SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

Une généralisation des semimartingales : les processus admettant un processus à accroissements indépendants tangent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 91-118

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__91_0>

UNE GENERALISATION DES SEMIMARTINGALES : LES PROCESSUS ADMETTANT UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS TANGENT

Jean JACOD

1 - Introduction

La généralisation que nous proposons ci-dessous concerne les semimartingales quasi-continue à gauche; elle est motivée par les trois remarques suivantes:

1) Soit X une semimartingale (réelle) quasi-continue à gauche sur l'espace probabilisé filtré $\mathcal{B} = (\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$. On fixe une "fonction de troncation" h, i.e. une fonction bornée, à support compact, coïncidant avec l'identité au voisinage de l'origine; on suppose de plus h lipschitzienne. On appelle (B,C,ν) les caractéristiques locales (relatives à h) de X, qui sont constituées de:

(1.1) B, un processus continu prévisible à variation finie, $B_0 = 0$;

(1.2) C, un processus croissant continu prévisible, $C_0 = 0$;

(1.3) ν, une mesure aléatoire prévisible sur $R_+ \times R$, vérifiant identiquement $\nu(\omega;\{t\}\times R) = 0$, $\nu(\omega; R_+ \times \{0\}) = 0$, et intégrant les fonctions $(s,x) \rightsquigarrow (x^2 \wedge 1) 1_{[0,t]}(s)$.

Ce triplet (B,C,ν) est caractérisé par la propriété suivante: pour tout $u \in R$, le processus

$$(1.4) \qquad A(u)_t = iuB_t - \frac{u^2}{2} C_t + \int_0^t \int_R (e^{iux} - 1 - iuh(x))\, \nu(ds \times dx)$$

est l'unique processus prévisible à variation finie nul en 0, vérifiant:

$$(1.5) \qquad \frac{e^{iuX}}{G(u)} \text{ est une martingale locale, où } G(u) = e^{A(u)} .$$

Noter qu'ici $A(u)$ est continu. On verra plus loin une autre caractérisation équivalente, mais plus classique, de (B,C,ν). Rappelons que B dépend de la fonction de troncation h choisie, mais C et ν n'en dépendent pas.

Rappelons que, pour que X soit en plus un PAI (processus à accroissements indépendants), il faut et il suffit que B,C,ν soient "déterministes", et on a alors

$$(1.6) \qquad G(u)_t = E(e^{iuX_t}) ,$$

ce qui caractérise la loi du processus X .

Revenons aux semimartingales. La notion de caractéristiques locales a été introduite dans un cas particulier par Ito, pour construire un PAI "tangent" à X , dans le sens un peu vague suivant: Soit $D = D([0,\infty],R)$ l'espace de Skorokhod et Y le processus canonique sur D, i.e. $Y_t(y) = y(t)$. Pour chaque $\omega \in \Omega$, les termes $B_.(\omega)$, $C_.(\omega)$, $\nu(\omega;.)$ sont les caractéristiques d'un PAI sans discontinuités fixes et il existe donc une probabilité de transition $Q(\omega,dy)$ de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(D,\underline{\underline{D}})$, où $\underline{\underline{D}}$ est la tribu borélienne de D, telle que

$$(1.7)\begin{cases} \forall\omega \text{ , le processus } Y \text{ est, pour la loi } Q(\omega,.)\text{, un PAI caracté-} \\ \text{risé par: } \quad \int Q(\omega,dy)e^{iuy(t)} = G(u)_t(\omega) . \end{cases}$$

Il est évidemment tentant de donner un sens plus précis à la notion de "PAI tangent" à X .

2)Si X est un PAI càdlàg sans discontinuité fixe, ce n'est pas nécessairement une semimartingale. Toutefois on peut lui associer des caractéristiques (B,C,ν) qui sont déterministes, avec C et ν vérifiant (1.2) et (1.3) et avec B fonction continue nulle en 0 , tels que si $A(u)$ est encore défini par (1.4) on ait (1.5) et (1.6). Il est alors classique (et facile à montrer) que:

$$(1.8)\begin{cases} X - B \text{ est un PAI-semimartingale} \\ X \text{ est une semimartingale} \iff B \text{ est à variation finie.} \end{cases}$$

Là encore, il est tentant de disposer d'une notion qui englobe les semimartingales <u>et</u> les PAI.

3) Dans les théorèmes-limite pour les processus, développés récemment ([2],[5],[6] par exemple) on a des critères de convergence qui utilisent les caractéristiques locales: si on examine les démonstrations on voit que les propriétés (1.2) et (1.3) sont essentielles, alors que (1.1) ne joue aucun rôle. Par contre (1.5) est aussi utilisé; on aimerait donc avoir une classe de processus pour lesquels on puisse définir des "caractéristiques" (B,C,ν) vérifiant (1.2), (1.3), (1.5), mais pas (1.1) (B étant simplement un processus continu prévisible).

Voici comment on peut essayer de résoudre le problème posé dans la remarque 1). Considérons une suite $\underline{\underline{T}} = (\tau^n)$ de subdivisions de R_+ telle que

$$(1.9)\begin{cases} \text{si } \tau^n = \{0=t_0^n < t_1^n < \dots\}, \quad \text{on a: } \lim_{(p)}\uparrow t_p^n = \infty \quad \text{et} \\ |\tau^n| := \sup_{(p)} (t_{p+1}^n - t_p^n) \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Soit X un processus càdlàg adapté. On pose

(1.10) $\rho_j^{X,n}(\omega,dx)$ = version régulière de la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n}/\underline{\underline{F}}_{t_j^n})$,

et

(1.11) $\zeta^{X,n}(\omega,dy)$ est l'unique probabilité sur $(D,\underline{\underline{D}})$ faisant du processus canonique Y un PAI tel que
i) $Y_0=0$ p.s., Y est p.s. constant sur les intervalles $[t_j^n,t_{j+1}^n[$
ii) pour tout $j \geq 0$, la loi de $\Delta Y_{t_{j+1}^n}$ est $\rho_j^{X,n}(\omega,.)$.

Ainsi pour $\zeta^{X,n}(\omega,.)$ le PAI Y est une sorte "d'approximation discrète en loi" de la trajectoire $X_{.}(\omega)$, au sens où les accroissements $Y_{t_{j+1}^n} - Y_{t_j^n}$ et $X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n}$ ont même loi, conditionnellement par rapport à $\underline{\underline{F}}_{t_j^n}$.

On peut considérer $\zeta^{X,n}$ comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace polonais $\mathcal{P}(D)$ des probabilités sur $(D,\underline{\underline{D}})$ muni de la convergence étroite, D étant muni de la topologie de Skorokhod.

(1.12) DEFINITION : a) On dit que le processus X <u>admet un PAI tangent le long de</u> $\underline{\underline{T}}$, si la suite $(\zeta^{X,n})$ converge en probabilité dans $\mathcal{P}(D)$ vers une limite ζ^X, et si $\zeta^X(\omega,.)$ fait de Y un processus (nécessairement un PAI) sans discontinuité fixe. On note $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ l'ensemble des processus X ayant cette propriété.

b) On dit que le processus X <u>admet un PAI tangent</u> si, pour toute suite $\underline{\underline{T}}$ de subdivisions vérifiant (1.9), on a $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$. On note $\underline{\underline{S}}_g$ l'ensemble de ces processus.∎

Les résultats principaux sont les suivants:

(1.13) THEOREME : a) <u>Si</u> X <u>est un PAI sans discontinuité fixe, il est dans</u> $\underline{\underline{S}}_g$ <u>et</u> $\zeta^X(\omega,.)$ <u>égale p.s. la loi de</u> X.

b) <u>Si</u> X <u>est une semimartingale quasi-continue à gauche, il est dans</u> $\underline{\underline{S}}_g$ <u>et</u> $\zeta^X(\omega,.)$ <u>égale p.s. la mesure</u> $Q(\omega,.)$

définie en (1.7).

La notion de PAI tangent est donc bien une précision de ce qui a été dit à la fin de la remarque 1), et résoud le problème posé en 2).

Afin de caractériser les éléments de $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ par une propriété plus commode que la définition (1.12), on pose:

(1.14) DEFINITION : a) On note $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{T}})$ l'ensemble des processus B continus prévisibles bornés, nuls en 0, qui vérifient pour tout $t>0$:

i) $\sup_{s\leq t} \left| \sum_{j:t^n_{j+1}\leq s} E(B_{t^n_{j+1}} - B_{t^n_j}|\underline{\underline{F}}_{t^n_j}) - B_s \right| \xrightarrow{P} 0$

ii) $\sum_{j:t^n_{j+1}\leq t} \left\{E\left[(B_{t^n_{j+1}} - B_{t^n_j})^2|\underline{\underline{F}}_{t^n_j}\right] - E(B_{t^n_{j+1}} - B_{t^n_j}|\underline{\underline{F}}_{t^n_j})^2\right\} \xrightarrow{P} 0$

b) On note $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ la classe localisée de $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{T}})$ par les temps d'arrêt.

(1.15) THEOREME : a) $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ et $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ sont des espaces vectoriels.

b) Les éléments de $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ sont les sommes d'une semimartingale quasi-continue à gauche et d'un processus de $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$.

c) Pour qu'un processus X càdlàg adapté soit dans $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ il faut et il suffit qu'il existe un triplet (B,C,ν) avec $B\in\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$, C vérifiant (1.2) et ν vérifiant (1.3), tels qu'on ait (1.5) avec $A(u)$ défini par (1.4); dans ce cas, on a:

(i) $(B(\omega),C(\omega),\nu(\omega))$ sont les caractéristiques du PAI Y sous la loi $\mathfrak{Z}^X(\omega,.)$;

(ii) $X-B$ est une semimartingale de caractéristiques locales $(0,C,\nu)$ et X est quasi-continu à gauche;

(iii) X est une semimartingale si et seulement si B est à variation finie;

(iv) le triplet (B,C,ν) est p.s. unique.

d) L'espace $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ contient:

(i) les processus continus prévisibles à variation finie nuls en 0;

(ii) les processus "déterministes" continus nuls en 0.

L'assertion c) ci-dessus permet donc d'obtenir des théorèmes-limite pour les suites de processus de $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$, exactement dans les mêmes termes que pour les suites de semimartingales dans [2] ou [5].

(1.16) REMARQUES : 1) Nous ne savons pas si les espaces $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ sont tous égaux entre eux lorsque $\underline{\underline{T}}$ varie en vérifiant (1.9); cela équivaudrait d'ailleurs à ce que les espaces $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ soient tous égaux.

Toutefois si $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}}) \bigcap \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}}')$ il est évident que le triplet (B,C,ν) défini en (c) ci-dessus est le même pour $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$. Il est alors naturel d'appeler (B,C,ν) les caractéristiques locales de X.

Noter aussi que, à l'instar de ce qui se passe pour les semimartingales, les termes C et ν ne dépendent pas de la fonction de troncation h choisie pour définir $A(u)$, mais B en dépend.

2) La seule martingale locale appartenant à $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ est la martingale nulle.

3) Il devrait être possible de montrer le même genre de résultats en levant l'hypothèse de quasi-continuité à gauche sur X (et corrélativement la condition d'absence de discontinuité fixe pour ζ^X dans (1.12)). Mais la méthode utilisée ci-dessous ne permet absolument pas une telle extension.

2 - Quelques préliminaires

§a - Convergence de PAI. Rappelons d'abord un résultat de convergence tiré de [4]. Soit Q^n, Q des lois sur $(D,\underline{\underline{D}})$ faisant de Y un PAI de caractéristiques (B^n,C^n,ν^n) et (B,C,ν). Supposons que pour Q, Y n'ait pas de discontinuité fixe. Il peut y en avoir pour Q^n, donc il se peut que $\nu^n(\{t\}\times R_+)>0$ pour certaines valeurs de t (exactement les temps de discontinuités fixes); mais on suppose toujours que ν^n intègre les fonctions $(x^2 \wedge 1)1_{[0,t]}(s)$. On utilise la notation:

$$(2.1) \qquad W*\nu_t(\omega) = \int_0^t \int_R W(\omega,s,x)\,\nu(ds\times dx)$$

si l'intégrale a un sens (on utilisera la même notation pour ν^n, ou si ν est une mesure aléatoire). Soit les fonctions:

$$(2.2) \qquad \tilde{C}_t = C_t + h^2*\nu_t\,, \qquad \tilde{C}^n_t = C^n_t + h^2*\nu^n_t - \sum_{s\leq t} (\Delta B^n_s)^2$$

(comme $\Delta B^n_s = \int_R \nu^n(\{s\}\times dx)h(x)$ et comme ν^n intègre $x^2 \wedge 1$, la série $\sum_{s\leq t}(\Delta B^n_s)^2$ est convergente; noter que l'absence de discontinuité fixe pour Q entraine que ν vérifie (1.3) et B est continue, donc les expressions pour $\tilde{C}$ et $\tilde{C}^n$ sont en fait analogues).

