

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE

**Estimation dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de la loi de certains processus  
à accroissements indépendants**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 263-270

<[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_263\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__263_0)>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION DANS  $L^p(\mathbb{R}^n)$  DE LA LOI DE CERTAINS PROCESSUS A  
ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

Rémi LEANDRE

Bismut, dans [B], étudie la loi d'un processus à accroissements indépendants,  $X_t$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Sa mesure de Lévy  $d\mu(x)$  est définie par :

$$(0-1) \quad d\mu(x) = g(x) dx .$$

Il démontre que si la " concentration " en petits sauts de  $X_t$  est assez forte, la loi de  $X_t$  possède une densité  $C^\infty$  pour  $t > 0$ . Si la " concentration " est un peu moins forte, le processus est " lentement régularisant " : pour tout entier  $p$ , il existe un temps  $t_p$  tel que pour  $t > t_p$ ,  $X_t$  possède une densité de classe  $C^p$ .

L'idée de la preuve est d'effectuer une variation du processus  $X_t$ . Grâce à une exponentielle de Girsanov  $G_z(t)$  ([J]), il obtient la relation fondamentale :

$$(0-2) \quad E [ G_z(t) f(X_t(z)) ] = E [ f(X_t) ]$$

si  $X_t(z)$  est le processus perturbé. La fin de la démonstration consiste à dériver cette relation, ce qui donne lieu à des calculs difficiles ( Dans un cadre plus général, on trouve une présentation plus simple de ceux-ci dans [B-J]).

Nous nous proposons de montrer que l'on peut obtenir des estimations dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de la densité de  $X_t$  en intégrant (0-2).

## 1. NOTATIONS ET ENONCES DES THEOREMES .

Soit  $\mathcal{D}[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n]$  l'espace canonique de Skorohod ( $[J]$ ), c'est-à-dire l'espace des fonctions continues à droite, limitées à gauche, de  $\mathbf{R}^+$  dans  $\mathbf{R}^n$ .

$w$  est la trajectoire canonique.

Soit  $g$  une fonction définie sur  $\mathbf{R} - \{0\}$ , positive, continue, telle que :

$$(1-1) \quad \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} (\|x\|^2 \wedge 1) g(x) dx < \infty .$$

Soit  $P$  l'unique probabilité sur  $\mathcal{D}[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n]$  qui fasse du processus canonique  $X_t$  un processus à accroissements indépendants, de fonction caractéristique égale à :

$$(1-2) \quad \psi_t(\alpha) = \exp \left[ t \int \left( \exp[-i \langle \alpha, x \rangle] - 1 + i 1_{[0,1]}(\|x\|) \langle \alpha, x \rangle \right) g(x) dx \right]$$

Soit  $v(x)$  une fonction  $C^\infty$ , à support compact dans  $\{g > 0\}$  telle que  $\frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0$  et telle que :

$$(1-3) \quad x \xrightarrow{H_z} x + v(x) z$$

soit un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  pour tout  $z$  de la boule unité  $B(0,1)$  de  $\mathbf{R}^n$ .

De plus  $v(x)$  appartient à  $\mathbf{R}^+$ .

Posons :

$$(1-4) \quad C_z(x) = \left| \det \frac{\partial H_z(x)}{\partial x} \right| \frac{g(H_z(x))}{g(x)} - 1$$

et considérons l'unique martingale locale, somme compensée de  $C_z(\Delta X_s)$ .

Soit  $G_z(t)$  l'exponentielle de Doléans-Dade associée à la martingale locale précédente ( $[J]$ ).

Nous en possédons une expression explicite :

$$(1-5) \quad G_z(t) = \exp \left[ \sum_{s \leq t} C_z(\Delta X_s) \right] \times \prod_{\substack{s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} \exp[-C_z(\Delta X_s)] [1 + C_z(\Delta X_s)] .$$

Nous supposons dans toute la suite que  $G_z(t)$  est uniformément bornée dans tous les  $L^p$  lorsque  $z$  décrit  $B(0, 1)$ .

