

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Lois de semimartingales et critères de compacité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 209-217

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__209_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Loi de semimartingales et critères de compacité .

Christophe Stricker

Université de Franche-Comté, CNRS

Equipe de Mathématiques , U.A. 741

25030 Besançon Cedex

Cet article est un complément à celui de Meyer et Zheng qui doit paraître dans les Annales de l'I.H.P. . Ces auteurs ont introduit une nouvelle topologie faible sur l'espace \mathbf{D} des applications continues à droite ayant des limites à gauche de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R} (l'extension à \mathbf{R}^d est laissée au lecteur) . Ils ont ainsi obtenu des critères de compacité plus agréables , notamment lorsqu'il s'agit de lois de quasimartingales sur \mathbf{D} . Après avoir rappelé les résultats essentiels de Meyer et Zheng , nous donnons un nouveau critère de compacité des lois de semimartingales . Nous dégagerons aussi un critère de compacité pour la classe \mathfrak{g} étudiée dans [6] .

PSEUDO-TRAJECTOIRES .

Pour les détails concernant la notion de pseudo-trajectoire nous renvoyons le lecteur intéressé au livre [1] , chapitre IV , n° 40-46 .

Soit $\lambda(dt)$ la mesure $e^{-t} dt$ sur \mathbf{R}^+ . Soit $w(t)$ une fonction borélienne de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R} . Par définition , la pseudo-trajectoire de w est la loi de probabilité image sur $[0, + \infty] \times \bar{\mathbf{R}}$ par l'application $(t \rightarrow (t, w))$. On note ψ l'application qui à w associe sa pseudo-trajectoire . ψ est injective sur \mathbf{D} , si bien que \mathbf{D} peut être plongé grâce à ψ dans l'espace compact $\bar{\mathcal{P}}$ de toutes les lois de probabilités sur le compact $[0, + \infty] \times \bar{\mathbf{R}}$. Désormais \mathbf{D} sera muni de la topologie induite et on peut montrer que cette topologie n'est autre que la topologie de la convergence en mesure sur \mathbf{D} (voir [2]) .

UNE CARACTERISATION DE \mathbf{D} .

Soit $\mu \in \bar{\mathcal{P}}$. On pose $\mu^* = \inf \{ c, \mu \text{ est portée par } [0, + \infty] \times [-c, c] \}$. Si μ est

une pseudo-trajectoire, c'est-à-dire si $\mu = \psi(w)$, $\mu^* = \text{ess sup}_t |w(t)|$.

Soit \mathbb{R} l'ensemble des couples de rationnels (u, v) avec $u < v$. Si τ est une subdivision finie de $[0, +\infty]$, on définit pour $\mu \in \bar{\mathcal{P}}$ un entier $N_\tau^{uv}(\mu)$ par la condition :

$N_\tau^{uv}(\mu) \geq k$ si et seulement s'il existe des éléments de τ notés

$0 \leq t_{i_1} < t_{i_1} < t_{i_2} < t_{i_2} < \dots < t_{i_k} < t_{i_k} < +\infty$ tels que μ charge chacun des en-

sembles ouverts (dans $[0, +\infty] \times \bar{\mathbb{R}}$) $]t_{i_1}, t_{i_1+1}[\times]-\infty, u[$, $]t_{i_1}, t_{i_1+1}[\times]v, +\infty[$,

$]t_{i_2}, t_{i_2+1}[\times]-\infty, u[\dots$. On pose $N^{uv} = \sup_\tau N_\tau^{uv}$. Lorsque μ est la pseudo-tra-

jectoire de w , $N^{uv}(\mu)$ est égal au nombre de montées de w par dessus $[u, v]$.

Voici la caractérisation promise [2] :

THEOREME 1. La loi de probabilités $\mu \in \bar{\mathcal{P}}$ appartient à \mathbf{D} si et seulement si $\mu^* < +\infty$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}$, $N^{uv}(\mu) < +\infty$ et la projection de μ sur $[0, +\infty]$ est $\lambda(dt)$.

COROLLAIRE. Tout sous-ensemble A de \mathbf{D} tel que $\sup_{\mu \in A} \mu^* < \infty$,

$\sup_{\mu \in A} N^{uv}(\mu) < +\infty$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}$ est relativement compact dans \mathbf{D} .