Soit aussi $\mathcal{X}$ une suite de fonctions positives, totale pour la convergence uniforme dans l'espace des fonctions bornées, nulles autour de 0, lipschitziennes de rapport 1. On a alors la condition nécessaire et suffisante suivante:

(2.3) Pour que $Q^n \longrightarrow Q$ étroitement, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} B^n \longrightarrow B \text{ uniformément sur les compacts;} \\ \tilde{C}^n_t \longrightarrow \tilde{C}_t \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+ \\ f*\nu^n_t \longrightarrow f*\nu_t \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+ , \ \forall f \in \mathcal{Z} ; \end{cases}$$

dans ce cas, on a $\tilde{C}^n \longrightarrow \tilde{C}$ et $f*\nu^n \longrightarrow f*\nu$ uniformément sur les compacts, pour toute fonction f continue bornée nulle autour de 0.

Soit ensuite X un processus càdlàg adapté. La suite $\underline{\underline{T}}$ de subdivisions étant fixée une fois pour toutes, on utilise les notations:

$$J^n_t = \{j \geq 0 : t^n_{j+1} \leq t\}$$

$$\Delta^n_j X = X_{t^n_{j+1}} - X_{t^n_j}$$

$$E^n_j(.) = E(.|\underline{\underline{F}}_{t^n_j})$$

$$Z^n \xrightarrow{P-u} Z \quad \text{si on a} \quad \sup_{s \leq t} |Z^n_s - Z_s| \xrightarrow{P} 0 \quad \forall t \geq 0 .$$

Un calcul simple montre que les caractéristiques $(B^{X,n}(\omega), C^{X,n}(\omega), \nu^{X,n}(\omega))$ du PAI Y pour $\mathcal{Y}^{X,n}(\omega,.)$ sont

$$(2.4) \begin{cases} B^{X,n}_t(\omega) = \sum_{j \in J^n_t} \rho^{X,n}_j(\omega,h) = \sum_{j \in J^n_t} E^n_j[h(\Delta^n_j X)] \\ C^{X,n}_t(\omega) = 0 \\ f*\nu^{X,n}_t(\omega) = \sum_{j \in J^n_t} \rho^{X,n}_j(\omega,f) = \sum_{j \in J^n_t} E^n_j[f(\Delta^n_j X)] , \end{cases}$$

de sorte que d'après (2.2) on a

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \tilde{C}^{X,n}_t &= \sum_{j \in J^n_t} [\rho^{X,n}_j(h^2) - \rho^{X,n}_j(h)^2] \\ &= \sum_{j \in J^n_t} \{E^n_j[h^2(\Delta^n_j X)] - E^n_j[h(\Delta^n_j X)]^2\} . \end{aligned}$$

Introduisons alors les conditions suivantes sur X :

<u>Condition (B)</u>: $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} B^X$, où B^X est continu prévisible, nul en 0.

<u>Condition (C)</u>: $\tilde{C}^{X,n}_t \xrightarrow{P} \tilde{C}^X_t \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+$, où $\tilde{C}^X$ est croissant continu prévisible nul en 0.

<u>Condition (D)</u>: $f*\nu^{X,n}_t \xrightarrow{P} f*\nu^X_t \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+, \forall f \in \mathcal{Z}$, où ν^X est une mesure aléatoire prévisible positive vérifiant $\nu^X(\omega;\{t\}\times R) = 0$, $\nu^X(\omega;R_+\times\{0\}) = 0$, $\nu^X(\omega;[0,t]\times\{|x|>\varepsilon\}) < \infty$ pour tous $\varepsilon>0, t>0$.

Lorsqu'on veut mettre l'accent sur la fonction de troncation, on écrit $B^{h,X,n}$ et $\tilde{C}^{h,X,n}$ (resp. $B^{h,X}$ et $\tilde{C}^{h,X}$). Remarquer que si h et h' sont deux fonctions de troncation, on a:

$$(2.6)\begin{cases} B^{h',X,n} = B^{h,X,n} + (h'-h)*\nu^{X,n} \\ \tilde{C}^{h',X,n} = \tilde{C}^{h,X,n} + (h'^2 - h^2)*\nu^{X,n} - \sum_{s\leq \cdot}[(\Delta B_s^{h',X,n})^2-(\Delta B_s^{h,X,n})^2] \end{cases}$$

On écrit aussi (B_h) et (C_h) pour les conditions (B) et (C) relatives à la fonction h .

(2.7) LEMME : a) Sous la condition (D), on a

$$(2.8)\qquad \sup_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|x|>\varepsilon) \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall \varepsilon>0,\ \forall t\geq 0 .$$

b) Sous (2.8) on a: $\sup_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(f) \xrightarrow{P} 0$ pour tout t et toute fonction bornée f, continue en 0 et nulle en 0.

Démonstration. a) Soit $g_b(x) = 1 \wedge (\frac{2}{b}|x| - 1)^+$, qui est lipschitzienne bornée positive, nulle si $|x|\leq b/2$, égale à 1 si $|x|\geq b$. En utilisant des sous-suites extraites par un procédé diagonal, on vérifie aisément que

$$(2.9)\qquad (D) \Longleftrightarrow f*\nu^{X,n} \xrightarrow{P-u} f*\nu^X , \ \forall f \text{ continue bornée nulle autour de } 0 .$$

En particulier $g_\varepsilon*\nu^{X,n} \xrightarrow{P-u} g_\varepsilon*\nu^X$; le résultat découle alors de la continuité de $g_\varepsilon*\nu^X$, et du fait que

$$\sup_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|x|>\varepsilon) \leq \sup_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(g_\varepsilon) = \sup_{s\leq t} \Delta(g_\varepsilon*\nu^{X,n})_s .$$

b) découle immédiatement de (2.8). ∎

(2.10) LEMME : Supposons qu'on ait (D), et soit h et h' deux fonctions de troncation continues. Alors

(i) $(B_h) \Longrightarrow (B_{h'})$ et $B^{h',X} = B^{h,X} + (h'-h)*\nu^X$.

(ii) $(C_h) \Longrightarrow (C_{h'})$ et $\tilde{C}^{h',X} = \tilde{C}^{h,X} + (h'^2 - h^2)*\nu^X$.

(iii) Si $(x^2\wedge 1)*\nu_t^X < \infty$ pour tout t et si on a (C_h), le processus $C^X = \tilde{C}^{h,X} - h^2*\nu^X$ ne dépend pas de h et est croissant continu.

Démonstration. (i) découle immédiatement de (2.6) et (2.9); cette dernière assertion entraine aussi que

$$(2.11)\qquad \sum_{j\in J_t^n} [\rho_j^{X,n}(h'^2) - \rho_j^{X,n}(h^2)] \xrightarrow{P-u} (h'^2 - h^2)*\nu^X .$$

Soit

$$Z_t^n = \sum_{j\in J_t^n}[\rho_j^{X,n}(h')^2 - \rho_j^{X,n}(h)^2] = \sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(h-h')\, \rho_j^{X,n}(h+h')$$

d'où

$$|Z_t^n| \leq \{\sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|h-h'|)\}\, \{\sup_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|h+h'|)\}.$$

D'après (2.9), on a $\sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|h-h'|) \xrightarrow{P} |h-h'|*\nu_t^X$, tandis que d'après (2.7,b) on a $\sup_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|h+h'|) \xrightarrow{P} 0$. Par suite $Z_t^n \xrightarrow{P} 0$. Etant donné (2.11), on en déduit immédiatement (ii).

(iii) Soit (C_h) et $(x^2\wedge 1)*\nu_t^X < \infty$. D'après (ii) on a $(C_{h'})$ et le processus C^X ne dépend pas de la fonction de troncation. De plus $\tilde{C}^{h',X,n}$, donc aussi $\tilde{C}^{h',X}$, sont croissants pour toute fonction de troncation h': donc si $h_\varepsilon(x) = \varepsilon\, h(x/\varepsilon)$ et si $|h(x)|\leq |x|\wedge 1$ on a $h_\varepsilon^2 * \nu^X \leq x^2\, 1_{\{|x|\leq\varepsilon\}}*\nu_t^X$, qui tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$. Par suite $C^X = \lim_{\varepsilon\to 0}[\tilde{C}^{h_\varepsilon,X} - h_\varepsilon^2*\nu^X]$ est croissant. ∎

(2.12) COROLLAIRE : <u>Pour que</u> $X\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ <u>il faut et il suffit qu'on ait les conditions (B), (C), (D), ainsi que</u>

(2.13) $$(x^2\wedge 1)*\nu_t^X < \infty \qquad \text{p.s.} \quad \forall t\geq 0 .$$

<u>Dans ce cas, les caractéristiques du PAI</u> Y <u>sous</u> $\zeta^X(\omega,.)$ <u>sont</u> $(B^X(\omega),C^X(\omega),\nu^X(\omega))$, <u>avec</u> $C^X = \tilde{C}^X - h^2*\nu^X$.

<u>Démonstration</u>. La condition nécessaire et la dernière assertion découlent immédiatement de (2.3). Supposons inversement (B), (C), (D) et (2.13). D'après le lemme précédent, le processus C^X est croissant continu, et il existe donc une probabilité de transition $\zeta^X(\omega,.)$ faisant pour chaque ω, du processus canonique Y, un PAI de caractéristiques $(B^X(\omega),C^X(\omega),\nu^X(\omega))$. Pour toute suite (n_k) on peut extraire une sous-suite (n_{k_1}) telle que dans (B), (C), (D) il y ait convergence le long de cette sous-suite, identiquement en dehors d'un ensemble négligeable N. D'après (2.3) on a $\zeta^{X,n_{k_1}}(\omega,.)\longrightarrow \zeta^X(\omega,.)$ étroitement en dehors de N. Par suite, $\zeta^{X,n} \xrightarrow{P} \zeta^X$. ∎

<u>§b - Les laplaciens approchés</u>. L'ingrédient essentiel permettant d'obtenir, notamment, le théorème (1.13,b), est la version élémentaire suivante de la "formule des laplaciens approchés".

(2.14) LEMME : <u>Soit</u> A <u>un processus continu nul en</u> 0, <u>à variation finie, avec</u> $E[\mathrm{Var}(A)_t] < \infty$ <u>pour tout</u> t. <u>Soit</u> $A_t^n = \sum_{j\in J_t^n} E_j^n(\Delta_j^n A)$. <u>Alors</u>

(i) $A^n \xrightarrow{P-u} A$.

(ii) $\sum_{s\leq t}[\Delta A^n_s]^2 \;=\; \sum_{j\in J^n_t}[E^n_j(\Delta^n_j A)]^2 \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t\geq 0$.

(iii) $\sup_{s\leq t}|\Delta A^n_s| \;=\; \sup_{j\in J^n_t}|E^n_j(\Delta^n_j A)| \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t\geq 0$.