Nous avons alors les deux théorèmes suivants :

**THEOREME I.** Si pour tout  $t > 0$ ,  $\left(\sum_{s \leq t} v(\Delta X_s)\right)^{-1}$  est dans tous les  $L^p(P)$ , alors  $X_t$  possède une densité appartenant à  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $p$ .  
Si il existe  $p_0 > 1$ ,  $t_0 > 0$  tel que  $\left(\sum_{s \leq t_0} v(\Delta X_s)\right)^{-1}$  soit dans  $L^{p_0}(P)$ , alors pour tout  $p > 1$ , il existe un réel  $t_p > 0$ , tel que pour  $t > t_p$ ,  $X_t$  possède une densité dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Quand  $p \rightarrow 1$ ,  $t_p \rightarrow 0$ .

Nous démontrerons dans la partie II ce théorème. Donnons en d'abord une application.

**THEOREME II.** Si il existe  $\alpha \in ]0, 2[$  tel que

$$(1-6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^\alpha \int_{v(x) > r} g(x) dx > 0$$

alors pour  $t > 0$ ,  $X_t$  possède une densité dans tous les  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Si

$$(1-7) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \text{Log} \frac{1}{r} \right]^{-1} \int_{v(x) > r} g(x) dx > 0$$

alors pour tout  $p > 1$ , il existe un réel  $t_p$  tel que pour  $t > t_p$ ,  $X_t$  possède une densité dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . De plus quand  $p \rightarrow 1$ ,  $t_p \rightarrow 0$ .

Preuve : Elle est identique à celle de [B], page 202.

$\Gamma$  est la fonction d'Euler. On a :

$$(1-8) \quad E \left[ \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-p} \right] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \beta^{p-1} E \left[ \exp \left[ -\beta \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right] \right] d\beta$$

soit :

$$(1-9) \quad \tau(\beta) = \int (1 - \exp[-\beta v(x)]) g(x) dx .$$

Soit  $Y_t(\beta)$  le processus :

$$(1-10) \quad Y_t(\beta) = \exp \left[ -\beta \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) + t \tau(\beta) \right] .$$

D'après [J] et [S], on sait que  $Y_t(\beta)$  est une martingale positive de carré intégrable .

(1-8) implique alors :

$$(1-11) \quad E \left[ \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-p} \right] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \beta^{p-1} \exp[-t \tau(\beta)] d\beta .$$

Le théorème résulte alors des théorèmes Taubériens de [B], p. 210 :

Si  $\lim_{r \rightarrow 0} r^\alpha \int_{v(x) > r} g(x) dx > 0$  ; alors :

$$(1-12) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} |\beta|^{-\alpha} \tau(\beta) > C .$$

Si  $\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^{-1} \int_{v(x) > r} g(x) dx > 0$  , alors

$$(1-13) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\text{Log } \beta)^{-1} \tau(\beta) > C .$$

REMARQUE . Si on suppose en plus que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  , et que pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$(1-14) \quad \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{|\text{grad } g(x)|^2}{g(x)} dx < \infty$$

et que :

$$(1-15) \quad \int_{|x| \leq 1} \frac{|\text{grad } v(x) g(x)|^2}{g(x)} dx < \infty$$

il résulte des techniques du calcul des variations de [B] que  $X_t$  possède une densité  $C^\infty$  à dérivées bornées dès que (1-6) est vérifiée et que  $X_t$  est "lentement régularisant" dès que (1-7) l'est .

## II. DEMONSTRATION DU THEOREME .

## PREMIERE ETAPE : VARIATION DU PROCESSUS .

Considérons le processus :

$$(2-1) \quad X_t(z) = X_t + \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right) z$$

pour un élément,  $z$ , de la boule unité  $B(0, 1)$  .

La mesure de Lévy de  $X_t(z)$ ,  $d\mu_z$ , vérifie :

$$(2-2) \quad \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(x) d\mu_z(x) = \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(H_z(x)) g(x) dx$$

( $H_z$  a été défini en (1-3)) .

