MICHEL ÉMERY
WEI-AN ZHENG

Fonctions convexes et semimartingales dans une variété

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 501-518
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__501_0>

FONCTIONS CONVEXES ET SEMIMARTINGALES
DANS UNE VARIETE

par M. EMERY et W.A. ZHENG

It is well known that $\mathbb{R}^d$-valued semi-martingales (resp. local martingales) are transformed into real semi-martingales (resp. local submartingales) by convex functions. We extend this to the case when $\mathbb{R}^d$ is replaced by a manifold with an affine connection (convex functions are those whose restriction to all geodesics, considered as functions of one variable, are convex ; we do not require any additional smoothness).

Sur une variété munie d'une connexion affine, nous démontrons que les fonctions convexes (c'est-à-dire les fonctions dont la restriction à chaque géodésique, considérée comme une fonction d'une variable, est convexe) transforment les semimartingales en semimartingales et les martingales en sous-martingales locales, comme dans le cas bien connu des espaces affines.

Nous remercions Monsieur le Professeur Elworthy de ses suggestions et remarques sur une première version de ce travail.

Soit V une variété réelle de dimension d , munie d'une connexion affine Γ . Pour simplifier les énoncés et éviter la recherche des hypothèses minimales, nous supposerons V et Γ de classe C^∞ . Nous n'utiliserons la connexion que par l'intermédiaire de la famille de géodésiques qu'elle permet de tracer sur la variété et des martingales qu'elle permet de définir dans V ; on ne change donc rien en retranchant à Γ sa torsion : nous supposons dorénavant la connexion Γ sans torsion. Nous dirons qu'une partie A de V est Γ-convexe si, pour x et y dans A , il existe une géodésique qui joint x à y en restant dans A , et une seule à un changement affine de paramètre près.

Il est bien connu que deux points assez voisins de V peuvent toujours être joints par une géodésique qui dépend de façon C^∞ des deux points. Plus précisément, il existe une fonction w, définie et C^∞ dans un ouvert $\mathrm{Dom}\,w$ de $V \times V \times \mathbb{R}$ qui contient $\mathrm{Diagonale}(V) \times [0,1]$, à valeurs dans V, telle que

$$w(x,y,0) = x \ ; \ w(x,y,1) = y \ ;$$
$$\lambda \longmapsto w(x,y,\lambda) \text{ est une géodésique .}$$

Lorsqu'on regarde localement le réseau des géodésiques de la variété à travers une forte loupe, ce qu'on observe ressemble au réseau des droites de $\mathbb{R}^d$. Ceci se traduit par l'énoncé suivant, dont nous rejetons la démonstration en appendice.

LEMME 1. Soient a un point de V, W un voisinage Γ-convexe de a, relativement compact dans le domaine d'une carte locale et tel que $W \times W \times [0,1]$ soit relativement compact dans $\mathrm{Dom}\,w$. Après identification par la carte de W à une partie de $\mathbb{R}^d$, il existe un réel c (dépendant de la carte) tel que, pour $(x,y,\lambda) \in W \times W \times [0,1]$, on ait

$$\|w(x,y,\lambda) - (1-\lambda)x - \lambda y\| \leq 2c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \ .$$

Dans cette formule, $w(x,y,\lambda)$ fait intervenir la connexion et non la carte, $(1-\lambda)x+\lambda y$ la carte et non la connexion, et $\| \ \|$ est la norme euclidienne calculée dans $\mathbb{R}^d$ au moyen de la carte.

Une conséquence de ce lemme est le suivant, dont l'énoncé exact et la démonstration sont, eux aussi, condamnés à l'appendice.

LEMME 2. Avec les mêmes notations, il existe dans W un système de $d+1$ points tel que le "simplexe" obtenu par interpolation géodésique entre ces $d+1$ sommets soit un voisinage de a.

FONCTIONS CONVEXES SUR LA VARIETE

La définition qui suit semble due à Greene et Wu [5] ; Darling [2] a sans doute été le premier à utiliser ces fonctions en géométrie différentielle stochastique.

DEFINITION. Une fonction réelle f sur V sera dite Γ-convexe si, pour toute géodésique $g : I \longrightarrow V$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est convexe dans I.

Lorsque V est l'espace affine $\mathbb{R}^d$, cette définition est identique à la définition usuelle.

PROPOSITION 1. Soit f une fonction Γ-convexe sur V.

a) Elle est continue, et même localement lipschitzienne dans toute carte locale.

b) Plus précisément, la lecture de f dans toute carte locale est localement différence de deux fonctions convexes.

c) Pour $a \in V$ et $u \in T_a(V)$, soit $\delta f_a(u)$ la dérivée à droite en 0 de la fonction convexe d'une variable $t \longmapsto f(\exp_a(tu))$. La fonction positivement homogène δf_a est convexe sur l'espace vectoriel $T_a(V)$.

REMARQUES. Pour le b), nous montrerons un peu mieux : Lue dans une carte locale, f est localement la différence entre une fonction convexe et une fonction convexe de classe C^∞.

La fonction δf définie sur la variété tangente $T(V)$ par le c) n'est autre que la différentielle df quand la fonction f est de classe C^1 ; dans ce cas, δf_a est non seulement convexe, mais linéaire.