Démonstration. Quitte à remplacer A par la différence de deux processus croissants continus localement intégrables, on peut supposer A croissant, donc les A^n également. Il est clair que dans ce cas, (i) $\Longrightarrow$ (iii) et que

$$E(\textstyle\sum_{s\leq t}\Delta A^n_s) \;=\; E(A^n_t) \;\leq\; E(A_t) \;<+\infty,$$

donc (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Comme A^n et A sont croissants, il suffit pour obtenir (i) de montrer que

(2.15) $$A^{n-}_t \xrightarrow{P} A_t \qquad \forall t\geq 0 .$$

Soit $j_n = \sup(j:\ j\in J^n_t)$ et $a^n = E(A_t - A_{t^n_{j_n}}|\underline{F}_{t^n_{j_n}})$; soit $A'^n_t = A^n_{t^n_{j_n}} + a^n$. D'après les laplaciens approchés ([1],[7]) on a $A'^n_t \xrightarrow{P} A_t$. Par ailleurs, $E(a^n) = E(A_t - A_{t^n_{j_n}}) \longrightarrow 0$ car A est continu, donc $a^n \xrightarrow{P} 0$. Comme $A^n_t = A^{n\ \ \,n}_{t^n_{j_n}} = A'^n_t - a^n$ on obtient (2.15). ∎

Noter que ce résultat est en général faux lorsque A est prévisible discontinu: dans ce cas on obtient seulement: $A^n_t \longrightarrow A_t$ pour la topologie faible $\sigma(L^1,L^\infty)$; c'est la raison pour laquelle la méthode ci-dessous ne s'applique qu'aux processus quasi-continus à gauche.

§c - Lemmes de localisation.

(2.16) LEMME : Soit X un processus càdlàg adapté et T un temps d'arrêt. Soit

$$\gamma^{X,n}_{j,T} \;=\; E^n_j(1_{\{t^n_j<T\leq t^n_{j+1}\}}|X_{t^n_{j+1}} - X_T|\wedge 1)$$

$$\tilde\gamma^{X,n}_{j,T} \;=\; E^n_j(1_{\{t^n_j<T\leq t^n_{j+1}\}}|X_{T-} - X_{t^n_j}|\wedge 1) .$$

Alors $\sum_{j\in J^n_t}\{\gamma^{X,n}_{j,T} + \tilde\gamma^{X,n}_{j,T}\} \xrightarrow{P} 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Soit $T_0=0$, $T_{p+1} = \inf(t>T_p:\ |\Delta X_t|\geq\varepsilon/2)$ et $X'_t = X_t - \sum_{s\leq t}\Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|\geq\varepsilon/2\}}$. Soit aussi pour $\eta>0$:

$$S_\eta \;=\; \inf(s:\ \sup_{(s-\eta)^+\leq r\leq s}|X'_r - X'_s|>\varepsilon) .$$

Comme $|\Delta X'|<\varepsilon/2$, on a $\lim_{\eta\downarrow 0} S_\eta = \infty$, et S_η est un temps d'arrêt. Il existe donc $q\in\mathbb{N}^*$ et $\eta>0$ tels que, pour t fixé,

(2.17) $$P(T_q\wedge S_\eta\leq t) \;\leq\; \varepsilon .$$

Soit alors $N^p = 1_{[\![T_p,\infty[\![}$ et $N = 1_{[\![T,\infty[\![}$. Supposons que $|\tau^n| < \eta$. On a alors, sur l'ensemble $\{t_j^n < T \leq t_{j+1}^n\}$:

$$|X_{t_{j+1}^n} - X_T| \wedge 1 \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{si } S_\eta > t_{j+1}^n,\ t_{j+1}^n < T_q,\ T_p \notin]T, t_{j+1}^n] \text{ pour } p \leq q-1 \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$|X_{T-} - X_{t_j^n}| \wedge 1 \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{si } S_\eta > t_{j+1}^n,\ t_{j+1}^n < T_q,\ T_p \notin]t_j^n, T[\text{ pour } p \leq q-1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite, si $|\tau^n| \leq \eta$ on a:

$$\begin{aligned}
&E\{1_{\{T_q \wedge S_\eta > t\}} \textstyle\sum_{j \in J_t^n} (\gamma_{j,T}^{X,n} + \tilde{\gamma}_{j,T}^{X,n})\} \\
&\leq E\{\textstyle\sum_{j \in J_t^n} 1_{\{t_j^n < T \leq t_{j+1}^n\} \cap \{S_\eta \wedge T_q > t_j^n\}} [|X_{t_{j+1}^n} - X_T| \wedge 1 + |X_{T-} - X_{t_j^n}| \wedge 1]\} \\
&\leq \textstyle\sum_{j \in J_t^n} \{2\varepsilon P(t_j^n < T \leq t_{j+1}^n) + \sum_{p=1}^{q-1} P(t_j^n < T < T_p \leq t_{j+1}^n, \text{ ou } t_j^n < T_p < T \leq t_{j+1}^n)\} \\
&\leq 2\varepsilon + \textstyle\sum_{p=1}^{q-1} \{P(T < T_p \leq T + |\tau^n|) + P(T_p < T \leq T_p + |\tau^n|)\} \\
&\leq 2\varepsilon + \textstyle\sum_{p=1}^{q-1} \{E(N_{T+|\tau^n|}^p - N_T^p) + E(N_{T_p+|\tau^n|} - N_{T_p})\}.
\end{aligned}$$

Comme $|\tau^n| \to 0$, pour tout n assez grand on a $E(N_{T+|\tau^n|}^p - N_T^p) \leq \frac{\varepsilon}{q-1}$ et $E(N_{T_p+|\tau^n|} - N_{T_p}) \leq \frac{\varepsilon}{q-1}$ pour tout $p \leq q-1$ (car N^p et N sont bornés par 1 et càd). Donc pour n assez grand on a

$$E[1_{\{T_q \wedge S_\eta > t\}} \textstyle\sum_{j \in J_t^n} (\gamma_{j,T}^{X,n} + \tilde{\gamma}_{j,T}^{X,n})] \leq 4\varepsilon .$$

Etant donné (2.17) et le caractère arbitraire de $\varepsilon > 0$, on obtient le résultat. ∎

Si T est un temps d'arrêt, on note X^T le processus X arrêté en T, et ν^T la mesure ν arrêtée en T. On dit qu'<u>une propriété $\mathcal{P}$ est locale</u> si:

(2.18)
- i) X vérifie $\mathcal{P}$, T temps d'arrêt $\Longrightarrow$ X^T vérifie $\mathcal{P}$
- ii) X^{T_p} vérifie $\mathcal{P}$, où les T_p sont des temps d'arrêt croissant vers $+\infty$ $\Longrightarrow$ X vérifie $\mathcal{P}$.

(2.19) LEMME : <u>La propriété (2.8) est locale</u>.

<u>Démonstration</u>. a) Soit X vérifiant (2.8) et T un temps d'arrêt. On a:

$$|\Delta_j^n(X^T)| \leq \begin{cases} 0 & \text{si } T \leq t_j^n \\ |\Delta_j^n X| & \text{si } T > t_{j+1}^n \\ |\Delta_j^n X| + |X_{t_{j+1}^n} - X_T| & \text{si } t_j^n < T \leq t_{j+1}^n , \end{cases}$$

de sorte que si $\varepsilon < 2$ on a

$$\rho_j^{X^T,n}(|x|>\varepsilon) \leq \rho_j^{X,n}(|x|>\tfrac{\varepsilon}{2}) + \tfrac{2}{\varepsilon}\,\gamma_{j,T}^{X,n} .$$

D'après (2.16), X^T vérifie donc (2.8).

b) Inversement, soit (T_p) des temps d'arrêt croissant vers $+\infty$, tels que chaque X^{T_p} vérifie (2.8). On a

$$|\Delta_j^n X| \leq \begin{cases} |\Delta_j^n(X^{T_p})| & \text{si} \quad T_p > t_{j+1}^n \\ |\Delta_j^n(X^{T_p})| + |X_{t_{j+1}^n} - X_{T_p}| & \text{si} \quad t_j^n < T_p \leq t_{j+1}^n , \end{cases}$$

de sorte que si $\varepsilon < 2$, $j \in J_t^n$, on a

$$\rho_j^{X,n}(|x|>\varepsilon) \leq 1_{\{T_p \leq t\}} + \rho_j^{X^{T_p},n}(|x|>\tfrac{\varepsilon}{2}) + \tfrac{2}{\varepsilon}\,\gamma_{j,T_p}^{X,n} .$$

On choisit d'abord p grand, puis on utilise (2.16) pour X et l'hypothèse, pour en déduire que X vérifie (2.8).∎

(2.20) LEMME : <u>Les propriétés suivantes sont locales</u>:

(i) <u>(B) plus (2.8)</u> (alors $B^{X^T} = (B^X)^T$)

(ii) <u>(C) plus (2.8)</u> (alors $\tilde{C}^{X^T} = (\tilde{C}^X)^T$)

(iii) <u>(D)</u> (alors $\nu^{X^T} = (\nu^X)^T$)

(iv) $\sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(f) \xrightarrow{P-u} A$, <u>plus (2.8), où</u> f <u>est une fonction donnée de</u> $\mathcal{X}$ <u>et</u> A <u>un processus</u>.

<u>Démonstration</u>. a) Commençons par un résultat intermédiaire très simple. Soit (T_p) des temps d'arrêt croissant vers $+\infty$. Soit, pour chaque $p \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ des processus de la forme

$$A^n(p)_t = \sum_{j\in J_t^n} a_j^n(p) ,$$

et considérons les conditions

(A) $A^n(\infty) \xrightarrow{P-u} A(\infty)$ pour un processus $A(\infty)$;

(A_{loc}) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^n(p) \xrightarrow{P-u} A(p)$ pour des processus $A(p)$;

(*) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_t^n(p) = \sum_{j\in J_t^n} |a_j^n(\infty) 1_{\{t_{j+1}^n \leq T_p\}} - a_j^n(p)| \xrightarrow{P} 0$.

On a alors:

(2.21) Sous (*), $(A) \Longleftrightarrow (A_{loc})$, et alors $A(p) = A(\infty)^{T_p}$.

En effet, (A) équivaut à dire que $A^n(\infty)^{T_p} \xrightarrow{P-u} A(\infty)^{T_p}$ pour tout p, et $A^n(\infty)_t^{T_p} = \sum_{j\in J_t^n} a_j^n(\infty) 1_{\{t_{j+1}^n \leq T_p\}}$, donc $\sup_{s\leq t} |A^n(\infty)_s^{T_p} - A^n(p)_s| \leq \alpha_t^n(p)$.

b) Montrons le lemme. Soit (T_p) comme ci-dessus, et X un processus vérifiant (2.8), ce qui d'après (2.19) équivaut à dire que chaque X^{T_p} vérifie (2.8) (lorsqu'on veut démontrer (iii), on utilise donc le lemme (2.7)). Soit

$$\alpha_j^{np}(f) = E_j^n[1_{\{t_j^n < T_p \leq t_{j+1}^n\}} \{f(X_{T_p} - X_{t_j^n}) - f(X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n})\}],$$

donc si $f(0)=0$,

$$(2.22) \qquad \rho_j^{X^{T_p},n}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } T_p \leq t_j^n \\ \rho_j^{X,n}(f) + \alpha_j^{np}(f) & \text{si } T_p > t_j^n . \end{cases}$$

Pour montrer (i), on applique (2.21) à $a_j^n(p) = \rho_j^{X^{T_p},n}(h)$ et $a_j^n(\infty) = \rho_j^{X,n}(h)$. Il vient, h étant lipschitzienne de coefficient θ et d'après (2.22):

$$\alpha_t^n(p) = \sum_{j \in J_t^n} |-\rho_j^{X,n}(h) 1_{\{t_j^n < T_p < t_{j+1}^n\}} - \alpha_j^{np}(h)|$$
$$\leq \delta_t^n + \theta \sum_{j \in J_t^n} \gamma_{j,T_p}^{X,n} ,$$

où $\delta_t^n = \sup_{j \in J_t^n} |\rho_j^{X,n}(h)|$. Alors (*) découle de (2-7,b) et de (2.16). Pour montrer (iv) on fait la même chose en remplaçant h par une fonction quelconque f de $\mathcal{X}$, et (iii) découle de (iv) appliqué à toutes les fonctions de $\mathcal{X}$.

