\, \delta_t > y_0\}$. La loi de $\beta_{\tau_{y_0}}$ est $n \dfrac{x^{n-1}}{y_0^n} dx\, 1_{\{0 < x < y_0\}}$ c'est aussi la loi de $I_{y_0} = \inf\{\delta_t,\ t > \tau_{y_0}\}$.

D'après le résultat connu lorsque $Z_s = 0$, et l'indépendance des temps τ_{y_0} et $\int_{\tau_{y_0}}^{\infty} 1_{\{\delta_s < y\}} ds$ d'une part, et τ_{y_0} et $T_y - \tau_{y_0}$ ($T_y = \inf\{t \,/\, \beta_t > y\}$) on retrouve le résultat.

b) Si Z est un mouvement Brownien avec drift $\mu > 0$, alors $A = -\infty$, $B = +\infty$, $S(x) = e^{-2\mu x}$, $m(dx) = \frac{1}{2\mu} e^{2\mu x} dx$. On trouve que X est un mouvement Brownien avec drift μ. Si $Z_0 = 0$, le minimum de Z, I est tel que $-I$ a une loi exponentielle de paramètre 2μ.

Dans ce cas particulier, l'égalité en loi du théorème a une interprétation en termes de la trajectoire du mouvement Brownien avec drift μ : soit $Z_t = B_t + \mu t$ un mouvement Brownien avec drift μ. Ecrivons la formule de Tanaka ; L^0 étant le temps local de Z en 0 :

$$Z_t^+ = \int_0^t 1_{\{Z_s > 0\}} dB_s + \mu \int_0^t 1_{\{Z_s > 0\}} ds + \frac{1}{2} L_t^0 .$$

Soit $\tau_t = \inf\{u : \int_0^u 1_{\{Z_s > 0\}} ds > t\}$; on a :

$$Z_{\tau_t}^+ - \frac{1}{2} L_{\tau_t}^0 = \gamma_t + \mu t$$

où γ est un mouvement Brownien

$$U_t = Z_{\tau_t}^+ - L_{\tau_t}^0 = Z_{\tau_t} - L_{\tau_t}^0$$

est un mouvement Brownien avec drift μ, et une comparaison de sa trajectoire avec celle de Z montre que :

$$\int_0^{\sigma} 1_{\{Z_s > 0\}} ds \qquad (\text{où } \sigma = \sup\{t \mathrel{/} Z_t = 0\}$$

est l'instant où sa trajectoire passe par son minimum.

D'après le théorème de Williams sur la décomposition de la trajectoire d'une diffusion en son minimum, (voir [4]) l'instant où un mouvement Brownien avec drift μ, Z, atteint son minimum a même loi que le premier instant où il atteint une variable indépendante de loi exponentielle de paramètre 2μ. En retranchant cette variable exponentielle de Z_0, on obtient le résultat de la proposition, en remarquant que

$$\int_0^{\sigma} 1_{\{Z_s > 0\}} ds \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} 1_{\{Z_s > 0\}} ds$$

ont même loi si Z est un mouvement Brownien avec drift μ issu de 0.

c) Prenons pour Z un mouvement Brownien réel tué en 0, issu de $y_0 > 0$ (ici, on $A = +\infty > B = 0$, il faut renverser l'ordre dans l'intervalle (A,B)).

Le processus X obtenu dans le théorème est un processus de Bessel dimension -1. Si on prend $y = 0$, on obtient le résultat suivant : soit Z un mouvement Brownien issu de $y_0 > 0$, X un processus de Bessel de dimension -1, de loi initiale $y_0 \frac{dx}{x^2} 1_{\{x > y_0\}}$; alors, les temps d'atteinte de 0 par X et Z ont même loi.

4) <u>Remarque</u> : On peut généraliser les résultats ci-dessus à des lois de variables de type $\int_0^{\zeta} g(Z_s)\, 1_{\{Z_0 < y\}} ds$ où $Z_s = y_0$, g est une fonction > 0, de classe C^1 sur (A,B).

Le même calcul qu'au §2 nous donne alors le résultat suivant : si X est la diffusion sur (A,B) de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}(gQ)(\frac{1}{g}P)$, et si g est telle que, partant de $z_0 \in (A,B)$ X passe presque sûrement par tous les points de (z_0,B), alors, $\int_0^{\zeta} g(Z_s) 1_{\{Z_s < y\}}$ et $\int_0^{T_y} g(X_s) ds$ ont même loi si $Z_0 = y_0$ et X_0 a pour loi la loi du minimum de Z.

Dans le cas particulier où $g = \frac{1}{s^2}\frac{ds}{dm}$, on a : $\frac{1}{2}(gQ)(\frac{1}{y}P) = \frac{1}{2}\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$; X et Ƶ ont donc même générateur. En fait, ce résultat s'obtient à partir du §3; b), en remarquant que d'après la formule d'Itô :

$$\mathrm{Log}|s(Ƶ_t)| = \int_0^t \sqrt{g(Ƶ_s)}\,d\beta_s + \int_0^t g(Ƶ_s)ds + \mathrm{Log}|s(y_0)|$$

(β = mouvement Brownien) donc, $\mathrm{Log}|s(Ƶ_t)|$ changé de temps par l'inverse de la fonctionnelle additive $\int_0^t g(Ƶ_s)ds$ est un mouvement Brownien avec drift, et le résultat découle du §3, b), par changement de temps.

REFERENCES :

[1] Ƶ. CIESIELSKI, S. TAYLOR : First passage time and sojourn density for Brownian Motion in Space and the exact Hausdorff Measure of the sample path. T.A.M.S 103 (1962), p. 434-450.

[2] M.J. SHARPE : Some transformations of diffusions by time reversal. Ann. Proba. 8 (1980), p. 1157-1162.

[3] R. GETOOR, M. SHARPE : Excursions of Brownian Motion and Bessel Processes. Ƶ.W. 47 (1979), p. 83-106.

[4] D. WILLIAMS : Path decompositions and continuity of local times for one dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc. 3, 28, p. 738-768, 1974.

Adresse de l'auteur :

E.N.S. Ulm

45, rue d'Ulm

75230 PARIS CEDEX 05