Démonstration de la proposition 1. Soit $a \in V$. Comme les propriétés à établir sont locales, on peut se restreindre à un voisinage W de a, vérifiant les hypothèses du lemme 1, et identifié à une boule de $\mathbb{R}^d$ au moyen d'une carte normale en a (car, dans une carte normale, les boules de rayon assez petit sont Γ-convexes : voir Helgason [7] page 35 ; en utilisant le lemme 1, on pourrait montrer que c'est encore vrai pour une carte quelconque). Comme nous identifions W à une boule, le point a s'appelle maintenant 0.

a) Par le lemme 2, un " simplexe " figure parmi les voisinages de 0. L'inégalité

$$f(w(x,y,\lambda)) \leq \sup(f(x),f(y)) \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

entraîne que, sur ce " simplexe ",

$$f \leq \sup \{f(x), \ x \text{ sommet du " simplexe "}\} \quad .$$

Ainsi, f est majorée sur un voisinage de 0. Dans un tel voisinage, que l'on peut choisir symétrique, on a, pour tout x, $w(x,-x,\frac{1}{2}) = 0$ (carte normale !), donc

$$f(x) \geq 2f(0) - f(-x) \geq 2f(0) - \sup(f)$$

et f est aussi minorée. Donc f est bornée au voisinage de 0.

Nous venons de montrer l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que la boule $\bar{B}(\varepsilon)$ de $\mathbb{R}^d$ soit Γ-convexe, incluse dans W, et que f soit bornée sur cette boule. Soient (x_n) et (y_n) deux suites dans $B(\varepsilon)$, tendant toutes deux vers 0, et telles que $x_n \neq y_n$. Pour vérifier que f est lipschitzienne au voisinage de 0, il suffit de montrer que la suite $(f(y_n)-f(x_n))/\|y_n - x_n\|$ contient une sous-suite bornée.

La géodésique qui joint x_n à y_n peut être prolongée au delà de y_n jusqu'à rencontrer la frontière $\partial B(\varepsilon)$ en un point z_n (ceci a lieu à condition que ε soit inférieur à l'inf des rayons de courbure des géodésiques contenues dans la boule $B(\varepsilon)$; c'est possible car cet inf tend vers l'infini quand ε tend vers zéro). On a donc des $\lambda_n \in]0,1[$ tels que $y_n = w(x_n, z_n, \lambda_n)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que z_n tend vers une limite $z \in \partial B(\varepsilon)$ et λ_n vers une limite $\lambda \in [0,1]$. Par passage à la limite, $0 = w(0,z,\lambda)$, ce qui entraîne $\lambda = 0$. La Γ-convexité de f permet d'écrire

$$\frac{f(z_n) - f(y_n)}{1-\lambda_n} \geq \frac{f(y_n) - f(x_n)}{\lambda_n} = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{\|y_n - x_n\|} \, \frac{\|y_n - x_n\|}{\lambda_n} .$$

Comme f est bornée dans $\bar{B}(\varepsilon)$ et comme λ_n tend vers zéro, le premier membre est borné. Par ailleurs,

$$\frac{y_n - x_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n}(w(x_n,z_n,\lambda_n) - w(x_n,z_n,0)) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} \frac{\partial w}{\partial \lambda}(x_n,z_n,\lambda)\, d\lambda$$

tend, quand n tend vers l'infini, vers $\frac{\partial w}{\partial \lambda}(0,z,0) \neq 0$, donc $\lim \frac{\|y_n - x_n\|}{\lambda_n} > 0$.
Ceci prouve que $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{\|y_n - x_n\|}$ reste borné (ou plutôt contient une sous-suite bornée) et l'assertion est établie.

b) La carte locale autour de a est maintenant arbitraire, et nous nous plaçons sur un voisinage de a vérifiant les hypothèses du lemme 1, et sur lequel f, lue dans la carte, est k-lipschitzienne (c'est possible grâce à ce qui précède). On a

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x+\lambda y) \\
&\quad\geq f(w(x,y,\lambda)) - f((1-\lambda)x+\lambda y) && (\Gamma\text{-convexité}) \\
&\quad\geq -k\, \|w(x,y,\lambda) - (1-\lambda)x - \lambda y\| && (\text{condition de Lipschitz}) \\
&\quad\geq -k\, 2c\lambda\, (1-\lambda)\, \|x-y\|^2 && (\text{lemme 1}) \\
&\quad= -k\, 2c\, [(1-\lambda)g(x) + \lambda g(y) - g((1-\lambda)x+\lambda y)] ,
\end{aligned}$$

où la fonction g est définie par $g(x) = \|x\|^2$.

Ceci montre que, dans le voisinage W , $f+2ckg$ est lue dans la carte comme une fonction convexe, donc, toujours dans la carte, $f = (f+2ckg) - 2ckg$ est différence de deux fonctions convexes.

c) Nous revenons nous placer dans une carte normale en a . Soient u et v dans $T_a(V)$ et λ dans $[0,1]$; posons $r = (1-\lambda)u + \lambda v$. Nous voulons montrer que $(1-\lambda)\delta f(u) + \lambda\delta f(v) - \delta f(r) \geq 0$. Le premier membre est la limite, pour t tendant vers zéro par valeurs positives, de

$$\frac{1}{t}[(1-\lambda)f(tu) + \lambda f(tv) - f(tr)]$$
$$= \frac{1}{t}[(1-\lambda)f(tu) + \lambda f(tv) - f(w(tu,tv,\lambda))]$$
$$+ \frac{1}{t}[f(w(tu,tv,\lambda) - f(tr)]$$