Enfin pour (ii) on applique (2.21) à $a_j^n(p) = \rho_j^{X^{T_p},n}(h^2) - \rho_j^{X^{T_p},n}(h)^2$ et à $a_j^n(\infty) = \rho_j^{X,n}(h^2) - \rho_j^{X,n}(h)^2$. Comme h^2 est lipschitzienne de coefficient θ' et comme $|h| \leq \theta''$, on a

$$\alpha_t^n(p) = \sum_{j \in J_t^n} |-\rho_j^{X,n}(h^2) 1_{\{t_j^n < T_p < t_{j+1}^n\}} - \alpha_j^{np}(h^2) + 2\alpha_j^{np}(h)\rho_j^{X,n}(h)$$
$$- \rho_j^{X,n}(h)^2 \, 1_{\{t_j^n < T_p < t_{j+1}^n\}} + \alpha_j^{np}(h)^2 |$$
$$\leq \delta_t^n + (\theta' + 4\theta\theta'') \sum_{j \in J_t^n} \gamma_{j,T_p}^{X,n} ,$$

où $\delta_t^n = \sup_{j \in J_t^n} (\rho_j^{X,n}(h^2) + \rho_j^{X,n}(h)^2)$. Alors (*) découle de (2.7,b) et de (2.16) à nouveau.■

La propriété (2.13) étant également locale, il découle de (2.12) que

(2.23) COROLLAIRE : <u>L'appartenance à $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ est une propriété locale. Si</u> $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ <u>on a</u> $(B^{X^T}, C^{X^T}, \nu^{X^T}) = ((B^X)^T, (C^X)^T, (\nu^X)^T)$ <u>pour tout temps d'arrêt</u> T .

§d - Caractérisation des processus vérifiant la condition (D). Rappelons d'après [3] qu'on associe à tout processus càdlàg adapté X une mesure aléatoire prévisible positive ν (appelée mesure de Lévy de X) vérifiant

(2.24) $\nu(\omega;R_+\times\{0\}) = 0$, $\nu(\omega;\{t\}\times R)\leq 1$, $\nu(\omega;[0,t]\times\{|x|>\varepsilon\}) < \infty$

et caractérisée par la propriété

(2.25) $\sum_{s\leq t} f(\Delta X_s) - f*\nu_t$ est une martihgale locale pour $f\in\mathcal{Z}$.

De plus, X est quasi-continu à gauche si et seulement s'il existe une version de ν qui vérifie identiquement

(2.26) $$\nu(\omega;\{t\}\times R) = 0$$

(lorsque X est une semimartingale, ν est la troisième caractéristique locale de X). On va démontrer la

(2.27) PROPOSITION : Pour qu'un processus càdlàq adapté X vérifie (D), il faut et il suffit qu'il soit quasi-continu à gauche; dans ce cas, ν^X est la mesure de Lévy de X.

Commençons par un lemme, qui sera utilisé plusieurs fois.

(2.28) LEMME : On a $\sum_{j\in J_t^n} \beta_j^n \xrightarrow{P} 0$ dans les deux cas suivants:

a) $\beta_j^n = \rho_j^{X,n}(f) - E_j^n[\Delta_j^n(f*\nu)]$, où $f\in\mathcal{Z}$ et ν est la mesure de Lévy de X, lorsqu'il existe $a>0$ tel que $f(x)=0$ pour $|x|\leq a$ et tel que $\sum_{s\geq 0} 1_{\{|\Delta X_s|>a/2\}}$ soit borné par une constante.

b) $\beta_j^n = \rho_j^{X,n}(h) - E_j^n(\Delta_j^n B)$, où X est une semimartingale de caractéristiques locales (B,C,ν), lorsque $\mathrm{Var}(B)_\infty + C_\infty + (x^2\wedge 1)*\nu_\infty$ est borné par une constante.

Démonstration. On va d'abord ramener les deux cas (a) et (b) à une situation unique. Dans le cas (a), soit $b = \sup_x f(x)$, $M^* = 0$ et K une constante majorant $\sum_{s\geq 0} f(\Delta X_s)$. D'après (2.25) on a $E_j^n(\Delta_j^n(f*\nu)) = E_j^n(\sum_{t_j^n<s\leq t_{j+1}^n} f(\Delta X_s))$, donc

(2.29) $\beta_j^n = E_j^n(\theta_j^n)$, avec $\theta_j^n = f(\Delta_j^n X) - \sum_{t_j^n<s\leq t_{j+1}^n} f(\Delta X_s)$

(2.30) $|\theta_j^n| \leq b + K + M^*$, $E(M^{*2}) < \infty$.

Dans le cas (b), soit $\check{X}_t = X_t - \sum_{s\leq t}[\Delta X_s - h(\Delta X_s)]$. D'après la définition des caractéristiques locales associées à la fonction de troncation h, $M = \check{X} - B$ est une martingale locale à sauts bornés, et $\langle M,M\rangle \leq C + 4b^2(x^2\wedge 1)*\nu$ où $b = \sup_x |h(x)|$. On pose $M^* = \sup_{s\geq 0}|M_s|$ et soit K une constante qui majore la variable $4\{Var(B)_\infty + C_\infty + 4b^2(x^2\wedge 1)*\nu_\infty\}$. D'après l'inégalité de Doob, on a $E(M^{*2}) \leq 4\, E(\langle M,M\rangle_\infty) \leq K$, donc $E(M^{*2})<\infty$. En particulier, M est une martingale et $E^n_j(\Delta^n_j B) = E^n_j(\Delta^n_j(\check{X}-M)) = E^n_j(\Delta^n_j\check{X})$. Donc

$$(2.31)\qquad \beta^n_j = E^n_j(\theta^n_j)\ , \qquad \text{avec}\qquad \theta^n_j = h(\Delta^n_j X) - \Delta^n_j\check{X}\ .$$

Enfin, comme $|\check{X}|\leq Var(B)_\infty + M^*$, on a aussi la majoration (2.30).

Soit $a>0$ tel que $f(x) = 0$ si $|x|\leq a$ dans le cas (a), tel que $h(x) = x$ pour $|x|\leq a$ dans le cas (b). Soit $\varepsilon\in]0,\frac{a}{8}]$. On définit les temps d'arrêt T_p, puis le processus X', puis les temps d'arrêt S_η, comme dans la preuve du lemme (2.16). On chosit $q\in\mathbb{N}^*$ et $\eta>0$ tels qu'on ait (2.17).

Soit $]s,t]$ un intervalle tel que $t-s<\eta$ et $S_\eta>t$. S'il ne contient aucun temps T_p, ou s'il en contient un seul, qui vérifie $|\Delta X_{T_p}|\leq a/2$, on a $f(X_t-X_s) = 0$ et $f(\Delta X_r) = 0$ pour $r\in]s,t]$ dans le cas (a); on a $h(X_t-X_s) = X_t-X_s = \check{X}_t-\check{X}_s$ dans le cas (b). Si maintenant $]s,t]$ contient un seul temps T_p, avec $|\Delta X_{T_p}|>a/2$, on a $|f(X_t-X_s) - f(\Delta X_{T_p})|\leq 2\varepsilon$ dans le cas (a) car $f\in\mathcal{Z}$; on peut aussi supposer h lipschitzienne de coefficient 1, donc dans le cas (b) on a

$$\begin{aligned}|h(X_t-X_s) - (\check{X}_t-\check{X}_s)| &= |h(X_{T_p-} - X_s + \Delta X_{T_p} + X_t - X_{T_p}) \\ &\qquad - (X_{T_p-} - X_s) - h(\Delta X_{T_p}) - (X_t-X_{T_p})| \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Par suite si $|\tau^n|<\eta$ on a d'après (2.29) et (2.31):

$$(2.32)\quad |\theta^n_j|\leq\begin{cases} 0 & \text{sur } F^n_j = \{S_\eta > t^n_{j+1};\ ]t^n_j,t^n_{j+1}] \text{ contient au plus un } T_p,\ \text{et } |\Delta X_{T_p}|\leq a/2\} \\ 2\varepsilon & \text{sur } G^{np}_j = \{S_\eta > t^n_{j+1};\ T_{p-1}\leq t^n_j < T_p\leq t^n_{j+1} < T_{p+1};\ |\Delta X_{T_p}| > a/2\}\ .\end{cases}$$

Soit $R = \inf_{1\leq p\leq q}(T_p-T_{p-1})$. Si $|\tau^n|<\eta$, (2.30) et (2.32) entraînent

$$\begin{aligned}E(1_{\{T_q\wedge S_\eta>t\}}\textstyle\sum_{j\in J^n_t}|\beta^n_j|) &\leq \textstyle\sum_{j\in J^n_t} E(1_{\{T_q\wedge S_\eta>t^n_j\}}|\beta^n_j|) \\ &\leq \textstyle\sum_{j\in J^n_t} E(1_{\{T_q\wedge S_\eta>t^n_j\}}|\theta^n_j|) \\ &\leq E(\textstyle\sum_{j\in J^n_t}|\theta^n_j|\{1_{\{t^n_j<T_q\wedge S_\eta\leq t^n_{j+1}\}} + \sum_{p=1}^{q-2} 1_{\{t^n_j<T_p<T_{p+1}\leq t^n_{j+1}\}} +\end{aligned}$$

$$+ 1_{F_j^n} + \sum_{p=1}^{q-1} 1_{G_j^{np}} \})$$

$$\leq E\left[(b+K+M^*)\{1_{\{T_q \wedge S_\eta \leq t\}} + \sum_{p=1}^{q-2} 1_{\{R<|\tau^n|\}}\} + 2\varepsilon \sum_{s \leq t} 1_{\{|\Delta X_s|>a/2\}}\right]$$

$$\leq E[(b+K+M^*)^2][P(T_q \wedge S_\eta \leq t) + q\ P(R<|\tau^n|)] + 2\varepsilon\ E(1_{\{|x|>a/2\}} * \nu_t) .$$

Dans le cas (a), on a $E(1_{\{|x|>a/2\}} * \nu_\infty) < \infty$ par hypothèse, et dans le cas (b) la même propriété est vraie car $1_{\{|x|>a/2\}} * \nu_\infty$ est bornée. Il existe donc une constante K' et un entier n_0 tels que si $n \geq n_0$ on ait $q\ P(R<|\tau^n|) \leq \varepsilon$ et donc

$$E(1_{\{T_q \wedge S_\eta > t\}} \sum_{j \in J_t^n} |\beta_j^n|) \leq \varepsilon K'$$

(utiliser (2.17)). De plus K' ne dépend pas de q, de η, de ε. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, en utilisant une nouvelle fois (2.17) on obtient le résultat. ∎

<u>Démonstration de (2.27)</u>. a) Supposons X quasi-continu à gauche. On va d'abord montrer que X vérifie (2.8). Soit $\varepsilon > 0$. Définissons encore T_p, X', S_η comme dans (2.16), et choisissons $\eta > 0$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels qu'on ait (2.17). Soit $N^p = 1_{[\![T_p,\infty[\![}$, de compensateur prévisible A^p. Comme $|\Delta_j^n X| \leq \varepsilon$ si $S_\eta > t_{j+1}^n$ et si $]t_j^n, t_{j+1}^n]$ ne contient aucun temps T_p, il est clair que pour $|\tau^n| < \eta$ on a sur $\{T_q \wedge S_\eta > t_j^n\}$:

$$\rho_j^{X,n}(|x|>\varepsilon) \leq \sum_{p=1}^{q-1} P_j^n(t_j^n < T_p \leq t_{j+1}^n) + P_j^n(t_j^n < S_\eta \wedge T_q \leq t_{j+1}^n),$$

d'où

$$E[1_{\{T_q \wedge S_\eta > t\}} \sup_{j \in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|x|>\varepsilon)]$$

$$\leq \sum_{p=1}^{q-1} E[\sup_{j \in J_t^n} E_j^n(\Delta_j^n(N^p))] + E(\sum_{j \in J_t^n} 1_{\{t_j^n < S_\eta \wedge T_q \leq t_{j+1}^n\}})$$

$$\leq \sum_{p=1}^{q-1} E[\sup_{j \in J_t^n} E_j^n(\Delta_j^n(A^p))] + \varepsilon .$$

D'après l'hypothèse, les processus A^p sont croissants, continus, intégrables. Donc (2.14,iii) implique que: $\sup_{j \in J_t^n} E_j^n(\Delta_j^n(A^p)) \xrightarrow{P} 0$ pour tout p. Pour n assez grand, on a donc

$$E[1_{\{T_q \wedge S_\eta > t\}} \sup_{j \in J_t^n} \rho_j^{X,n}(|x|>\varepsilon)] \leq 2\varepsilon .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on déduit alors facilement (2.8) de (2.17).

