

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE

## **Flot d'une équation différentielle stochastique avec semimartingale directrice discontinue**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 271-274

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__271_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

FLOT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

AVEC SEMI-MARTINGALE DIRECTRICE DISCONTINUE

par R. LEANDRE

Ce travail a pour but de compléter les résultats sur l'existence de flots stochastiques, présentés par P.A. Meyer ( d'après Kunita et Varadhan ) dans le volume XV du Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in M. 850, p. 103-117. Cet article, auquel nous nous référerons constamment, sera désigné par [M] dans la suite. Meyer remarque, p. 111, que l'on ne peut établir en général l'existence d'un flot de difféomorphismes lorsque la semimartingale directrice est discontinue, comme le montre l'exemple de l'équation exponentielle à une dimension  $X_t = x + \int_0^t X_{s-} dZ_s$  : si  $Z$  admet à l'instant  $T$  un saut égal à  $-1$ , les trajectoires issues des différents points  $x$  confluent en  $0$  à partir de  $T$ . Nous allons montrer que cet exemple est vraiment typique : l'existence d'un flot de difféomorphismes dépend seulement d'une condition ( déterministe ) sur la nature des sauts de  $Z$ .

Nous ferons usage à plusieurs reprises d'un théorème de Hadamard [1] : si  $f$  est une application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , qui est propre et étale ( sa différentielle ne dégénère jamais ), alors  $f$  est un difféomorphisme.

HYPOTHESES ET NOTATIONS

Nous considérons une é.d.s. de la forme

$$(1) \quad X_t = x + \int_0^t F(X_{s-}) dZ_s$$

$X_t$  et  $x$  sont des éléments de  $\mathbb{R}^n$ ; la semimartingale directrice  $Z$  est nulle en  $0$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ;  $F$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans l'espace des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes, de classe  $C^\infty$ , admettant des dérivées bornées de tous ordres. Si  $z$  est un élément de  $\mathbb{R}^m$ ,  $F(x)z$  et  $D_i F(x)z$  ( dérivée partielle de  $F(x)$  par rapport à la  $i$ -ième coordonnée de  $x$  ) sont des éléments de  $\mathbb{R}^n$ , et nous désignons par  $F'(x)z$  la matrice  $(n,n)$  dont les colonnes sont les vecteurs  $D_i F(x)z$ .

D'après Kunita ( voir [M] ), on peut choisir une version  $X_t(x,\omega)$  de la solution de (1), possédant pour ( presque ) tout  $\omega$  la propriété suivante :  $X_t(\cdot,\omega)$  est pour tout  $t$  une application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui même ; les dérivées partielles en  $x$  de cette application sont des fonctions continues de  $(t,x)$ . Si  $U_t(x) = X_t'(x,\omega)$  est la matrice jacobienne

de l'application  $X_t(.,\omega)$ ,  $U_t$  est solution de l'équation linéaire

$$(2) \quad U_t = I + \int_0^t dL_s U_{s-}$$

où  $L_t$  est la matrice carrée semimartingale  $\int_0^t F'(X_{s-}) dZ_s$ .

Il nous faut aussi rappeler la méthode d'Emery pour résoudre l'é.d.s.

(1). On se donne une suite de temps d'arrêt (bornés pour fixer les idées)  $0 = T_0 < T_1 < T_2 \dots$ , tendant vers l'infini, tels que les semimartingales

$$(3) \quad Z^i = Z^{T_i-} - Z^{T_{i-1}} \quad (i=1,2,\dots)$$

aient une norme  $< \varepsilon$  dans l'espace  $\underline{H}^\infty$  introduit par Emery (ZW 41, 1978, p. 241-262), où  $\varepsilon$  est un nombre suffisamment petit. Cela impose en particulier que le crochet  $[Z^i, Z^i]_\infty$  soit majoré par  $\varepsilon$ , donc que les sauts de  $Z^i$  soient majorés par  $\varepsilon$ : les grands sauts de  $Z$  figurent donc parmi les instants  $T_i$ . On désigne par  $X_t^i(x)$  la solution de (1) avec semimartingale directrice  $Z^i$ , de sorte que

$$(4) \quad X_t^i(x) = x \quad \text{pour } t \leq T_{i-1}, \quad X_t^i(x) = X_{T_{i-1}-}^i(x) \quad \text{pour } t \geq T_i$$

D'autre part, on définit les opérateurs de raccordement en posant

$$(5) \quad H^i(x) = x + F(x) \Delta Z_{T_i}$$

La construction de la solution de (1) se fait alors ainsi pour tout  $\omega$ : on regarde dans quel intervalle  $[T_n, T_{n+1}[$  se trouve  $t$ , puis l'on forme

$$(6) \quad \begin{aligned} x_{1-} &= X_{T_1-}^1(x) = X_{T_1}^1(x), & x_{1+} &= H^1(x_{1-}) \\ x_{2-} &= X_{T_2-}^2(x_{1+}), & x_{2+} &= H^2(x_{2-}) \dots \text{ jusqu'à } x_{n+} \\ X_t(x) &= X_{t-T_n}^{n+1}(x_{n+}) \end{aligned}$$