Le premier terme est non négatif, par Γ-convexité de f . Pour achever la démonstration, nous allons vérifier que le deuxième tend vers zéro. Pour t assez petit, en utilisant la condition de Lipschitz et le lemme 1, on obtient

$$\frac{1}{t}|f(w(tu,tv,\lambda)) - f(tr)| \leq \frac{k}{t}\|w(tu,tv,\lambda) - tr\| \leq \frac{k}{t}c\|tu - tv\|^2 .$$

Ceci tend vers zéro avec t . La proposition est établie. □

Meyer nous a fait observer que le c) admet une réciproque :

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> f <u>une fonction sur</u> V . <u>Pour que</u> f <u>soit</u> Γ-<u>convexe</u>, <u>il faut et il suffit que</u>, <u>pour chaque</u> $a \in V$, <u>il existe une forme linéaire</u> h <u>sur</u> $T_a(V)$, <u>telle que</u>, <u>sur un voisinage de</u> a , <u>l'on ait</u> $f - f(a) \geq h \circ \exp_a^{-1}$.

<u>Démonstration</u>. Condition nécessaire : Il suffit, en appliquant la proposition 1 c), de choisir h telle que $h \leq \delta f$ et de remarquer que, par convexité, on a toujours $f - f(a) \geq \delta f \circ \exp_a^{-1}$ .Condition suffisante : Si $g : I \longrightarrow V$ est une géodésique, $f \circ g$ est une fonction sur I telle que tout $t \in I$ a un voisinage U , sur lequel est définie une fonction affine h , avec $h(t) = f \circ g(t)$, $h \leq f \circ g$ sur U . Ceci entraîne que la fonction d'une variable $f \circ g$ est convexe, donc f est Γ-convexe. □

De même, le b) fournit une caractérisation des fonctions qui sont localement différences de deux fonctions Γ-convexes, montrant en particulier qu'elles ne dépendent pas du choix de Γ .

COROLLAIRE 2. Soit $a \in V$ et soit f une fonction sur V. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Au voisinage de a, f est différence de deux fonctions Γ-convexes.

(ii) Au voisinage de a, lue dans une carte locale, f est différence de deux fonctions convexes.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la proposition 1 b), où V est remplacée par un voisinage de a. Pour la réciproque, il suffit de démontrer que, si B est une boule de $\mathbb{R}^d$ munie d'une connexion affine Γ, toute fonction f, convexe pour la structure affine de $\mathbb{R}^d$, est localement différence de deux fonctions Γ-convexes. Un calcul tout-à-fait semblable à la démonstration de la proposition 1 b) montre que, sur un voisinage de 0 et pour une constante C assez grande, $f(x)+C\|x\|^2$ est Γ-convexe. Il suffit donc de vérifier que $g(x)=\|x\|^2$ est Γ-convexe. Mais on sait qu'une fonction g de classe C^2 est Γ-convexe si et seulement si la matrice symétrique $(D_{ij}-\Gamma^k_{ij}D_k)g$ est positive en chaque point. Ici, elle vaut

$$2\delta_{ij} - 2\sum_k \Gamma^k_{ij}(x)\,x^k \ ,$$

donc elle vaut $2\delta_{ij}$ en 0, et elle est positive sur un voisinage de 0. $\square$

FONCTIONS CONVEXES ET SEMIMARTINGALES

Dans ce paragraphe, nous démontrons les deux résultats annoncés dans l'introduction : Les fonctions Γ-convexes transforment les semimartingales en semimartingales et les Γ-martingales en sous-martingales locales.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ qui soit complète (chaque $\mathcal{F}_t$ contient tous les événements négligeables de $\mathcal{F}$) et continue à droite ($\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$). Parmi les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ que permet d'étudier une telle structure, nous nous intéresserons aux semimartingales réelles, c'est-à-dire aux processus adaptés (chaque X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable), càdlàg (pour chaque ω, $t \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction continue à droite sur $\mathbb{R}_+$ qui a en tout $t>0$ une limite à gauche) qui se décomposent en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. Notons tout de suite deux propriétés de ces processus qui nous seront utiles. Si X est càdlàg et s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt tels que $\sup_n T_n = \infty$ et que chaque processus arrêté X^{T_n-} (égal à X_t si $t < T_n$ et à X_{T_n-} si $t \geq T_n$, avec la convention $X_{0-} = 0$) soit une semimartingale, alors X est aussi une semimartingale. L'autre propriété est la stabilité par les fonctions : Si f est une fonction convexe, ou une fonction de classe C^2, et si X est une semimartingale, alors $f \circ X$ est aussi une semimartingale. Sur ces propriétés, et plus généralement sur tout ce qui concerne les semimartingales, on peut se reporter à Jacod [8] ou à Dellacherie-Meyer [4] ; pour les notations, nous suivons Dellacherie-Meyer [3] et [4].

Si V est une variété (de classe C^2 au moins ; nous la supposons toujours C^∞) et X un processus à valeurs dans V, on dit que X est une <u>semimartingale à valeurs dans</u> V si, pour toute fonction réelle f de classe C^2 sur V, $f \circ X$ est une semimartingale réelle. Dans le cas où $V = \mathbb{R}^d$, il suffit pour cela que les coordonnées X^i de X soient des semimartingales réelles. Toujours quand $V = \mathbb{R}^d$, on sait (Meyer [10]) que si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$, $f \circ X$ est encore une semimartingale.