Il résulte de (1-4) que :

$$(2-3) \quad \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(H_z(x)) (C_z(x) + 1) g(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(x) g(x) dx .$$

Remarquons que  $(z, x) \rightarrow C_z(x)$  est mesurable .

Donc l'ensemble des  $(\omega, z)$  tels que la limite définissant  $\sum_{s \leq t}^c C_z(\Delta X_s)$  n'existe pas , c'est-à-dire ,

$$(2-4) \quad \sum_{s \leq t}^c C_z(\Delta X_s) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \sum_{s \leq t} C_z(\Delta X_s) - \int_0^t ds \int_{|x| > \epsilon} C_z(x) g(x) dx \right)$$

est mesurable dans  $\mathcal{B}[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n] \times B(0, 1)$  . De même , l'ensemble des  $(\omega, z)$  tels que le produit infini défini dans (1-5) n'existe pas est mesurable .

Aussi , posons lorsque l'un des deux termes figurant dans (1-5) ou (2-4) n'est pas défini :

$$(2-5) \quad \tilde{G}_z(t) = 0 .$$

Alors  $(\omega, z) \rightarrow \tilde{G}_z(t)$  est mesurable à valeurs dans  $\mathbf{R}^+$  .

De plus , à  $z$  fixé ,  $t \rightarrow \tilde{G}_z(t)$  est une martingale uniformément bornée dans tous les  $L^p(P)$  .

De (2-3) et de la formule de Girsanov pour les processus de sauts ( $[J]$ ,  $[B]$ ) , il s'ensuit que :

$$(2-6) \quad E [ f ( X_t (z) ) \tilde{G}_z (t) ] = E [ f ( X_t ) ]$$

pour toute fonction mesurable positive .

DEUXIEME ETAPE : INTEGRATION DE LA VARIATION .

Appliquons le théorème de Fubini . (2-6) implique que :

$$(2-7) \quad \text{vol } B(0, 1) E [ f ( X_t ) ] = E \left[ \int_{B(0, 1)} \tilde{G}_z (t) f \left( X_t + \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) z \right) dz \right] .$$

Utilisons la formule du changement de variable et l'inégalité de Hölder ; nous obtenons :

$$(2-8) \quad E [ f ( X_t ) ] \leq C E \left[ \left\| \tilde{G}_z (t) \right\|_{L^p(B(0, 1))} \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-\frac{n}{q}} \right] \| f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

$$\text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

PREMIER CAS :  $\left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-1}$  est dans tous les  $L^p(P)$  .

L'inégalité de Hölder implique que :

$$(2-9) \quad E \left[ \left\| \tilde{G}_z (t) \right\|_{L^p(B(0, 1))} \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-\frac{n}{q}} \right] \leq \left( E \left[ \int_{B(0, 1)} \tilde{G}_z^p (t) dz \right] \right)^{\frac{1}{p}} \left( E \left[ \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-n} \right] \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Réappliquant le théorème de Fubini , on trouve que :

$$(2-10) \quad E \left[ \int_{B(0, 1)} \tilde{G}_z^p (t) dz \right] \leq \int_{B(0, 1)} E [ G_z (t) ] dz < C .$$

De (2-8) et (2-9) , il résulte alors que :

$$(2-11) \quad E [ f ( X_t ) ] \leq C \| f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} .$$

DEUXIEME CAS : il existe  $p_0 > 1$  et  $t_0 > 0$  tel que  $\left( \sum_{s \leq t_0} v(\Delta X_s) \right)^{-1}$  soit dans  $L^{p_0}(P)$  .

