

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NORIO KÔNO

## Démonstration probabiliste du théorème de d'Alembert

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 207-208

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__207_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION PROBABILISTE DU THEOREME DE d'ALEMBERT

par NORIO KONO

1. B. Davis [1] a donné une démonstration probabiliste du théorème de Picard utilisant les propriétés du mouvement brownien plan. Dans cet exposé nous donnons une démonstration très simple du théorème de d'Alembert utilisant la même idée que lui.

Théorème. - Quel que soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  (nombres complexes  $a_0 \neq 0$  et  $n \geq 1$ ) il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

2. Avant notre démonstration, nous rappelons les propriétés bien connues du mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{C}$  noté par  $b(t, \omega)$ ;  $0 \leq t < +\infty$ ,  $\omega \in \Omega$  avec  $b(0, \omega) = 0$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

(i) ([2], pp. 236-237)

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad P(\omega ; \exists t_n \uparrow +\infty, |b(t_n, \omega) - z_0| < \varepsilon) = 1.$$

(ii) (le théorème de P. Lévy, [3], pp. 108-109). Soit  $f(z)$  une fonction entière non constante. On pose

$$k(t, \omega) = \int_0^t |f'(b(s, \omega))|^2 ds.$$

On a alors

(a)  $k(t, \omega)$  est une fonction strictement croissante et  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t, \omega) = +\infty$  p.s.

(b)  $x(t, \omega) = f(b(k^{-1}(t, \omega)))$  est un nouveau mouvement brownien plan avec  $x(0, \omega) = f(0)$ , où  $k^{-1}$  est la <sup>fonction</sup> inverse de  $k$ .

3. Démonstration du théorème. Considérons un polynôme

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0 \text{ et } n \geq 1).$$

Évidemment on a

(iii)  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

Maintenant posons  $A(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}; |f(z)| \leq \varepsilon\}$  ( $\varepsilon > 0$ ). Alors  $A(\varepsilon)$  est un ensemble compact grâce à (iii) et non vide grâce à (i) et (ii). Si bien que  $z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} A(\varepsilon)$  <sup>résout</sup> l'équation  $f(z) = 0$ . Q.E.D. !

Nous désirons consacrer cet article pour les souvenirs de M. Takehiko Miyata, mon devancier.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.J.Davis. Picard's theorem and Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 213(1975), 353-362.
- [2] K.Ito-H.McKean. Diffusion processes and their sample paths, Springer,1965.
- [3] H.McKean. Stochastic integrals, Academic press,1969.

Institute of Mathematics  
Yoshida College  
Kyoto University  
Kyoto, Japan.