Si f est une fonction réelle sur V, nous dirons que f opère sur les semimartingales si, pour toute semimartingale X à valeurs dans V, $f \circ X$ est une semimartingale réelle ; nous dirons que f opère localement sur les semimartingales si tout point de V a un voisinage ouvert W tel que la restriction de f à W opère sur les semimartingales à valeurs dans W (les semimartingales à valeurs dans W sont exactement les semimartingales X à valeurs dans V telles que pour tout t, X_t soit dans W et pour tout $t > 0$, X_{t-} soit dans W).

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> f <u>une fonction réelle sur</u> V, <u>qui opère localement sur les semimartingales</u>. <u>Alors</u> f <u>opère sur les semimartingales</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit X une semimartingale à valeurs dans V. Tout point de V a un voisinage ouvert relativement compact W, difféomorphe à une boule de $\mathbb{R}^d$, et tel que f opère sur les semimartingales à valeurs dans W. Soit (W_n) un recouvrement dénombrable de V par de tels ouverts, et soit (h_n) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. La suite des intérieurs des compacts

$$K_n = \{x \in V : \sum_{m \leq n} h_m(x) = 1\}$$

croît vers V, donc les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t : X_t \notin K_n\}$ tendent vers l'infini. Le lemme ci-dessous entraîne que, pour tout n, la fonction fh_n opère sur les semimartingales à valeurs dans V, donc

$$(f \circ X)^{T_n-} = \sum_{m \leq n} (fh_m \circ X)^{T_n-}$$

est une semimartingale réelle. Ceci montre que $f \circ X$ est une semimartingale. $\square$

LEMME 3. <u>Soit</u> g <u>une fonction réelle sur</u> V, <u>dont le support est compact et inclus dans un ouvert</u> U <u>difféomorphe à une boule de</u> $\mathbb{R}^d$. <u>On suppose que la fonction</u> $g_{|U}$ <u>opère sur les semimartingales à valeurs dans</u> U. <u>Alors</u> g <u>opère sur les semimartingales à valeurs dans</u> V.

<u>Démonstration</u>. Soit X une semimartingale à valeurs dans V. Soient K le support de g et L un compact tel que $K \subset \mathring{L} \subset L \subset U$. Posons

$$S_0 = 0 \quad ; \; T_n = \inf\{t \geqq S_n : X_t \notin \mathring{L}\} \quad ; \quad S_{n+1} = \inf\{t \geqq T_n : X_t \in K\} .$$

Puisque X est continu à droite, $X_{T_n} \notin \mathring{L}$ sur $\{T_n < \infty\}$ et $X_{S_{n+1}} \in K$ sur $\{S_{n+1} < \infty\}$. La suite $S_0 \leq T_0 < S_1 < T_1 < S_2 < T_2 < \ldots$ est strictement croissante tant qu'elle est finie, et, comme X a des limites à gauche, cette suite tend vers l'infini.

Soit u un difféomorphisme entre U et une boule de $\mathbb{R}^d$, et soit φ une fonction C^∞ à support compact dans U telle que $\varphi = 1$ sur L. La fonction $\bar{u}$ égale à 0 sur $V-U$ et à φu sur U est une fonction C^∞ sur V, à valeurs dans la boule $u(U)$, qui coïncide avec u sur le compact L. Le processus $Y = g \circ u^{-1} \circ \bar{u} \circ X$ est une semimartingale réelle, car, $u^{-1} \circ \bar{u}$ étant C^∞, $u^{-1} \circ \bar{u} \circ X$ est une semimartingale à valeurs dans U.

Sur $[\![T_n, S_{n+1}[\![$, $X \notin K$, donc $g \circ X = 0$; sur $[\![S_n, T_n[\![$, $X \in \mathring{L}$, donc $g \circ X = Y$. Ceci montre que $g \circ X$ est une semimartingale réelle. $\square$

THEOREME 1. <u>Toute fonction</u> Γ-<u>convexe sur</u> V (<u>ou</u>, <u>plus généralement</u>, <u>toute fonction qui est localement différence de deux fonctions</u> Γ-<u>convexes</u>) <u>opère sur les semimartingales</u>.

<u>Démonstration</u>. Par la proposition 2, il suffit de démontrer qu'une telle fonction opère localement sur les semimartingales. En se restreignant à un petit ouvert, on est ramené, par le corollaire 2 de la proposition 1, au cas où V est une boule de

$\mathbb{R}^d$ et la fonction une différence de deux fonctions convexes pour la structure affine de $\mathbb{R}^d$. La démonstration est alors exactement la même que dans $\mathbb{R}^d$ tout entier (Meyer [10] page 362).

Le problème réciproque, beaucoup plus difficile, de savoir si toutes les fonctions qui opèrent sur les semimartingales sont de ce type est, à notre connaissance, encore ouvert, même dans le cas où $V = \mathbb{R}^d$ $(d > 1)$.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où la semimartingale X à valeurs dans V est une Γ-martingale. Rappelons que cela signifie que X est continue, et que, dans tout ouvert $U \subset V$ muni de coordonnées locales (x^i), en notant $dX^i = dM^i + dA^i$ la décomposition de la semimartingale réelle X^i ($i^{\text{ième}}$ coordonnée de X, semimartingale dans l'ouvert prévisible $\{X \in U\}$) en une martingale locale continue et un processus à variation finie continu, on a, sur $\{X \in U\}$,

$$dA_t^i = -\frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(X_t)\, d\langle M^j, M^k\rangle_t$$

(où les Γ_{jk}^i sont les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte (x^i) et où la convention de sommation d'Einstein est en vigueur). Voir Bismut [1], Meyer [11] ou Darling [2] ; ce dernier définit les Γ-martingales par leur propriété d'être transformées en sous-martingales locales par les fonctions Γ-convexes de classe C^2. Nous allons ici étendre cela aux fonctions Γ-convexes quelconques.