LOIS DE SEMIMARTINGALES.

Soit (X^n) une suite de processus càdlàg, adaptés, définis sur des espaces probabilisés filtrés $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n)$. On dit que la suite (X^n) vérifie la condition (*) si $\lim_{c \rightarrow \infty} P^n [|(j^n \cdot X^n)_\infty| > c] = 0$, la convergence étant uniforme

lorsque n décrit \mathbb{N} et j_n l'ensemble des processus (\mathcal{F}_t^n) -prévisibles élémentaires bornés par 1. Dans l'énoncé et la démonstration du théorème suivant nous supposerons X^n à valeurs dans \mathbb{R} mais tout se transpose aisément aux semimartingales à valeurs dans \mathbb{R}^d .

THEOREME 2. On note P_n la loi de X^n sur \mathbf{D} . Si la suite (X^n) vérifie la condition (*) ci-dessus, alors les lois P_n sont des lois de semimartingales tendues sur \mathbf{D} et toutes les lois limites de la suite (P_n) sont des lois de semimartingales.

DEMONSTRATION . D'après le théorème 1 et son corollaire, il suffit , pour que P_n soit tendue sur \mathbf{D} , de montrer que $P_n[N^{uv} > c]$ et que $P_n[X^* > c]$ tendent uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Soit $T = \inf \{t, |X_t| \geq c\}$.

On a $\{X^* \geq c\} = \{ |(1_{[0, T]} \cdot X)_\infty| \geq c \}$. Soit (T_n) une suite de temps d'arrêt tendant en décroissant vers T et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs . $1_{[0, T_n]}$ est un processus prévisible élémentaire borné par 1 , si bien que

$\lim_{c \rightarrow \infty} P_n [|(1_{[0, T_n]} \cdot X)_\infty| \geq c] = 0$ uniformément par rapport à n et k . En

vertu de la continuité à droite de X , $P_n[X^* > c]$ tend aussi uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Enfin si on pose $S_1 = \inf \{t, X_t \leq u\}$,

$T_1 = \inf \{t > S_1, X_t \geq v\}$, $S_2 = \inf \{t > T_1, X_t \leq u\}$, etc ... , on a $\{N^{uv} > c\} \subset \{ ((\sum_i 1_{]S_i, T_i]} \cdot X)_\infty > u^+ + (v - u)c \}$. On approche à nouveau

S_i et T_i par des temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs , et compte-tenu de l'hypothèse du théorème ci-dessus , $P_n[N^{uv} > c]$ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Ainsi la suite P_n est tendue sur \mathbf{D} .

Il reste à vérifier que si P est une loi limite de la suite (P_n) , P est aussi une loi de semimartingales . Soit \mathcal{J} l'ensemble des processus prévisibles élémentaires bornés par 1 de la forme $j = \sum_{i=1}^p \varphi_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où φ_{t_i} est une application

continue de \mathbf{D} dans \mathbf{R} . D'après le critère de Dellacherie-Mokobodzki (voir [5] pour une démonstration simple) , X est une semimartingale sous la loi P si et seulement si $\{(j \cdot X)_\infty, j \in \mathcal{J}\}$ est borné dans $L^0(P)$. La condition (*) entraîne que $\{(j \cdot X)^*, j \in \mathcal{J}\}$ est uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Or $\{(j \cdot X)^* > c\}$

un ouvert de \mathbf{D} , si bien que $P[(j \cdot X)^* > c] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P_n[(j \cdot X)^* > c]$. Donc

$\{(j \cdot X)^*, j \in \mathcal{J}\}$ est borné dans $L^0(P)$ et X est une semimartingale sous P .

COROLLAIRE 1 . Si (X^n) est une suite de processus càdlàg définis sur des espaces probabilisés $(\Omega^n, \mathfrak{F}^n, P^n)$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $c > 0$ vérifiant $P^n [\int_0^\infty |dX_s^n| > c] \leq \epsilon$ pour tout n , alors les lois P_n de X^n sur \mathbf{D} sont tendues sur \mathbf{D} et X est un processus à variation finie pour toute loi limite P de la suite (P_n) sur \mathbf{D} .