Soit alors $f \in \mathcal{L}$ et $a > 0$ comme dans (2.28,a). Soit $R_m = \inf(t: \sum_{s \leq t} 1_{\{|\Delta X_s|>a/2\}} \geq m)$. D'après (2.28), on a alors

$$\sum_{j \in J_t^n} |\rho_j^{X^{R_m},n}(f) - E_j^n[\Delta_j^n(f * \nu^{R_m})]| \xrightarrow{P} 0 ,$$

car ν^{R_m} est la mesure de Lévy de X^{R_m}. Par ailleurs $f*\nu^{R_m}$ est croissant continu intégrable. Donc (2.14,i) entraine que $\sum_{j\in J_t^n} E_j^n[\Delta_j^n(f*\nu^{R_m})] \xrightarrow{P} f*\nu_t^{R_m}$. Par suite on a

$$(2.33)\qquad \sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X^{R_m},n}(f) \xrightarrow{P} f*\nu_t^{R_m}$$

pour tout m. Comme X vérifie (2.8), le lemme (2.20,iv) entraine que $\sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(f) \xrightarrow{P} f*\nu_t$. Donc X vérifie (D) avec $\nu^X = \nu$.

b) Supposons inversement que X vérifie (D). Soit $f\in\mathcal{L}$ et R_m comme ci-dessus. D'après (2.20,iii) on a (2.33) avec ν^X au lieu de ν. En utilisant (2.28), on obtient $\sum_{j\in J_t^n} E_j^n[\Delta_j^n(f*\nu^{R_m})] \xrightarrow{P} f*(\nu^X)_t^{R_m}$. Par ailleurs, d'après les laplaciens approchés, on a convergence de cette même expression vers $f*\nu_t^{R_m}$ au sens $\sigma(L^1,L^\infty)$. Donc $f*\nu_t^{R_m} = f*(\nu^X)_t^{R_m}$ pour tous $t\geq 0$, $f\in\mathcal{L}$, $m\in\mathbb{N}^*$. On en déduit que $\nu^X = \nu$; par suite ν vérifie (2.26), et X est quasi-continu à gauche.∎

3 - Démonstration des théorèmes principaux

§a - Le théorème 1.13. Nous allons démontrer dans ce paragraphe le théorème (1.13), en commençant par la partie (b). Soit donc X une semimartingale quasi-continue à gauche, de caractéristiques locales (B,C,ν), auxquelles on associe $\tilde{C}$ par (2.2) et $A(u)$ par (1.4). Il s'agit de démontrer que $X\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ avec $B^X = B$, $C^X = C$, $\nu^X = \nu$. D'après (2.23) on peut, quitte à localiser, supposer que le processus

$$\tilde{A} = \mathrm{Var}(B) + C + (x^2\wedge 1)*\nu$$

est borné par une constante K. Soit par ailleurs $(B^{X,n},C^{X,n},\nu^{X,n})$ auxquels on associe $\tilde{C}^{X,n}$ par la seconde formule (2.2), et

$$(3.1)\qquad A^n(u)_t = iuB_t^{X,n} + (e^{iux} - 1 - iuh(x))*\nu_t^{X,n}$$
$$= \sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(e^{iux} - 1).$$

(3.2) LEMME : Pour tous $u\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$, on a $A^n(u)_t \xrightarrow{P} A(u)_t$.

Démonstration. On sait que le processus $N(u)_t = e^{iuX_t} - \int_0^t e^{iuX_{s-}}\,dA(u)_s$ est une martingale locale, et même ici une martingale bornée puisque $\tilde{A}_\infty\leq K$ et puisque $\mathrm{Var}(A(u))\leq \alpha(u)\tilde{A}$ pour une constante $\alpha(u)$. Donc

$$\rho_j^{X,n}(e^{iux}-1) = E_j^n(e^{iu\Delta_j^n X} - 1) = \exp(-iuX_{t_j^n})\, E_j^n[\Delta_j^n(e^{iuX})]$$
$$= \exp(-iuX_{t_j^n})\, E_j^n\Big[\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} e^{-iuX_{s-}}\, dA(u)_s\Big]$$
$$= E_j^n\Big[\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \exp(iu(X_{s-} - X_{t_j^n}))\, dA(u)_s\Big]$$
$$= E_j^n[\Delta_j^n A(u)] + \delta_j^n, \quad \text{avec}$$
$$\delta_j^n = E_j^n\Big[\int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \{\exp(iu(X_{s-} - X_{t_j^n})) - 1\}\, dA(u)_s\Big].$$

Comme $\sum_{j\in J_t^n} E_j^n[\Delta_j^n A(u)] \xrightarrow{P} A(u)_t$ d'après (2.14), on voit d'après (3.1) qu'il suffit de démontrer que: $\sum_{j\in J_t^n} \delta_j^n \xrightarrow{P} 0$. Mais on a $E(\sum_{j\in J_t^n} |\delta_j^n|) \leq E(\int_0^\infty Z_s^n\, dA_s)$, où pour $t_j^n < s \leq t_{j+1}^n$ on a

$$Z_s^n = \alpha(u)[\exp(iu(X_{s-} - X_{t_j^n})) - 1].$$

Comme $0 \leq Z_s^n \leq 2\alpha(u)$ et comme $Z^n \longrightarrow 0$ partout, le théorème de convergence dominée entraine que l'expression ci-dessus tend vers 0, d'où le résultat. ∎

On va maintenant montrer que X vérifie les conditions (B), (C), (D) avec $B^X = B$, $\tilde{C}^X = \tilde{C}$ et $\nu^X = \nu$, toujours sous l'hypothèse que $\tilde{A}_\infty \leq K$. Pour (D), cela découle de (2.27). D'après (2.14),

$$\sup_{s\leq t} \Big| \sum_{j\in J_s^n} E_j^n(\Delta_j^n B) - B_s \Big| \xrightarrow{P} 0$$
$$\sum_{j\in J_t^n} [E_j^n(\Delta_j^n B)]^2 \xrightarrow{P} 0 .$$

Si $\beta_j^n = \rho_j^{X,n}(h) - E_j^n(\Delta_j^n B)$, le lemme (2.28,b) entraine que $\sum_{j\in J_t^n} |\beta_j^n| \xrightarrow{P} 0$, donc a-fortiori $\sum_{j\in J_t^n} |\beta_j^n|^2 \xrightarrow{P} 0$. On en déduit (B) car $B_t^{X,n} = \sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(h)$. Comme $\rho_j^{X,n}(h)^2 \leq 2\,|\beta_j^n|^2 + 2[E_j^n(\Delta_j^n B)]^2$, on en déduit aussi que

$$\sum_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(h)^2 \xrightarrow{P} 0 . \tag{3.3}$$

Montrons enfin (C). Pour cela il suffit de prouver que de toute sous-suite (n') on peut extraire une sous-sous-suite (n'') telle que $\tilde{C}_t^{X,n''} \longrightarrow \tilde{C}_t$ p.s. Quitte à prendre des sous-suites, on peut donc supposer qu'en dehors d'un ensemble négligeable N on a

$$\text{(3.4)} \quad \begin{cases} A^n(u)_t(\omega) \longrightarrow A(u)_t(\omega) \quad \forall u \in \mathbb{Q}, \qquad B_t^{X,n}(\omega) \longrightarrow B_t(\omega) \\ f*\nu_t^{X,n}(\omega) \longrightarrow f*\nu_t(\omega) \quad \forall f \in \mathcal{Z}. \end{cases}$$

En prenant les parties réelles dans la convergence $A^n(1)_t \longrightarrow A(1)_t$ et en utilisant le fait que $(2x-\frac{1}{2})^+ * \nu_t^{X,n} \longrightarrow (2x-\frac{1}{2})^+ * \nu_t$, on voit que: $\lim\sup_{(n)} h^2 * \nu_t^{X,n}(\omega) < \infty$ si $\omega \notin N$. Soit $F_t(\omega)$ un point d'adhérence de la suite $\{h^2 * \nu_t^{X,n}(\omega)\}_{n\geq 1}$, limite d'une sous-suite $h^2 * \nu_t^{X,n'}(\omega)$. D'après les deux dernières parties de (3.4), on en déduit que

$$A^{n'(\omega)}(u)_t(\omega) \longrightarrow iuB_t(\omega) - \frac{u^2}{2}[F_t(\omega) - h^2 * \nu_t(\omega)] + (e^{iux} - 1 - iuh(x)) * \nu_t(\omega)$$

(utiliser les théorèmes classiques sur la convergence des lois indéfiniment divisibles). D'après la première partie de (3.4), en identifiant la limite ci-dessus avec $A(u)_t(\omega)$ pour tout $u \in \mathbb{Q}$, on voit que $F_t(\omega) = h^2 * \nu_t(\omega) + C_t(\omega) = \tilde{C}_t(\omega)$. Par suite, il vient $h^2 * \nu_t^{X,n}(\omega) \longrightarrow \tilde{C}_t(\omega)$ pour tout $\omega \notin N$.

En revenant à la suite initiale, on en déduit que

$$\sum_{j \in J_t^n} \rho_j^{X,n}(h^2) = h^2 * \nu_t^{X,n} \xrightarrow{\ P\ } \tilde{C}_t .$$

Etant donnés (2.5) et (3.3), cela entraine $\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{\ P\ } \tilde{C}_t$, ce qui achève de montrer la partie (b) du théorème (1.13).

Avant de passer à la preuve de la partie (a) de ce théorème, démontrons des lemmes qui seront utilisés à nouveau plus loin.

(3.5) LEMME : <u>Soit</u> X <u>et</u> Y <u>deux processus càdlàg quasi-continus à gauche, tels que</u> $Y - X = \sum_{p\geq 1} U^p 1_{[\![T_p,\infty[\![}$ <u>où les</u> T_p <u>sont des temps d'arrêt croissant vers</u> $+\infty$ <u>et où les</u> U^p <u>sont des variables</u> $\underline{\underline{F}}_{T_p}$<u>-mesurables. Alors</u>

a) X <u>vérifie (B)</u> $\Longleftrightarrow$ Y <u>vérifie (B)</u>.

b) $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}}) \Longleftrightarrow Y \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$.

c) <u>Supposons de plus que</u> $\Delta X_{T_p} = 0$ <u>sur</u> $\{T_p < \infty\}$ <u>pour tout</u> p. <u>On a alors</u> $\nu^Y = \nu^X + \nu^{Y-X}$, <u>et</u> $B^Y = B^X + B^{Y-X^p}$ <u>sous (a), et</u> $\tilde{C}^Y = \tilde{C}^X + \tilde{C}^{Y-X}$ <u>sous (b)</u>.

<u>Démonstration</u>. i) D'après (2.27), X, Y, $X-Y = Z$ vérifient (D) et donc (2.8). De plus sous l'hypothèse de (c), X et Z n'ont pas de sauts communs, donc il est bien connu que $\nu^Y = \nu^X + \nu^Z$.

Etant donné (2.20), il suffit de montrer les résultats pour X^{T_p} et Y^{T_p}. En faisant une récurrence évidente, on voit qu'il suffit de les montrer lorsque

(3.6) $\qquad Y - X = Z = U\, 1_{[\![T,\infty[\![}$, $\quad T$ temps d'arrêt.