THEOREME 2. <u>Soient</u> X <u>une</u> Γ-<u>martingale dans</u> V <u>et</u> f <u>une fonction</u> Γ-<u>convexe sur</u> V. <u>Le processus réel</u> $f \circ X$ <u>est une sous-martingale locale</u>.

<u>Démonstration</u>. Il suffit d'établir que tout point de V a un voisinage ouvert W tel que, pour toute Γ-martingale Y à valeurs dans W, $f \circ Y$ est une sous-martingale. En effet, on pourra alors recouvrir V par une suite (W_n) de tels ouverts, et on en déduira que le processus continu à variation finie figurant dans la décomposition de $f \circ X$ est localement croissant dans l'ouvert $\{X \in W_n\}$, donc globalement croissant (pour plus de détails sur ce procédé de localisation, voir Meyer-Stricker [12] ou Zheng [11]).

Donc, quitte à remplacer V par un petit ouvert, on peut supposer que V est une boule de $\mathbb{R}^d$, que la fonction Γ-convexe f est globalement k-lipschitzienne (et donc bornée) et que tout point de V est le centre d'une carte normale globale (voir Kobayashi-Nomizu [9] page 149). Nous noterons $e^i(a,b)$ la $i^{\text{ième}}$ coordonnée, dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{|a}$ de $\exp_a^{-1}(b)$, c'est-à-dire que les d fonctions $e^i(a,.)$ forment une carte normale de centre a et que la fonction $\frac{\partial e^i}{\partial y^j}(x,y)$ vaut δ^i_j sur la diagonale $\{x=y\}$. Nous désignerons par $\Gamma^i_{jk}(a,.)$ les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte $(e^i(a,.))$; puisque cette carte est normale, et puisque nous avons supposé la connexion sans torsion, on a $\Gamma^i_{jk}(x,x) = 0$. Quitte à restreindre encore un peu l'ouvert V, nous supposons que les dérivées $\frac{\partial e^i}{\partial y^j}(x,y)$ sont globalement bornées par une constante c et les fonctions $\Gamma^i_{jk}(x,y)$ uniformément continues sur $V\times V$.

Sous ces hypothèses, soit X une Γ-martingale à valeurs dans V. Nous voulons montrer que $f\circ X$ est une sous-martingale locale. Quitte à arrêter X à un temps arbitrairement grand, on peut supposer le processus croissant

$$C_t = \sum_{i,j} \int_0^t |d\langle X^i, X^j\rangle_s|$$

borné. Pour montrer que le processus borné $f\circ X$ est une sous-martingale, nous allons vérifier que, si S et T sont deux temps d'arrêt bornés tels que $S\leq T$, on a $E[f(X_T)] \geq E[f(X_S)]$. Pour $\varepsilon>0$, définissons une suite croissante (R_n) de temps d'arrêt tels que $S\leq R_n\leq T$ par

$$R_0 = S \;\; ; \;\; R_{n+1} = T\wedge \inf\{\, t\geq R_n : \sup_{i,j,k} |\Gamma^i_{jk}(X_{R_n},X_t)| \geq \varepsilon \} \quad .$$

Puisque les fonctions $\Gamma^i_{jk}(x,y)$ sont uniformément continues et nulles sur la diagonale, les temps R_n croissent stationnairement vers T. On peut donc écrire

$$E[f(X_T)-f(X_S)] = \sum_n E[f(X_{R_{n+1}})-f(X_{R_n})]$$

$$\geq \sum_n E[\delta f_{X_{R_n}}(\exp^{-1}_{X_{R_n}}(X_{R_{n+1}}))]$$

(car la restriction de f à une géodésique issue de X_{R_n} est convexe)

$$= \sum_n E[E[\delta f_{X_{R_n}}(\exp^{-1}_{X_{R_n}}(X_{R_{n+1}}))|\mathcal{F}_{R_n}]]$$

$$\geq \sum_n E[\delta f_{X_{R_n}}(E[\exp^{-1}_{X_{R_n}}(X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}])]$$

(car $\delta f_{X_{R_n}}$ est convexe sur l'espace tangent $T_{X_{R_n}}(V)$)

$$\geq -k \sum_n E[\|E[\exp^{-1}_{X_{R_n}}(X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]\|]$$

(car $|\delta f_a(u)| \leq k\,\|u\|$)

$$\geq -k \sum_n E[\sum_i |E[e^i(X_{R_n},X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]|] \quad .$$

Il reste à évaluer $e^i(X_{R_n},X_{R_{n+1}})$. Fixons $x \in V$. En écrivant que X est une Γ-martingale dans le système de coordonnées globales $e^i(x,.)$, on obtient

$$e^i(x,X_{R_{n+1}}) = e^i(x,X_{R_n}) + N^i_{R_{n+1}} - N^i_{R_n}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{R_n}^{R_{n+1}} \Gamma^i_{jk}(x,X_t)\; d\langle e^j(x,X),e^k(x,X)\rangle_t$$

(où N^i est une martingale locale réelle dépendant de x)

$$= e^i(x,X_{R_n}) + N^i_{R_{n+1}} - N^i_{R_n}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{R_n}^{R_{n+1}} \Gamma^i_{jk}(x,X_t)\frac{\partial e^j}{\partial y^p}(x,X_t)\;\frac{\partial e^k}{\partial y^q}(x,X_t)\; d\langle X^p,X^q\rangle_t \quad .$$