DEMONSTRATION . C'est une conséquence immédiate du théorème 2 . En effet soit P une fonction borélienne bornée de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dans \mathbf{R} telle que $f((X_t)_{t \in \mathbf{Q}^+})$ engendre la tribu \mathfrak{F}_∞ sur \mathbf{D} . On applique alors le théorème 2 à la suite de semimartingales $((X_t^n), (f((X_t^n))_{t \in \mathbf{Q}^+}))$ à valeurs dans $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$.

COROLLAIRE 2 . Sous les hypothèses du théorème 2 , les lois des semimartingales $(X^n, [X^n, X^n])$ sont tendues sur $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$.

DEMONSTRATION . Il suffit de remarquer que $P^n [(X^n)^* > c]$ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$ et que $[X^n, X^n]_t = (X_t^n)^2 - 2 \int_0^t X_{s-}^n dX_s^n$. Il est facile de vérifier que $P^n [(X_-^n \cdot X^n)^* > c]$ tend aussi uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$, si bien que le couple $(X^n, [X^n, X^n])$ vérifie les hypothèses du théorème 2 et les lois de ces couples sont tendues sur $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$.

REMARQUE . Grâce à la formule d'intégration par parties et à la démonstration ci-dessus, on peut améliorer le théorème 2 : si une suite (X^n) vérifie la condition $(*)$, pour tout $p \geq 1$ la suite $((X^n)^p)$ vérifie aussi $(*)$.

THEOREME 3 . Soit (X^n) une suite de quasimartingales définies sur des espaces probabilisés filtrés $(\Omega^n, \mathfrak{F}^n, (\mathfrak{F}_t^n), P^n)$. S'il existe une constante α telle que $\text{Var } X^n \leq \alpha$ pour tout n , alors (X^n) vérifie la condition $(*)$ du théorème 2 .

DEMONSTRATION . En ce qui concerne les résultats généraux sur les quasimartingales, le lecteur intéressé pourra se reporter à [1], [3] et [4] .

Si X est une quasimartingale, il existe deux surmartingales positives X^I et X^{II} telles que $\text{Var } X = E [X_0^I + X_0^{II}]$ et $X = X^I - X^{II}$. Soit $T_p = \inf \{t, |X_t| \geq p\}$. D'après la décomposition de Doob-Meyer d'une surmartingale positive, il existe une martingale locale M et un processus prévisible à variation intégrable A tels que $X = M + A$. Or $(M^{T_p})^* \leq p + |X_{T_p}| + \int_0^\infty |dA_s|$, si bien que $E [(M^{T_p})^*] \leq p + E |X_{T_p}| + E [\int_0^\infty |dA_s|] \leq p + \text{Var } X + \text{Var } X$.

Comme M^{T_p} est dans \mathfrak{H}^1 , il existe une constante K telle que pour tout processus

prévisible j borné par 1 on ait :

$$E[|(j \cdot X)_{T_p}|] \leq K(E[(M^T P)^*] + E[\int_0^\infty |dA_s|]) \leq K(p + 3 \text{Var } X) .$$

Or $pP[X^* \geq p] \leq \text{Var } X$, si bien que

$$p[|(j \cdot X)_\infty| \geq c] \leq \frac{\text{Var } X}{p} + \frac{K}{c} (p + 3 \text{Var } X) .$$

Cette inégalité montre que la suite (X^n) vérifie bien les hypothèses du théorème 2 .

On retrouve ainsi le théorème 7 de [2] qui devient un corollaire immédiat des théorèmes 2 et 3 .

THEOREME 4 . On suppose que P_n est la loi sur \mathbb{D} d'une semimartingale X^n définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \mathfrak{F}^n, P^n, (\mathfrak{F}_t^n))$. Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une quasimartingale Y^n sur Ω^n telle que $P^n[(X^n - Y^n)^* > 0] \leq \epsilon$ et $\text{Var } Y^n$ soit bornée uniformément en n , alors la suite P_n est tendue sur \mathbb{D} et si P est une loi limite, X est une semimartingale sous P .