On voit donc que, pour montrer que  $X_t(.,\omega)$  est un difféomorphisme (resp. est injective) il suffit de montrer que les applications

$$X_{T_i}^i(.,\omega), \quad X_{t-T_n}^{n+1}(.,\omega), \quad H^i(.,\omega)$$

sont des difféomorphismes (resp. sont injectives). Etudier les deux premières fonctions revient à étudier l'équation (1) lorsque la semimartingale directrice  $Z = Z^i$  a une norme petite dans  $\underline{H}^\infty$

#### FLOT DE DIFFEOMORPHISMES

Nous commençons par traiter le cas des deux premières fonctions: nous pouvons omettre l'indice  $i$ . D'autre part, puisque nous travaillons à  $\omega$  fixé, nous pouvons remplacer  $T_i$  ou  $t - T_n$  simplement par  $t$ . Nous allons montrer que, si la semimartingale directrice  $Z$  a une norme assez

petite dans  $\underline{H}^\infty$ , l'application  $X_t(\cdot)$  ( dont on sait déjà qu'elle est  $C^\infty$  ) est propre et étale.

Le premier point est déjà traité dans [M] ( remarque du haut de la page 116 ). Pour le second, nous utilisons le lemme suivant, qui étend les formules de Karandikar ( Sémin. Prob. XVI, p. 385 ) au cas discontinu.

LEMME. Soit  $(U_t)$  une semimartingale matricielle, solution de l'é.d.s.

$$(7) \quad U_t = I + \int_0^t dL_s U_{s-}$$

( cf. (2) ). Supposons que pour tout s, la matrice  $I + \Delta L_s$  soit inversible. Alors la semimartingale  $(V_t)$  solution de l'é.d.s.

$$(8) \quad V_t = I + \int_0^t V_{s-} dM_s, \quad M_t = -L_t + \langle L^c, L^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \frac{\Delta L_s^2}{I + \Delta L_s}$$

( où  $\langle L^c, L^c \rangle_j^i = \sum_k \langle L_k^{ic}, L_j^{kc} \rangle$  ) est telle que  $V_t U_t = I$  pour tout t.

DEMONSTRATION. Élémentaire ( calculer  $d(V_t U_t)$  au moyen de la formule d'intégration par parties stochastique ).

On remarquera que  $I + \Delta L_s$  est toujours inversible si  $|\Delta L_s|$  est assez petit, et qu'on a alors une majoration explicite de  $|(I + \Delta L_s)^{-1}|$  : la définition du troisième terme de  $M_t$  ne pose donc aucun problème.

REMARQUE. Meyer signale dans [M] que la démonstration de Kunita s'étend sans changement au cas des semimartingales discontinues, à norme dans  $\underline{H}^\infty$  suffisamment petite ( remarques p. 114 et 116, et dernières lignes avant l'appendice ). Il nous semble que la méthode présentée ci-dessus ( pour le cas  $C^\infty$  ) est plus simple.

On voit donc que la discussion est complètement ramenée à celle des opérateurs de raccordement  $H^i$ .

Nous désignerons par  $D$  ( resp.  $I$  ) l'ensemble des  $z \in \mathbb{R}^m$  tels que l'application

$$(9) \quad H(x) = x + F(x)z$$

soit un difféomorphisme ( resp. soit injective ). On a évidemment  $D \subset I$ . D'autre part,  $D$  contient un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^m$ . En effet,  $F$  est lipschitzienne, donc à croissance au plus linéaire, donc pour  $z$  assez petit on a  $|F(x)z| \leq |x|/2$  et  $|H(x)| \geq |x|/2$  pour  $|x|$  grand, de sorte que  $H$  est propre, et d'autre part  $H'(x) = I + F'(x)z$  est inversible pour tout  $x$  pour  $|z|$  petit puisque  $F'(x)$  est bornée.

THEOREME. Pour que l'équation (1) définisse un flot de difféomorphismes ( resp. ait des trajectoires non-confluentes ) il faut et il suffit que les sauts de  $Z$  appartiennent tous à  $D$  ( resp. à  $I$  ).

DEMONSTRATION. Si les sauts de  $Z$  appartiennent tous à  $D$  ( resp.  $I$  ), les opérateurs de raccordement  $H^i$  sont des difféomorphismes ( resp. sont

injectifs), et  $X_t(.,\omega)$  est alors un difféomorphisme (est injectif) par composition.

Inversement, supposons qu'avec probabilité positive, les sauts de  $Z$  appartiennent à  $D^C$  ( $I^C$ ). D'après les remarques précédant le théorème, il existe  $\varepsilon > 0$  tels que tous les sauts de longueur  $\leq \varepsilon$  appartiennent à  $D$ . Donc si la subdivision  $T_i$  a été choisie assez fine, les sauts  $\Delta Z_t \in D^C$  ont tous lieu aux instants  $T_i$ . Il existe alors un entier  $i$  tel que, avec probabilité positive,  $\Delta Z_{T_j}$  appartienne à  $D$  pour tout  $j < i$ , mais  $\Delta Z_{T_i}$  appartienne à  $D^C$  (resp.  $I^C$ ). Dans ces conditions,  $X_{T_{i-1}}(.)$  est un difféomorphisme, mais  $H^i$  n'en est pas un (resp. n'est pas injective), donc pour  $t = T_i$   $X_t(.)$  n'est pas un difféomorphisme (n'est pas injective).

#### REFERENCES

[1]. DIEUDONNE (J.). Eléments d'analyse, t.III, chap. XVI, p. 82, exerc. 1.

R. LEANDRE

Université de Besançon

Département de Mathématiques

25030-Besançon Cedex, France