Comme, dans cette formule, tout le reste est borné sur l'intervalle $[\![R_n,R_{n+1}]\!]$, la martingale locale N^i aussi. C'est donc une vraie martingale, ce qui fournit, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{R_n}$ et en remplaçant x par X_{R_n} , qui est $\mathcal{F}_{R_n}$-mesurable,

$$E[e^i(X_{R_n},X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]$$
$$= -\frac{1}{2}\,E[\int_{R_n}^{R_{n+1}} (\Gamma^i_{jk}\frac{\partial e^j}{\partial y^p}\frac{\partial e^k}{\partial y^q})(X_{R_n},X_t)\; d\langle X^p,X^q\rangle_t \;|\; \mathcal{F}_{R_n}] \quad ,$$

d'où

$$|E[e^i(X_{R_n},X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]| \leq \frac{d^2}{2}\,\varepsilon\, c^2\; E[C_{R_{n+1}} - C_{R_n}|\mathcal{F}_{R_n}]$$

et

$$E[\sum_i |E[e^i(X_{R_n},X_{R_{n+1}})\,|\,\mathcal{F}_{R_n}]|] \leq \frac{d^3}{2}\,\varepsilon\, c^2\; E[C_{R_{n+1}} - C_{R_n}] \quad .$$

Revenant à notre estimation de $E[f(X_T)-f(X_S)]$, on obtient

$$E[f(X_T)-f(X_S)] \geq -k\frac{d^3}{2}\varepsilon\, c^2 \sum_n E[C_{R_{n+1}} - C_{R_n}] = -k\frac{d^3}{2}\varepsilon\, c^2\; E[C_T - C_S] \quad .$$

Comme ε est arbitraire, nous avons établi que $E[f(X_T)] \geq E[f(X_S)]$, et le théorème est démontré. $\square$

On remarquera que cette démonstration du théorème 2 est indépendante du théorème 1 : Nous avons établi directement que $f\circ X$ est une sous-martingale, sans savoir a priori que c'est une semimartingale.

Voici des applications de ce théorème. La première, qui nous a été signalée par Elworthy, est une nouvelle démonstration, probabiliste, d'un résultat de nature géométrique.

COROLLAIRE 1. Soient W une variété riemannienne, V une variété munie d'une connexion, h une application harmonique de W vers V et f une fonction Γ-convexe sur V. Sur W, $f\circ h$ est alors une fonction sous-harmonique.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $f\circ h$ transforme les mouvements browniens en sous-martingales locales. Soit donc B un mouvement brownien à valeurs dans W, défini sur un intervalle stochastique prévisible $[\![0,\zeta[\![$. Comme h est harmonique, $h\circ B$ est une Γ-martingale à valeurs dans V, et $f\circ h\circ B$ est donc une sous-martingale locale. $\square$

Ce théorème permet aussi d'éliminer une hypothèse parasite dans un résultat de Meyer ([10] page 98).

COROLLAIRE 2. Si O est un point d'une variété de Hadamard V (variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle partout non positive), et X une Γ-martingale à valeurs dans V, alors $d(X_t,O)$ est une sous-martingale locale.

En effet, la fonction $d(.,O)$ est Γ-convexe.

Ceci permet d'étendre à toutes les variétés de Hadamard un résultat bien connu quand $V = \mathbb{R}^d$.

COROLLAIRE 3. Si X est une Γ-martingale dans une variété de Hadamard V, alors les événements

$$\{\omega : \{X_t(\omega), t\geq 0\} \text{ est relativement compact dans } V\}$$

et $\{\omega : \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) \text{ existe dans } V\}$ sont presque sûrement égaux.

En effet, pour tout O dans V, la sous-martingale locale continue $d(X_t,O)$ converge si et seulement si elle est bornée ; il suffit donc de choisir un nombre fini de points O_i tels que les fonctions $d(O_i,.)$ séparent les points.

Plus généralement, le théorème 2 permettrait de redémontrer un résultat de He, Yan et Zheng [6] : Sur une variété munie d'une connexion, tout point admet un voisinage compact tel que presque toute trajectoire de Γ-martingale à valeurs dans ce compact converge. L'exemple ci-dessous, où V est une sphère, se généralise directement aux hypersphères de toutes dimensions.

COROLLAIRE 4. *Si* X *est une* Γ-*martingale à valeurs dans une sphère, presque toutes les trajectoires de* X *relativement compactes dans un hémisphère ouvert sont convergentes.*

Démonstration. Si O est un point de la sphère, la fonction $d^2(O,.)$ est Γ-convexe sur l'hémisphère de pôle O. Soit (O_n) une suite dense sur la sphère. Une trajectoire de X (ou tout autre ensemble) relativement compacte dans un hémisphère ouvert l'est nécessairement dans l'hémisphère ouvert de pôle O_n pour une infinité de valeurs de n — deux suffiraient — ; il ne reste qu'à utiliser la convergence des sous-martingales continues bornées $d^2(X_t,O_n)$ correspondantes. □

On notera que les hémisphères ouverts possèdent une sorte de maximalité pour cette propriété de convergence : Dans tout hémisphère fermé, il existe une Γ-martingale qui ne converge pas, par exemple un mouvement brownien sur le grand cercle frontière.

APPENDICE : LEMMES 1 ET 2.