Soit alors $X' = X - X_T 1_{[\![T,\infty[\![}$. Les deux couples $(\overline{X},\overline{Y}) = (X',X)$ et $(\overline{X},\overline{Y}) = (X',Y)$ sont encore du type (3.6), et vérifient en outre $\Delta\overline{X}_T = 0$: on voit donc en définitive qu'il suffit de montrer les équivalences (a) et (b) dans le cas où on a (3.6) et

(3.7) $$\Delta X_T = 0 \quad \text{sur} \quad \{T < \infty\} .$$

ii) Soit f une fonction lipschitzienne de coefficient 1, bornée par 1, nulle en 0. Soit

(3.8) $$\begin{aligned} \alpha_j^n(f) &= \rho_j^{Y,n}(f) - \rho_j^{X,n}(f) - \rho_j^{Z,n}(f) \\ &= E_j^n\{1_{\{t_j^n < T \leq t_{j+1}^n\}}[f(\Delta_j^n X + U) - f(\Delta_j^n X) - f(U)]\} . \end{aligned}$$

D'après (3.7) on a $\Delta_j^n X = X_{t_{j+1}^n} - X_T + X_{T-} - X_{t_j^n}$ si $t_j^n < T \leq t_{j+1}^n$.
Donc, comme $|f(a+b+c) - f(a+b) - f(c)| \leq 2(|a|+|b|) \wedge 3$ (car $f(0) = 0$), il vient

$$|\alpha_j^n(f)| \leq 4\, E_j^n[1_{\{t_j^n < T \leq t_{j+1}^n\}}\{|X_{t_{j+1}^n} - X_T| \wedge 1 + |X_{T-} - X_{t_j^n}| \wedge 1\}]$$

et (2.16) entraine

(3.9) $$\sum_{j \in J_t^n} |\alpha_j^n(f)| \xrightarrow{P} 0 .$$

iii) Montrons alors (a), avec $B^Y = B^X + B^Z$. On applique (ii) à $f = h$. Etant donné (2.5), il découle de (3.9) que

(3.10) $$B^{Y,n} - B^{X,n} - B^{Z,n} \xrightarrow{P-u} 0 .$$

Par ailleurs Z est une semimartingale, donc $B^{Z,n} \xrightarrow{P-u} B^Z$ où B^Z est la première caractéristique locale de Z, d'après (1.13,b). L'équivalence (a) découle alors immédiatement de (3.10) , ainsi que l'égalité cherchée $B^Y = B^X + B^Z$.

iv) Pour obtenir (b) il reste alors à montrer que si X, Y, Z vérifient (B) et (D), alors X vérifie (C) et (2.13) si et seulement si Y vérifie (C) et (2.13), et qu'alors $\tilde{C}^Y = \tilde{C}^X + \tilde{C}^Z$ (car on sait que Z vérifie (C)).

Notons d'abord que si a,b,c,a',b',c' sont des nombres de $[-1,1]$ et si $a = b+c+\alpha$ et $a' = b'+c'+\alpha'$, on a l'inégalité

$$|a - a'^2 - (b - b'^2 + c - c'^2)| \leq |\alpha| + \alpha'^2 + 4|\alpha'| + 2|c'||b'| .$$

On applique cette inégalité à: $a = \rho_j^{Y,n}(h^2)$, $a' = \rho_j^{Y,n}(h)$, $b = \rho_j^{X,n}(h^2)$, $b' = \rho_j^{X,n}(h)$, $c = \rho_j^{Z,n}(h^2)$, $c' = \rho_j^{Z,n}(h)$. En supposant toujours h bornée par 1 et lipschitzienne de coefficient 1, il vient d'après (2.5):

$$(3.11)\qquad \sup_{s\leq t}|\tilde C^{Y,n}_s - \tilde C^{X,n}_s - \tilde C^{Z,n}_s| \leq \sum_{j\in J^n_t}\Big[\alpha^n_j(h^2) + \alpha^n_j(h)^2 + 4|\alpha^n_j(h)| + 2|\rho^{Z,n}_j(h)\rho^{X,n}_j(h)|\Big].$$

D'après (3.9) on a

$$(3.12)\qquad \sum_{j\in J^n_t}[\alpha^n_j(h^2) + \alpha^n_j(h)^2 + 4|\alpha^n_j(h)|] \xrightarrow{P} 0 .$$

Par ailleurs soit $Z^{\pm} = U^{\pm}\, 1_{[\![T,\infty[\![}$. Si on choisit h de sorte que $h(x)$ et $x - h(x)$ soient toujours du signe de x (ce qui est possible), on voit que $\rho^{Z^{\pm},n}_j(h)\geq 0$ et que $\rho^{Z,n}_j(h) = \rho^{Z^+,n}_j(h) + \rho^{Z^-,n}_j(h)$. On sait aussi que $\sum_{j\in J^n_t}\rho^{Z^{\pm}}_j(h) \xrightarrow{P} B^{Z^{\pm}}_t$. Donc la suite $\{\sum_{j\in J^n_t}|\rho^{Z,n}_j(h)|\}_{n\geq 1}$ est bornée en probabilité; enfin d'après (2.7) on a: $\sup_{j\in J^n_t}|\rho^{X,n}_j(h)| \xrightarrow{P} 0$. Ceci, plus (3.12) et (3.11), entrainent alors que

$$\tilde C^{Y,n} - \tilde C^{X,n} - \tilde C^{Z,n} \xrightarrow{P-u} 0 .$$

Comme $\tilde C^{Z,n} \xrightarrow{P-u} \tilde C^Z$, on en déduit que $\tilde C^{Y,n} \xrightarrow{P-u} \tilde C^Y$ si et seulement si $\tilde C^{X,n} \xrightarrow{P-u} \tilde C^X$, et alors $\tilde C^Y = \tilde C^X + \tilde C^Z$. Enfin comme $\nu^Y = \nu^X + \nu^Z$ et comme $\tilde C^Z = h^2{*}\nu^Z$, si $\tilde C^Y = \tilde C^X + \tilde C^Z$ on vérifie immédiatement que $\tilde C^Y - h^2{*}\nu^Y$ est croissant si et seulement si $\tilde C^X - h^2{*}\nu^X$ est croissant. ∎

(3.13) LEMME : <u>Soit</u> $X\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ <u>et</u> $X'_t = X_t - \sum_{s\leq t}\Delta X_s\, 1_{\{|\Delta X_s|>1\}}$. <u>Alors</u> $X'\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$, <u>et si la fonction de troncation</u> h <u>vérifie</u> $h(x) = 0$ <u>pour</u> $|x|\geq 1$ <u>on a</u> $B^{X'} = B^X$.

<u>Démonstration</u>. Soit $T_0 = 0$, $T_{p+1} = \inf(t>T_p\colon |\Delta X_t|>1)$. Soit $Z = \sum_{p\geq 1}\Delta X_{T_p}\, 1_{[\![T_p,\infty[\![}$. On a $X - X' = Z$ et $\Delta X'_{T_p} = 0$ sur $T_p<\infty$: on est donc exactement dans la situation de (3.5,c) avec (X',X) au lieu de (X,Y). On en déduit que $X'\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ et que $B^X = B^{X'} + B^Z$. Enfin si $h(x) = 0$ pour $|x|\geq 1$, on a $\check Z_t := Z_t - \sum_{s\leq t}[\Delta Z_s - h(\Delta Z_s)] = 0$, donc $B^Z = 0$. ∎

(3.14) LEMME : <u>Soit</u> $X\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ <u>et</u> $Y\in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$. <u>Alors</u> $Z = X + Y$ <u>est dans</u> $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ <u>et on a</u> $B^Z = B^X + B^Y$, $C^Z = C^X$, $\nu^Z = \nu^X$ <u>et</u> $\tilde C^Z = \tilde C^X$.

<u>Démonstration</u>. i) Soit $X'_t = X_t - \sum_{s\leq t}\Delta X_s\, 1_{\{|\Delta X_s|>1\}}$ et $Z'_t = Z_t - \sum_{s\leq t}\Delta Z_s\, 1_{\{|\Delta Z_s|>1\}}$. Soit aussi h une fonction de troncation vérifiant $h(x) = 0$ si $|x|\geq 1$. D'après (3.13), on a $X'\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ et $B^{X'} = B^X$; on a aussi $Z' = X' + Y$. Supposons alors qu'on ait montré que $Z'\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ et que $B^{Z'} = B^{X'} + Y$. D'après (3.5,c) on a alors $Z\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ et $B^Z = B^{Z'} + B^{Z-Z'}$; le même raisonnement qu'en (3.13) montre que $B^{Z-Z'} = 0$, donc finalement $B^Z = B^{Z'} = B^{X'} + Y = B^X + Y$.

Par suite il suffit de montrer le résultat lorsque $|\Delta X| \leq 1$ identiquement. Quitte à localiser, on peut donc supposer qu'il existe une constante K telle que

(3.15) $\quad |X_t| \leq K \;,\quad |Y_t| \leq K \;,\quad |Z_t| \leq K \quad$ identiquement.

On va alors montrer le résultat avec une autre fonction de troncation lipschitzienne, toujours notée h, mais qui vérifie $h(x) = x$ si $|x| \leq 2K$, ainsi que $|h| \leq 4K$.

ii) Comme $\Delta Z = \Delta X$, d'après (2.27) le processus Z vérifie (D) avec $\nu^Z = \nu^X$. Etant donné (3.15) et les propriétés de h, on a $\rho_j^{X,n}(h) = \rho_j^{X,n}(x)$ et $\rho_j^{X,n}(h^2) = \rho_j^{X,n}(x^2)$, et de même pour les processus Y et Z. Par suite on a $B^{Z,n} = B^{X,n} + B^{Y,n}$. D'après (1.14) on a $B^{Y,n} \xrightarrow{P-u} Y$, et $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} B^X$ par hypothèse. Donc $B^{Z,n} \xrightarrow{P-u} B^Z := B^X + Y$ et Z vérifie (B). De même,

(3.16) $\quad \tilde{C}_t^{Z,n} = \tilde{C}_t^{X,n} + \tilde{C}_t^{Y,n} + \sum_{j\in J_t^n} \alpha_j^n \;,\quad$ avec

$$\alpha_j^n = \rho_j^{Z,n}(x^2) - \rho_j^{Z,n}(x)^2 - \rho_j^{X,n}(x^2) + \rho_j^{X,n}(x)^2 - \rho_j^{Y,n}(x^2) + \rho_j^{Y,n}(x)^2$$

(3.17) $$\quad = 2\, E_j^n\{[\Delta_j^n X - \rho_j^{X,n}(x)]\,[\Delta_j^n Y - \rho_j^{Y,n}(x)]\}\,.$$

Soit alors $\beta_j^n = \rho_j^{X,n}(x^2) - \rho_j^{X,n}(x)^2$ et $\gamma_j^n = \rho_j^{Y,n}(x^2) - \rho_j^{Y,n}(x)^2$, de sorte que $\tilde{C}_t^{X,n} = \sum_{j\in J_t^n} \beta_j^n$ et $\tilde{C}_t^{Y,n} = \sum_{j\in J_t^n} \gamma_j^n$. D'après l'inégalité de Schwarz, on a $|\alpha_j^n| \leq 2(\beta_j^n\gamma_j^n)^{\frac12}$ en utilisant (3.17). Toujours d'après l'inégalité de Schwarz,

(3.18) $$\quad \sum_{j\in J_t^n} |\alpha_j^n| \leq 2\big(\sum_{j\in J_t^n} \beta_j^n\big)^{\frac12}\big(\sum_{j\in J_t^n} \gamma_j^n\big)^{\frac12} = 2(\tilde{C}_t^{X,n}\,\tilde{C}_t^{Y,n})^{\frac12}.$$

Par hypothèse, $\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^X$, tandis que $\tilde{C}_t^{Y,n} \xrightarrow{P} 0$ d'après (1.14). Donc $\sum_{j\in J_t^n} |\alpha_j^n| \xrightarrow{P} 0$. On déduit alors de (3.16) que $\tilde{C}_t^{Z,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^Z := \tilde{C}_t^X$, donc le processus Z vérifie (C) et $C^Z := \tilde{C}^Z - h^2 * \nu^Z = C^X$ est croissant.∎

Montrons maintenant <u>la partie (a) du théorème (1.13)</u>. Soit X un PAI sans discontinuité fixe, de caractéristiques (B,C,ν). Soit $Y = X - B$, qui d'après (1.8) est aussi un PAI-semimartingale de caractéristiques $(0,C,\nu)$. D'après (1.13,b), on a $Y \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ et $B^Y = 0$, $C^Y = C$, $\nu^Y = \nu$. Par ailleurs B étant déterministe et continu, il est très facile de montrer que $B \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$. Il suffit alors d'appliquer le lemme (3.14) pour obtenir que $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$, avec $B^X = B^Y + B = B$, $C^X = C^Y = C$, $\nu^X = \nu^Y = \nu$.

§b - Le théorème 1.15. Là encore, on commence par une série de lemmes.