Par hypothèse ,

$$(2-12) \quad p \left\{ \sum_{s \leq t_0} v(\Delta X_s) \leq \lambda \right\} \leq C \lambda^{p_0} \quad (\lambda \rightarrow 0) .$$

Or , comme  $v$  est positive ,

$$(2-13) \quad p \left\{ \sum_{s \leq 2t_0} v(\Delta X_s) \leq \lambda \right\} \leq p \left\{ \sum_{s \leq t_0} v(\Delta X_s) \leq \lambda ; \sum_{t_0 \leq s \leq 2t_0} v(\Delta X_s) \leq \lambda \right\} \\ = \left( p \left\{ \sum_{s \leq t_0} v(\Delta X_s) \leq \lambda \right\} \right)^2 \leq C \lambda^{2p_0}$$

car  $\sum_{s \leq t} v(\Delta X_s)$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires.

Donc , pour tout  $p > p_0$  , il existe  $t_p$  tel que  $\left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-1}$  soit dans  $L^p(P)$ .

Réutilisons (1-11) . Nous obtenons :

$$\int_1^\infty \beta^{p_0-1} \exp[-t_0 \tau(\beta)] d\beta < \infty$$

et l'inégalité de Hölder implique que :

$$(2-14) \quad \int_1^\infty \beta^{\frac{p_0-1}{p}} \exp\left[-\frac{t_0}{p} \tau(\beta)\right] \frac{d\beta}{\beta} < \infty .$$

Donc , lorsque  $t$  tend vers zéro , il existe un réel  $p(t)$  tendant vers  $0_+$  tel que  $\left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-p(t)}$  soit dans  $L^1(P)$  , toujours en vertu de (1-11) .

Revenons à (2-8) . L'inégalité de Hölder implique :

$$(2-15) \quad E \left[ \left\| \tilde{G}_z(t) \right\|_{L^p(B(0,1))} \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-\frac{n}{q}} \right] \leq \\ \left( E \left[ \left( \int_{B(0,1)} \tilde{G}_z^p(t) dz \right)^{\frac{r}{p}} \right] \right)^{\frac{1}{r}} \left( E \left[ \left( \sum_{s \leq t} v(\Delta X_s) \right)^{-\frac{n}{q} r'} \right] \right)^{\frac{1}{r'}}$$

pour  $r > p$  et  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$  (Donc  $r' < q$ ) .

Or  $r > p$  . Il découle de la formule de Jensen que :

$$(2-16) \quad \left( \int_{B(0,1)} \tilde{G}_z^p(t) dz \right)^{\frac{r}{p}} \leq C \int_{B(0,1)} \tilde{G}_z^{r'}(t) dt$$



et donc :

$$(2-17) \quad \left( E \left[ \left( \int_{B(0,1)} \tilde{G}_z^p(t) dz \right)^{\frac{r}{p}} \right] \right)^{\frac{1}{r}} < \infty .$$

On sait alors qu'il existe  $t_{\frac{nr'}{q}}$  tel que :

$$(2-18) \quad E \left[ \left( \sum_{s \leq t_{\frac{nr'}{q}}} v(\Delta X_s) \right)^{-\frac{nr'}{q}} \right] < \infty$$

De plus , quand  $q \rightarrow \infty$  , on peut choisir  $r'$  pour que  $\frac{nr'}{q} \rightarrow 0$  et donc quand  $q \rightarrow \infty$  , on peut choisir  $t_{\frac{nr'}{q}}$  pour qu'il tende vers 0 .

En résumé , pour  $t > t_{\frac{nr'}{q}}$  , on a :

$$(2-19) \quad E [ f(X_t) ] \leq C \|f\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}$$

d'après (2-8) , (2-15) , (2-17) et (2-18) .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [B] BISMUT J.M. : Calcul des variations stochastique et processus de sauts .  
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 63, 2, 147-235 (1983) .
- [B-J] BICHTLER K. - JACOD J. : A paraître .
- [J] JACOD J. : Calcul stochastique et problèmes de martingales .  
Springer , Lect. Notes in Math. 714 (1979).
- [S] STROOCK D.W. : Diffusion processes associated with Levy generators .  
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 32 , 209-244 (1975).

Laboratoire de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
25030 BESANCON CEDEX