CRITERE DE COMPACTITE DES LOIS D'UNE CERTAINE CLASSE DE SEMI - MARTINGALES .

Comme la mesure de Lebesgue λ n'est pas bornée sur $[0, +\infty]$, tous les processus considérés dans ce paragraphe sont indexés par $[0, 1]$.

Notons \mathfrak{g} la classe des semimartingales continues Y , nulles en 0, dont la décomposition canonique $Y = M + A$ possède la propriété suivante :

$d\langle M, M \rangle_t = m_t dt$, $dA_t = a_t dt$ où (m_t) et (a_t) sont prévisibles, m_t étant de plus localement borné et $\int_0^1 a_s^2 ds < +\infty$. Cette classe a été étudiée dans [6] et joue un

rôle important dans les travaux de Zheng et Meyer . Dans ce paragraphe nous nous proposons de dégager un critère de compacité et de stabilité pour la classe \mathfrak{g} analogue à celui du théorème 2 . Or dans [6] nous avons montré qu'une semimartingale continue Y appartient à \mathfrak{g} si et seulement si l'ensemble $\{(H \cdot Y)_1, H \text{ prévisibles, élémentaire, borné vérifiant } \int_0^1 H_s^2 ds \leq 1\}$ est borné dans L^0 .

Soit (X^n) une suite de semimartingales continues définies sur des espaces probabilisés filtrés $(\Omega^n, \mathfrak{F}^n, (\mathfrak{F}_t^n), P^n)$ et soit \mathfrak{g}^p l'ensemble des processus

prévisibles élémentaires bornés j sur \mathbb{D} muni de sa filtration canonique tels que

$\int_0^1 |j_s|^p ds \leq 1$. On dit que la suite (P_n) des lois de X^n sur \mathbb{D} vérifie $(**)$ si

$\{(j \cdot X)_1, j \in \mathcal{J}^2\}$ est borné uniformément dans $L^0(P_n)$.

THEOREME 5. Si la suite (P_n) vérifie $(**)$, la suite (P_n) est tendue sur \mathbb{D} et si P est une loi limite, X est une semimartingale appartenant à \mathcal{S} sous P .

Avant de passer à la démonstration du théorème 5, établissons quelques lemmes.

Nous supposons toujours $p \geq 1$.

LEMME 1. Soit (P_n) une suite de lois sur \mathbb{D} telles que X soit continu à variation finie et que $\{(j \cdot X)_1, j \in \mathcal{J}^p\}$ soit uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Alors la suite (P_n) est tendue et si P est une loi limite, il existe un processus prévisible a tel que sous P , $X_t = \int_0^t a_s ds$ et $\int_0^1 |a_s|^q ds < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $p > 1$ (resp. a est localement borné si $p = 1$).

DEMONSTRATION. Le fait que (P_n) est tendue résulte immédiatement du théorème 2 et de la condition $(*)$ de ce théorème. Passons à l'existence de a sous la loi limite P . Soit \mathcal{H}^p l'ensemble des processus h \mathcal{F}_∞ -mesurables, élémentaires, bornés vérifiant $\int_0^1 |h_s|^p ds \leq 1$. Montrons que $\{(h \cdot X)_1^*, h \in \mathcal{H}^p\}$ est borné uniformément dans $L^0(P_n)$. Si $h \in \mathcal{H}^p$, nous noterons h' la projection prévisible de h sous P_n (h' dépend de n mais évitons d'alourdir les notations). Comme $E_n[|h'|^p] \leq E_n[|h|^p]$ et que $\int_0^1 |h_s|^p ds \leq 1$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe c indépendant de n et de $h \in \mathcal{H}^p$ tel que $P_n[\int_0^1 |h'|^p ds > c] \leq \epsilon$. Il en résulte que

$\{(h' \cdot X)_1, h \in \mathcal{H}^p\}$ est borné uniformément dans $L^0(P_n)$. Soit

$T_r^n = \inf\{t, |(h' \cdot X)_t| \geq r\}$. Comme $(h' \cdot X)_{T_r^n} = ((h' \cdot 1)_{[0, T_r^n]}) \cdot X)_1$,

$P_n[(h' \cdot X)_{T_r^n} \geq r]$ tend uniformément vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$.