(3.19) LEMME : Soit X un processus càdlàg, $a>0$ et $u\in\mathbb{R}$. Soit

$$G_t^{X,n}(u) = \prod_{j\in J_t^n} \rho_j^{X,n}(e^{iux})$$

$$T^n = \inf(t: |G_t^{X,n}(u)|\leq a) = t^n_{J^n}, \quad \text{où} \quad J^n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}.$$

a) $S^n(\omega) = t^n_{J^n(\omega)-1}$ est un temps d'arrêt pour $(\underline{\underline{F}}_{t_j^n})_{j\geq 1}$.

b) Si $Z_j^n = (\exp iuX_{S^n\wedge t_j^n})/G^{X,n}_{S^n\wedge t_j^n}(u)$, la suite $(Z_j^n)_{j\geq 1}$ est une $(\underline{\underline{F}}_{t_j^n})_{j\geq 1}$-martingale.

Démonstration. a) On a $\{S^n = t_j^n\} = \{|G^{X,n}_{t_j^n}(u)| > a, |G^{X,n}_{t^n_{j+1}}(u)|\leq a\}$, qui est dans $\underline{\underline{F}}_{t_j^n}$ car $G^{X,n}_{t^n_{j+1}}(u) = \prod_{p\leq j} \rho_p^{X,n}(e^{iux})$, d'où le résultat.

b) On a $1\leq |Z^n|\leq 1/a$ par construction. De plus

$$E_j^n(Z^n_{j+1}) = (\exp iuX_{S^n\wedge t_j^n}) E_j^n[\exp iu(X_{S^n\wedge t^n_{j+1}} - X_{S^n\wedge t_j^n})]/G^{X,n}_{S^n\wedge t^n_{j+1}}(u).$$

Sur $\{S^n\leq t_j^n\}$ il est clair que $E_j^n(Z^n_{j+1}) = Z_j^n$. Sur $\{S^n > t_j^n\} = \{S^n\geq t^n_{j+1}\}$ on a

$$\begin{aligned} E_j^n(Z^n_{j+1}) &= (\exp iuX_{t_j^n}) E_j^n(e^{iu\Delta_j^n X}) / G^{X,n}_{t^n_{j+1}}(u) \\ &= (\exp iuX_{t_j^n}) / G^{X,n}_{t_j^n}(u) = Z_j^n . \blacksquare \end{aligned}$$

(3.20) LEMME: Soit $X\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$, $A^X(u)$ défini par (1.4) à partir de (B^X,C^X,ν^X) et $G^X(u) = \exp A^X(u)$. Alors $M(u) = e^{iuX}/G^X(u)$ est une martingale locale.

Démonstration. Par localisation on peut supposer que $|G^X(u)|\geq 2a$ identiquement, pour une constante $a>0$. On utilise les notations $G^{X,n}(u)$, S^n, Z^n du lemme précédent. On a $G_t^{X,n}(u) = \int \zeta^{X,n}(dy)e^{iuy(t)}$ donc d'après l'hypothèse $X\in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$, il vient

$$G_t^{X,n}(u) \xrightarrow{P} G_t^X(u) \qquad \forall t\geq 0. \tag{3.21}$$

Comme $|G^{X,n}(u)|$ est décroissant et $|G^X(u)|\geq 2a$, on en déduit que

$$P(S^n\leq t) \longrightarrow 0 \qquad \forall t\geq 0. \tag{3.22}$$

Pour tout $t>0$, soit $j(n,t) = \sup(j: t^n_{j+1}\leq t)$. Sur l'ensemble $\{S^n>t\}$ on a $Z^n_{j(n,t)} = (\exp iuX_{t^n_{j(n,t)}})/G_t^{X,n}(u)$, et comme X est quasi-continu à gauche d'après (2.27) on a $X_{t^n_{j(n,t)}} \xrightarrow{P} X_t$, car

$t^n_{j(n,t)} \longrightarrow t$. On déduit alors de (3.21) et (3.22) que

(3.23) $$Z^n_{j(n,t)} \xrightarrow{L^1} e^{iuX_t} / G^X_t(u) \qquad \forall t \geq 0.$$

Montrons alors le lemme. Comme $M(u)$ est càdlàg et vérifie $1 \leq |M(u)| \leq 1/2a$, il suffit de montrer que pour tous $0 < s < t$ et tout $A \in \underline{\underline{F}}_{s-\varepsilon}$ (où $\varepsilon < s$), on a

$$E\left[1_A \, e^{iu(X_t - X_s)} \, G^X_s(u) \,/\, G^X_t(u)\right] = P(A).$$

Au vu de (3.23), il suffit donc de montrer que

$$\lim_n E\left[1_A \, Z^n_{j(n,t)} \,/\, Z^n_{j(n,s)}\right] = P(A).$$

Mais pour tout n assez grand, on a $s-\varepsilon \leq t^n_{j(n,s)}$, donc $A \in \underline{\underline{F}}_{t^n_{j(n,s)}}$, donc $E(1_A Z^n_{j(n,t)}/Z^n_{j(n,s)}) = P(A)$ d'après le lemme (3.19).∎

(3.24) COROLLAIRE : <u>Soit</u> $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$. <u>Alors</u> $Y = X - B^X$ <u>est une semimartingale quasi-continue à gauche, de caractéristiques locales</u> $(0, C^X, \nu^X)$.

<u>Démonstration</u>. La quasi-continuité à gauche de Y est évidente car B^X est continu et X est quasi-continu à gauche par (2.27). Soit

$$G(u) = e^{A(u)}, \text{ avec } A(u) = -\frac{u^2}{2} C^X + (e^{iux} - 1 - iuh(x)) * \nu^X.$$

$e^{iuX}/G^X(u) = e^{iuY}/G(u)$ est une martingale locale d'après (3.20), et $G(u)$ est continu adapté, à variation finie (car C^X et ν^X vérifient (1.2) et (1.3)). Donc e^{iuY} est une semimartingale pour tout $u \in \mathbb{R}$. Il est bien connu que cela entraine que Y est aussi une semimartingale, et d'après la caractérisation (1.5) ses caractéristiques locales sont $(0, C^X, \nu^X)$.∎

(3.25) LEMME : a) <u>Tout processus continu prévisible à variation finie, nul en</u> 0, <u>est dans</u> $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$.

b) <u>On a</u> $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}}) \subset \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$.

c) <u>Si</u> $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$, <u>pour que</u> $X \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ <u>il faut et il suffit que</u> $C^X = 0$ <u>et</u> $\nu^X = 0$, <u>et dans ce cas</u> $B^X = X$.

d) $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ <u>est un espace vectoriel</u>.

<u>Démonstration</u>. a) Par localisation, il suffit de considérer le cas où X est continu prévisible à variation finie, nul en 0, et borné par une constante K. Soit alors h une fonction de troncation telle que $h(x) = x$ si $|x| \leq 2K$. On a alors $\rho^{X,n}_j(h) = \rho^{X,n}_j(x)$ et $\rho^{X,n}_j(h^2) = \rho^{X,n}_j(x^2)$. D'après (1.13,b) on a $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} B^X = X$ et

$\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^X = 0$, car les caractéristiques locales de X sont $(X,0,0)$; ces deux propriétés sont exactement les propriétés demandées dans la définition (1.14).

b) Par localisation, il suffit de considérer le cas où $X \in \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{T}})$ est borné par une constante K. Soit h comme ci-dessus. D'après (1.14) on a alors $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} X$ et $\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{P} 0$, et d'après (2.27) et la continuité de X, ce processus vérifie (D) avec $\nu^X = 0$. Par suite $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ avec $B^X = X$, $C^X = 0$, $\nu^X = 0$.

c) Etant donné (b), il reste à montrer que si $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ vérifie $C^X = 0$ et $\nu^X = 0$, on a $X \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$. Comme $\nu^X = 0$, X est continu d'après (2.27). D'après (3.24), $Y = X - B^X$ est une semimartingale nulle en 0, de caractéristiques locales $(0,0,0)$: donc $Y = 0$ et $X = B^X$. Par suite $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} X$ et $\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{P} 0$. Il suffit alors de localiser X pour le rendre borné et de recopier la preuve de (a) pour obtenir que $X \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$.

d) La propriété cherchée découle immédiatement de (c) et de (3.14). ■

(3.26) LEMME : __Si__ $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ __on a__ $B^X \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$.

__Démonstration__. i) On va commencer par réduire le problème. Considérons deux fonctions de troncation h et h', et les processus B^X correspondants: $B^{X,h}$ et $B^{X,h'}$. D'après (2.10) on a $B^{X,h'} = B^{X,h} + (h'-h)*\nu^X$ et $(h'-h)*\nu^X$ est continu, nul en 0, prévisible, à variation finie. D'après (3.25) on a donc $B^{X,h} \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}}) \Longleftrightarrow B^{X,h'} \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$.

On peut donc d'abord choisir une fonction de troncation h telle que $h(x) = 0$ si $|x| \leq 1$. Soit $X'_t = X_t - \sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s| > 1\}}$. D'après (3.13) on a $X' \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ et $B^{X'} = B^X$. Autrement dit, on peut remplacer X par X', i.e. supposer que

(3.27) $\qquad |\Delta X| \leq 1$ identiquement.

Quitte à localiser, et en remarquant que d'après (3.27) la mesure ν^X ne charge que $\mathbb{R}_+ \times \{x: |x| \leq 1\}$, on peut supposer que ($X$ étant localement borné d'après (3.27)):

(3.28) $\qquad |X| \leq K, \quad |B^{X,h}| \leq K , \quad \tilde{C}^{X,h} \leq K , \quad 1_{\{|x| > \frac{1}{2}\}} * \nu^X \leq K,$

pour une constante K. Soit h' une fonction de troncation telle que $h'(x) = x$ si $|x| \leq 8K$. On a $|h'-h| * \nu^X \leq 2K$ si h vérifie $h(x) = x$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|h(x)| \leq |x|$, et on a de même $|h'^2 - h^2| * \nu^X \leq 4K$ d'après (3.28). Donc d'après (2.10) on a

$\tilde{C}^{X,h'} \leq 5K$ et $|B^{X,h'}| \leq 3K$.

Autrement dit, on peut remplacer la fonction h par la fonction h' et supposer que

$$(3.29)\qquad |X| \leq K\ ,\quad |B^X| \leq 3K\ ,\quad \tilde{C}^X \leq 5K\ ,\qquad h(x) = x \ \text{ si } \ |x| \leq 8K.$$

On pose $Y = B^X$ et $Z = X - Y$, de sorte que $|Y| \leq 3K$ et $|Z| \leq 5K$.

ii) D'après (3.29) on a $\rho_j^{X,n}(h) = \rho_j^{X,n}(x)$ et $\rho_j^{X,n}(h^2) = \rho_j^{X,n}(x^2)$ et de même pour les processus Y et Z. Par suite on a

$$(3.30)\qquad B^{Y,n} = B^{X,n} - B^{Z,n}$$

$$(3.31)\qquad \tilde{C}^{Y,n} \leq \tilde{C}^{X,n} + \tilde{C}^{Z,n} + 2(\tilde{C}^{X,n}\,\tilde{C}^{Z,n})^{\frac{1}{2}} \leq 2(\tilde{C}^{X,n} + \tilde{C}^{Z,n})$$

(en faisant le même calcul qu'en (3.16) et (3.17)), et comme Y est continu borné nul en 0 et adapté, il nous reste à montrer que

$$(3.31)\qquad B^{Y,n} \xrightarrow{P-u} Y\ ,\qquad \tilde{C}_t^{Y,n} \xrightarrow{P} 0\ .$$

D'après (3.24), on a $B^{Z,n} \xrightarrow{P-u} 0$, et $B^{X,n} \xrightarrow{P-u} B^X = Y$ par hypothèse, donc la première partie de (3.32) découle de (3.30).

iii) Il reste donc à montrer la seconde partie de (3.32). On a $\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^X$, et $\tilde{C}_t^{Z,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^X$ par (3.24); le processus Y vérifie (D) avec $\nu^Y = 0$ par (2.27). Soit aussi $T^n = \inf(t\colon \tilde{C}_t^{Y,n} \geq 25K)$; T^n est un temps d'arrêt et d'après (3.29) on a $\Delta\tilde{C}^{Y,n} \leq \sup_j \rho_j^{T,n}(x^2) \leq (6K)^2$, donc $\tilde{C}_{T^n}^{Y,n} \leq a := 25K + 36K^2$. De plus, d'après les convergences $\tilde{C}_t^{X,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^X$ et $\tilde{C}_t^{Z,n} \xrightarrow{P} \tilde{C}_t^X$ et (3.31) et $\tilde{C}_\infty^X \leq 5K$, il vient

$$P(T^n \leq t) \longrightarrow 0\ .$$

Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc supposer qu'en dehors d'une ensemble négligeable N on a

$$(3.33)\left\{\begin{array}{l} \tilde{C}_t^{X,n}(\omega) \longrightarrow \tilde{C}_t^X(\omega)\ ,\qquad \tilde{C}_t^{Z,n}(\omega) \longrightarrow \tilde{C}_t^X(\omega) \\ \sup_{s\leq t} |B_s^{Y,n}(\omega) - Y_s(\omega)| \longrightarrow 0 \\ \forall \varepsilon > 0\ ,\qquad 1_{\{|x|>\varepsilon\}} * \nu_t^{Y,n}(\omega) \longrightarrow 0 \\ \text{pour tout } n \text{ assez grand, } T^n(\omega) > t. \end{array}\right.$$