LEMME 1. Soient a un point de V, W un voisinage Γ-convexe de a relativement compact dans le domaine d'une carte locale et tel que $W\times W\times[0,1]$ soit relativement compact dans $\mathrm{Dom}\, w$. Il existe alors une constante c dépendant de la carte, telle que, pour $(x,y,\lambda)\in W\times W\times[0,1]$, on ait, après identification de W à une partie de $\mathbb{R}^d$ au moyen de la carte,

$$\|w(x,y,\lambda)-(1-\lambda)x-\lambda y\| \leqq 2c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 .$$

Démonstration. Soit $\bar{w}(x,z,\lambda)=w(x,x+z,\lambda)-x-\lambda z$. Pour x fixé, soit g " la " géodésique telle que $g(0)=x$, $\dot{g}(0)=D_j$ ($j^{\text{ième}}$ vecteur de base). Comme $w(x,g(t),\lambda)=g(\lambda t)$, on a, en dérivant par rapport à t,

$$\frac{\partial w^i}{\partial y^k}(x,g(t),\lambda)\,\dot{g}^k(t) = \lambda\dot{g}^i(\lambda t) \quad ;$$

pour $t=0$, on obtient, en utilisant $\dot{g}^k(0)=\delta^k_j$, $\frac{\partial w^i}{\partial y^j}(x,x,\lambda)=\lambda\delta^i_j$, que l'on peut encore écrire $\frac{\partial \bar{w}^i}{\partial z^j}(x,0,\lambda)=0$.

En dérivant par rapport à λ, on obtient

$$(*)\qquad \frac{\partial^2\bar{w}^i}{\partial\lambda\partial z^j}(x,0,\lambda)=0 .$$

Par ailleurs, $\bar{w}^i(x,0,\lambda)=0$ (définitions de w et $\bar{w}$), donc

$$(**)\qquad \frac{\partial\bar{w}^i}{\partial\lambda}(x,0,\lambda)=0 .$$

Les relations $(*)$ et $(**)$ montrent que la fonction $z\longmapsto\frac{\partial\bar{w}^i}{\partial\lambda}(x,z,\lambda)$ et ses dérivées partielles d'ordre un sont nulles pour $z=0$. Comme les variables (x,z,λ) restent dans un compact (hypothèse sur W), on en déduit

$$\left|\frac{\partial\bar{w}^i}{\partial\lambda}(x,z,\lambda)\right| \leqq c^i\,\|z\|^2 ,$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\bar{w}(x,z,\lambda)=0$ pour $\lambda=0$ ou $\lambda=1$,

$$|\bar{w}^i(x,z,\lambda)| \leqq c^i \inf(\lambda,1-\lambda)\,\|z\|^2 \leqq c^i\,2\lambda(1-\lambda)\,\|z\|^2 ,$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Définissons par récurrence des fonctions w_k $(k\geq 1)$ par

$$w_1(x,y,\lambda)=w(x,y,\lambda)$$
$$w_k(x_0,\dots,x_k;\lambda_1,\dots,\lambda_k)=w(w_{k-1}(x_0,\dots,x_{k-1};\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}),x_k,\lambda_k) .$$

Nous ne cherchons pas à préciser le domaine d'existence exact de w_k ; il nous suffit de savoir que cela existe quand les x_i sont assez voisins pour être tous dans un même ouvert Γ-convexe et les λ_i entre 0 et 1.

LEMME 2. <u>Soient</u> a <u>et</u> W <u>comme dans le lemme 1. Il existe</u> $x_0,\dots,x_d$ <u>dans</u> W <u>tels que le " simplexe "</u>

$$\{w_d(x_0,\dots,x_d;\lambda_1,\dots,\lambda_d) : (\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in[0,1]^d\}$$

<u>soit un voisinage de</u> a.

(Contrairement aux vrais simplexes, définis dans les espaces affines, cet ensemble dépend en général de l'ordre de numérotation de ses $d+1$ sommets.)

<u>Démonstration</u>. Nous notons ω l'interpolation euclidienne $\omega(x,y,\lambda) = (1-\lambda)x+\lambda y$ et ω_k les itérées successives de ω, définies semblablement à w_k. Le lemme 1 implique que, dans W,

$$\|(w-\omega)(x,y,\lambda)\| \leq c\,\|x-y\|^2 \quad .$$

Nous allons en déduire que, pour $x_0,\dots,x_k$ dans W,

$$(*)\qquad \|(w_k-\omega_k)(x_0,\dots,x_k;\lambda_1,\dots,\lambda_k)\| \leq c_k \sup_{0\leq i<j\leq k} \|x_i-x_j\|^2 \ .$$

En effet, la décomposition

$$\begin{aligned}(w_k-\omega_k)(\dots) &= (w-\omega)(w_{k-1}(\dots),x_k,\lambda_k)\\ &\quad + \omega(w_{k-1}(\dots),x_k,\lambda_k) - \omega(\omega_{k-1}(\dots),x_k,\lambda_k)\end{aligned}$$

fournit la récurrence

$$\begin{aligned}\|w_k-\omega_k\| &\leq c\,\|w_{k-1}-x_k\|^2 + \|w_{k-1}-\omega_{k-1}\|\\ &\leq c\,(\|w_{k-1}-\omega_{k-1}\|+\|\omega_{k-1}-x_k\|)^2 \ + \ \|w_{k-1}-\omega_{k-1}\|\\ &\leq c\,(\,c_{k-1}\sup\|x_i-x_j\|^2 + \sup\|x_i-x_j\|\,)^2 + c_{k-1}\sup\|x_i-x_j\|^2\\ &\leq [\,c\,(c_{k-1}\text{diamètre}(W)+1)^2 + c_{k-1}]\ \sup_{i,j}\|x_i-x_j\|^2\\ &\qquad\qquad \text{car } \|x_i-x_j\| \leq \text{diamètre}(W)\end{aligned}$$

et $(*)$ est établie.