Par ailleurs $E_n[|(h \cdot X)_{T_r^n}|] = E_n[|(h' \cdot X)_{T_r^n}|] \leq r$ car X est à variation

finie et prévisible sous P_n . Ainsi $P_n[(h \cdot X)_{T_r^n} > c]$ tend aussi uniformément

vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$ et que r est fixé. Or

$$P_n[(h \cdot X)_1 > c] \leq P_n[(h \cdot X)_{T_r^n} > c] + P_n[T_r^n < 1] \\ \leq P_n[(h \cdot X)_{T_r^n} > c] + P_n[(h' \cdot X)_{T_r^n} \geq r].$$

Donc $P_n[(h \cdot X)_1 > c]$ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers $+\infty$. Reprenant l'argument développé au début de la démonstration du théorème 2, on voit

aisément que $\{(h \cdot X)_1^*, h \in \mathcal{H}^P\}$ est aussi uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Or si $h = \sum_i \varphi_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où φ_i est une fonction continue de \mathbf{D} dans \mathbf{R} , $\{(h \cdot X)_1^* > c\}$

est un ouvert de \mathbf{D} et $P[(h \cdot X)_1^* > c] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n[(h \cdot X)_1^* > c]$. Ainsi

$\{(h \cdot X)_1^*, h \in \mathcal{H}^P \text{ et } h_t \text{ continue pour tout } t\}$ est borné dans $L^0(P)$. Grâce au théorème des classes monotones, il en est de même pour $\{(h \cdot X)_1^*, h \in \mathcal{H}^P\}$.

D'après les lemmes 4 et 5 de [6] appliqués à X et à la filtration constante (\mathcal{F}_∞) , il existe un processus \mathfrak{F}_∞ mesurable a tel que $X_t = \int_0^t a_s ds$ P p.s. et

$$\int_0^1 |a_s|^q ds < +\infty \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (resp. } a \text{ est localement borné).}$$

En particulier X est continu sous P , si bien que les lemmes 4 et 5 appliqués cette fois à X et à la filtration (\mathcal{F}_t) montrent l'existence du processus prévisible a vérifiant les conditions du lemme 1.

Pour démontrer le théorème 5 nous avons aussi besoin d'une version améliorée d'un lemme dû à Yor.

LEMME 2. Soient X une martingale locale et A un processus croissant continu adapté. Si pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le processus $Z_t^\lambda = \exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t)$ est une surmartingale, alors X est une martingale locale continue.

DEMONSTRATION . Soient φ un homéomorphisme croissant de $[0, 1]$ sur $[0, +\infty]$ et $V_t = A_t + \varphi(t)$, qui est continu, strictement croissant et tend vers $+\infty$ avec t . Si $\tau_t = \inf \{s, V_s > t\}$, et si $t > s$ $A_{\tau_t} - A_{\tau_s} = (t-s) - \varphi(\tau_t) + \varphi(\tau_s) \leq t-s$.

Comme Z_t^λ est une surmartingale, $E[Z_t^\lambda / Z_s^\lambda] \leq 1$, si bien que $E[\exp(\lambda(X_{\tau_t} - X_{\tau_s}))] \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2}(t-s))$. Remplaçant t par $-t$, nous obtenons $E[\exp(\lambda |X_{\tau_t} - X_{\tau_s}|)] \leq 2 \exp(\frac{\lambda^2}{2}(t-s))$. Le théorème de Kolmogorov implique que (X_{τ_t}) est continu; donc X_t est aussi continu. Par arrêt nous pouvons

supposer que X et A sont bornés. D'après la formule d'Ito,

$$Z_t^\lambda - 1 = \lambda \int_0^t Z_s^\lambda dX_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t Z_s^\lambda d(A_s - \langle X, X \rangle_s).$$

Ceci est une surmartingale et le reste si on divise par $\lambda > 0$. Faisant tendre λ vers 0, on en déduit que X est aussi une surmartingale. De même en prenant $\lambda < 0$, $-X$ est aussi une surmartingale, donc X est une martingale locale continue.