Il suffira alors de montrer que $\tilde{C}_t^{Y,n} \xrightarrow{P} 0$ pour cette sous-suite.

iv) Soit $u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $|u| \leq 1/12K$. Comme $\rho_j^{Y,n}(.)$ ne charge que l'intervalle $[-6K,6K]$, on a $|\rho_j^{Y,n}(e^{iux}) - 1| \leq \frac{1}{2}$ identiquement. Soit

$$\alpha_j^n = \rho_j^{Y,n}(x) \;,\quad \beta_j^n = \rho_j^{Y,n}(e^{iu(x-\alpha_j^n)} - 1) \;,\quad \gamma_j^n = \rho_j^{Y,n}(|x-\alpha_j^n|^2),$$

de sorte que

$$(3.34) \qquad B_{t\wedge T^n}^{Y,n} = \sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} \alpha_j^n \;,\quad \tilde{C}_{t\wedge T^n}^{Y,n} = \sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} \gamma_j^n$$

$$(3.35) \left\{\begin{aligned} G_{t\wedge T^n}^{Y,n}(u) &:= \prod_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} \rho_j^{Y,n}(e^{iux}) = \prod_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} e^{iu\alpha_j^n}(1+\beta_j^n) \\ &= \exp\{iuB_{t\wedge T^n}^{Y,n} + \sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} \mathrm{Log}(1+\beta_j^n)\} \end{aligned}\right.$$

$$(3.36) \qquad |\beta_j^n| \leq \frac{1}{2} \;,\qquad |\alpha_j^n| \leq 6K.$$

On sait que

$$(3.37) \left\{\begin{aligned} &x\in\mathbb{C},\ |x|\leq\frac{1}{2} \Longrightarrow |\mathrm{Log}(1+x) - x| \leq 2|x|^2 \leq |x| \\ &\exists K':\ y\in\mathbb{R},\ |y|\leq 12K \Longrightarrow |e^{iuy}-1-iuy+\tfrac{1}{2}u^2y^2| \leq K'|y|^3 \leq K'(6K)y^2. \end{aligned}\right.$$

Comme $\rho_j^{Y,n}(x-\alpha_j^n) = 0$ par définition de α_j^n, on a $\beta_j^n = \rho_j^{Y,n}(e^{iu(x-\alpha_j^n)} - 1 - iu(x-\alpha_j^n))$ et d'après (3.37) il vient

$$|\beta_j^n + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n| \leq 6KK'\gamma_j^n$$

$$\sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} |\mathrm{Log}(1+\beta_j^n)| \leq 2\sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} |\beta_j^n|$$

$$\leq 2\sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} [\tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n + 6KK'\gamma_j^n] = (u^2 + 12KK')\tilde{C}_{t\wedge T^n}^{Y,n} \leq b \;,$$

où $b = (u^2 + 12KK')a$. Donc d'après (3.35) on a

$$|G_{t\wedge T^n}^{Y,n}(u)| \geq e^{-b} \;.$$

Si alors $S^n = T^n \wedge \sup(t_j^n:\ t_{j+1}^n \leq t)$, on déduit du lemme (3.19) que

$$(3.38) \qquad E(\exp iuY_{S^n} / G_{S^n}^{Y,n}(u)) = 1 \;,\quad |(\exp iuY_{S^n})/G_{S^n}^{Y,n}(u)| \leq e^b.$$

v) On fixe $\omega\notin N$. Comme Y est continu, on déduit de (3.34) et (3.33) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$(3.39) \quad n\geq n_0 \Longrightarrow \sup_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} |\alpha_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;,\quad 1_{\{|x|>\frac{1}{2}\varepsilon\}} * \nu_{t\wedge T^n}^{Y,n} = \sum_{j\in J_{t\wedge T^n}^n} \rho_j^{Y,n}(|x|>\frac{\varepsilon}{2}) \leq \varepsilon$$

(n_0 dépend de ω). D'après (3.37) il vient pour $n\geq n_0$:

$$|\beta_j^n + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n| \le K'\ \rho_j^{Y,n}(|x-\alpha_j^n|^3)$$

$$\le K'\varepsilon\ \rho_j^{Y,n}(|x-\alpha_j^n|^2) + K'(6K)^3\ \rho_j^{Y,n}(|x-\alpha_j^n| > \varepsilon)$$

(3.40) $$\le K'\varepsilon\,\gamma_j^n + 216\ K^3\ K'\ \rho_j^{Y,n}(|x| > \tfrac{\varepsilon}{2})$$

(on utilise le fait que $|x-\alpha_j^n| \le 6K$ p.s. pour $\rho_j^{Y,n}$), et

$$|\mathrm{Log}(1+\beta_j^n) + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n| \le 2|\beta_j^n|^2 + |\beta_j^n + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n|$$

(3.41) $$\le 2|\beta_j^n|\left[\tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n + |\beta_j^n + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n|\right] + |\beta_j^n + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n|$$

(3.42) $$|\beta_j^n| \le 2\ \rho_j^{Y,n}(|x| > \tfrac{\varepsilon}{2}) + |u|(\tfrac{\varepsilon}{2} + |\alpha_j^n|) \le 2\ \rho_j^{Y,n}(|x| > \tfrac{\varepsilon}{2}) + \varepsilon|u|.$$

(3.43) $$|\mathrm{Log}(1+\beta_j^n) + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n| \le 3|\beta_j^n + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n| + 2|\beta_j^n|\tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n$$

par (3.41) et (3.42). En utilisant (3.43), (3.40) et (3.42), puis (3.39) et (3.34), on obtient:

(3.44) $$\sum_{j\in J^n_{t\wedge T^n}} |\mathrm{Log}(1+\beta_j^n) + \tfrac{1}{2}u^2\gamma_j^n|$$

$$\le \sum_{j\in J^n_{t\wedge T^n}} \left\{3\left[K'\varepsilon\gamma_j^n + 216K^3K'\rho_j^{Y,n}(|x| > \tfrac{\varepsilon}{2})\right] + u^2\gamma_j^n\left[\varepsilon|u| + 2\rho_j^{Y,n}(|x| > \tfrac{\varepsilon}{2})\right]\right\}$$

$$\le 3\ K'\varepsilon\,\tilde{C}^{Y,n}_{t\wedge T^n} + 1080\ K^3\ K' + u^2(\varepsilon|u| + 2\varepsilon)\tilde{C}^{Y,n}_{t\wedge T^n}$$

(3.44) $$\le \varepsilon\left[3K'a + 1080\ K^3\ K' + u^2(|u| + 2)a\right].$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que (3.44) tend vers 0 quand $n\uparrow\infty$ pour tout $\omega\notin N$. Etant donnés (3.33) et (3.35), on en déduit que

$$G^{Y,n}_{t\wedge T^n}(u)\ \exp \tfrac{1}{2}u^2\ \tilde{C}^{Y,n}_{t\wedge T^n} \longrightarrow e^{iuY_t}.$$

Comme $S^n \longrightarrow t$, on a $Y_{S^n} \longrightarrow Y_t$ et $G^{Y,n}_{t\wedge T^n}(u) = G^{Y,n}_{S^n}(u)$ et $T^n > t$ pour n assez grand, donc

(3.45) $$\exp(iuY_{S^n} - \tfrac{1}{2}u^2\ \tilde{C}^{Y,n}_t)\ /\ G^{Y,n}_{S^n}(u) \longrightarrow 1\ .$$

vi) Soit $V^n = \mathcal{R}e[e^{iuY_{S^n}}/G^{Y,n}_{S^n}(u)]$ et $W^n = \exp -\tfrac{1}{2}u^2\tilde{C}^{Y,n}_t$. D'après (3.38) on a $|V^n| \le e^b$ et $E(V^n) = 1$, et (3.45) entraine que $V^nW^n \longrightarrow 1$ sur N^c, alors que $0 < W^n \le 1$. Par suite $\liminf_n V^n \ge 1$ et $|V^nW^n| \le e^b$, de sorte que $E(V^nW^n) \longrightarrow 1$ également. Si $\varepsilon\in]0,1[$ on a alors

$$P(W^n \le 1-\varepsilon) \le P(V^n \le \tfrac{1}{2}) + P(|V^n - V^nW^n|\ 1_{\{V^n > \frac{1}{2}\}} > \tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$\le P(V^n \le \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{\varepsilon}\ E[(V^n - V^nW^n)\ 1_{\{V^n > \frac{1}{2}\}}]$$

$$\leq P(V^n \leq \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{\varepsilon}\{|E(V^n(1 - W^n))| + E[|V^n - V^n W^n| 1_{\{V^n \leq \frac{1}{2}\}}]\}$$

$$\leq P(V^n \leq \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{\varepsilon}|E(V^n) - E(V^n W^n)| + \tfrac{4}{\varepsilon} e^b P(V^n \leq \tfrac{1}{2})$$

$$\leq (1 + \tfrac{4e^b}{\varepsilon}) P(V^n \leq \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{\varepsilon} |1 - E(V^n W^n)| .$$

Comme $P(V^n \leq \frac{1}{2}) \longrightarrow 0$ et $E(V^n W^n) \longrightarrow 1$, on en déduit que $P(W^n \leq 1-\varepsilon) \longrightarrow 0$. Comme $W^n \leq 1$ il s'ensuit que $W^n \xrightarrow{P} 1$, ce qui équivaut à $\tilde{C}_t^{Y,n} \xrightarrow{P} 0$, et la démonstration est achevée. ∎

Nous pouvons maintenant passer à <u>la preuve du théorème (1.15)</u>. La partie (b) découle des lemmes (3.14) et (3.26) et du corollaire (3.24). $\underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ est un espace vectoriel d'après (3.25), et la propriété d'espace vectoriel de $\underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ découle de ce fait, de (3.24), et du fait que l'espace des semimartingales quasi-continues à gauche est aussi un espace vectoriel.

Si $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$ il est clair qu'il vérifie les conditions de (c) d'après (3.20) et (i) et (iv) sont évidents, tandis que (ii) et (iii) découlent de (3.24). Inversement supposons que X vérifie les conditions de (c) avec (B,C,ν) ; alors $Y = X - B$ vérifie les mêmes conditions avec $(0,C,\nu)$ (voir la preuve de (3.24)), donc Y est une semimartingale et comme $B \in \underline{\underline{B}}_{loc}(\underline{\underline{T}})$ par hypothèse, on a $X \in \underline{\underline{S}}_g(\underline{\underline{T}})$. Enfin (d) a été démontré dans (3.25).

Bibliographie

1 C. DOLEANS-DADE: Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D). Z. Wahr. 9, 309-314, 1968.

2 B. GRIGELIONIS, R. MIKULEVICIUS: On weak convergence of semimartingales. Lit. Math. Sb. XXI, 3, 9-24, 1981.

3 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes 714, 1979

4 J. JACOD: Processus à accroissements indépendants: une condition nécessaire et suffisante de convergence. Z. Wahr. 63, 109-136, 1983.

5 J. JACOD, A. KŁOPOTOWSKI, J. MEMIN: Théorème de la limite centrale et convergence fonctionnelle vers un processus à accroissements indépendants, la méthode des martingales. Ann. IHP (B) XVIII, 1-45, 1982.

6 R. LIPTCER, A. SHIRYAEV: Théorème limite central fonctionnel pour les semimartingales. Th. Proba. Appl. XXV, 683-703, 1980.

7 P.A. MEYER: Probabilités et Potentiel. Hermann, 1966.