REMARQUE . Nous remercions P.A. Meyer d'avoir corrigé une version antérieure de ce lemme : en général le processus A n'est pas égal à $\langle X, X \rangle$. Pour s'en convaincre il suffit de prendre $X = 0 \dots$

Grâce au lemme 2 nous retrouvons un résultat de Meyer et Zheng :

THEOREME 6 . Soit (X^n) une suite de martingales locales continues avec $\langle X^n, X^n \rangle = A^n$. Si (A_1^n) est une suite de variables aléatoires uniformément bornée dans $L^0(P_n)$ et si P_n est la loi de (X^n, A^n) sur \mathbb{D}^2 , P_n est tendue sur \mathbb{D} . En outre si (X, A) désigne le processus canonique sur \mathbb{D}^2 et si P est une loi limite telle que A soit continu, alors X est une martingale locale continue sous P .

DEMONSTRATION . La suite P_n est tendue car (X^n, A^n) vérifie la condition (*) du théorème 2. Soit P une loi limite telle que A soit continue. Les processus $\exp(\lambda X^n - \frac{\lambda^2}{2} A^n)$ sont des surmartingales positives dont l'espérance est majorée par 1. On vérifie aisément qu'il en est de même pour $\exp(\lambda X - \frac{\lambda^2}{2} A)$ sous la loi P , si bien que X est une martingale locale continue sous P .

DEMONSTRATION DU THEOREME 5 . Toute la difficulté vient du fait que nous ignorons a priori si X est continue sous P . D'après le théorème 2 , la suite (P_n) est tendue et si P est une loi limite , X est une semimartingale sous P . En outre on vérifie aisément que $\{(j \cdot X)^*, j \in \mathcal{J}^2\}$ est uniformément borné dans $L^0(P_n)$ et même borné dans $L^0(P)$, si bien que X appartient à \mathcal{S} sous P si X est continue sous P . Or $[X, X] = X^2 - 2X_- \cdot X$; donc $\{(j^2 \cdot [X, X])_1, j \in \mathcal{J}^2\}$ est aussi uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Soit $X = M^n + A^n$ la décomposition canonique de la semimartingale continue X sous la loi P_n . Pour $j \in \mathcal{J}^2$, on pose $T_r^n = \inf \{t, (j^2 \cdot \langle M^n, M^n \rangle)_t \geq r\}$. Or

$$P_n [(j \cdot M^n)_1^* > c] \leq P_n [(j \cdot M^n)_{T_r^n}^* > c] + P_n [T_r^n < 1]$$

$$\leq \frac{r}{c^2} + P_n [T_r^n < 1]$$

en vertu de l'inégalité de Doob . Mais $P_n [T_r^n < 1]$ tend uniformément vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$ car $\{(j^2 \cdot [X, X])_1, j \in \mathcal{J}^2\}$ est uniformément borné dans $L^0(P_n)$. Donc $\{(j \cdot M^n)_1^*, j \in \mathcal{J}^2\}$ et par différence $\{(j \cdot A^n)_1^*, j \in \mathcal{J}^2\}$ sont aussi bornés uniformément dans $L^0(P_n)$. La continuité de X sous la loi P découle alors du lemme 1 et du théorème 6 , si bien que X appartient à \mathcal{S} , ce qu'il fallait démontrer .

REFERENCES

- [1] DELLACHERIE C. , MEYER P.A. : Probabilités et Potentiel , volumes A et B , Hermann , Paris .
- [2] MEYER P.A. , ZHENG W.A. : Tightness criteria for laws of semimartingales . A paraître dans Annales de l'I.H.P.
- [3] STRICKER C. : Quasimartingales , martingales locales , semimartingales et filtration naturelle . Z. W. 39 (1977) 55-64 .
- [4] STRICKER C. : Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales . Sém. Prob. IX , Lecture Notes in M. 465 , 408-419 , Springer , 1975 .
- [5] STRICKER C. : Une caractérisation des semimartingales . Sém. Prob. XVIII , Lecture Notes in M. 1059 , 148-153, Springer, 1984 .
- [6] STRICKER C. : Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation . Proceedings of the CNET ENST Colloquium , Lecture Notes in Control and Information Sciences 61 , 260-276 , Springer , 1984 .