Le voisinage W étant toujours identifié à une boule de $\mathbb{R}^d$ et a à son centre 0, soient $x_0,\dots,x_d\in W$ les sommets d'un simplexe affine S qui est un voisinage de 0 et contient donc une boule ouverte $B(\delta)$. Choisissons $t\in\,]0,1[$ assez petit pour que

$$2\,t\,c_d \sup_{i,j} \|x_i - x_j\|^2 \leqq \delta$$

(où c_d est la constante figurant dans la relation (*)), et considérons le simplexe tS, de sommets $tx_0,\dots,tx_d$.

A chaque point y intérieur à tS, on peut faire correspondre le point $(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ de $]0,1[^d$ tel que

$$y = \omega_d(tx_0,\dots,tx_d;\lambda_1,\dots,\lambda_d) \quad ;$$

cette correspondance est continue. Soit

$$f(y) = w_d(tx_0,\dots,tx_d;\lambda_1,\dots,\lambda_d)$$

où les λ_i sont ceux définis ci-dessus. La fonction f est une application continue, définie sur l'intérieur du simplexe tS, à valeurs dans le " simplexe "

$$\Sigma_t = \{w_d(tx_0,\dots,tx_d;\lambda_1,\dots,\lambda_d) : (\lambda_1,\dots,\lambda_d) \in [0,1]^d\} \quad ,$$

et vérifiant

$$\begin{aligned} \|y - f(y)\| &\leqq c_d \sup_{i,j} \|tx_i - tx_j\|^2 && \text{(relation (*))} \\ &\leqq \tfrac{1}{2} t\,\delta && \text{(hypothèse sur } t\text{)} \end{aligned}$$

Comme la boule $B(t\delta)$ est incluse dans tS, en appliquant le lemme ci-dessous avec $\varepsilon = \frac{1}{2} t\,\delta$ et $r = t\delta$, on obtient le résultat annoncé : Le " simplexe " Σ_t contient la boule $B(\frac{1}{2}t\delta)$. □

LEMME. <u>En notant</u> $B(r)$ <u>la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon</u> r <u>dans</u> $\mathbb{R}^d$, <u>soit</u> f <u>une fonction continue de</u> $B(r)$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^d$ <u>telle que, pour tout</u> x, $\|f(x) - x\| \leqq r - \varepsilon < r$. <u>Alors</u> $f(B(r))$ <u>contient</u> $B(\varepsilon)$.

<u>Démonstration</u>. Soit $y \in B(\varepsilon)$. Choisissons un réel r' dans $]\|y\|+r-\varepsilon\,, r[$ et une fonction continue φ de $[0,r']$ dans $[0,1]$ qui vaille 1 sur $[0,\|y\|+r-\varepsilon]$ et 0 en r'. Pour $x \in \overline{B}(r')$, posons

$$g(x) = x + \varphi(\|x\|)(f(x) - x) \quad ,$$

de sorte que g est une fonction continue sur $\overline{B}(r')$ qui vaut l'identité sur la frontière $\partial B(r')$. Il existe $z \in B(r')$ tel que $g(z) = y$, car sinon, en associant à chaque x l'intersection de la demi-droite qui va de y vers $g(x)$ avec $\partial B(r')$, on aurait une rétraction continue de $\overline{B}(r')$ sur $\partial B(r')$. Ce z vérifie

$$\|z\| \leqq \|y\| + \|z - g(z)\| \leqq \|y\| + \|f(z) - z\| \leqq \|y\| + r - \varepsilon \quad ;$$

or, sur $\overline{B}(\|y\|+r-\varepsilon)$, $g = f$, donc $y = f(z)$. □

REFERENCES

[1] J.M. BISMUT. Mécanique aléatoire. Lecture Notes in Math. 866, Springer 1981.

[2] R.W.R. DARLING. Martingales in manifolds — Definition, examples, and behaviour under maps. Séminaire de Probabilités XVI (Supplément : Géométrie Différentielle stochastique), Lecture Notes in Math. 921, Springer 1982.

[3] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV. Hermann, Paris, 1975.

[4] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilités et Potentiel. Chapitres V à VIII : Théorie des martingales. Hermann, Paris 1980.

[5] R.E. GREENE et H. WU. On the Subharmonicity and Plurisubharmonicity of Geodesically Convex Functions. Indiana University Math. Journal 22, 641-653, 1973.

[6] S.W. HE, J.A. YAN et W.A. ZHENG. Sur la convergence de certaines semimartingales. Séminaire de Probabilités XVII, Springer (A paraître).

[7] S. HELGASON. Differential Geometry and Symmetric spaces. Academic Press, New-York, 1962.

[8] J. JACOD. Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. Lecture Notes in Math. 714, Springer 1979.

[9] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU. Foundations of Differential Geometry. Volume 1. Interscience Publishers, New York 1963.

[10] P.A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, Springer 1976.

[11] P.A. MEYER. Géométrie stochastique sans larmes. Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Math. 850, Springer 1981.

[12] P.A. MEYER et C. STRICKER. Sur les semimartingales au sens de L. Schwartz. Mathematical Analysis and Applications, Part B, Advances in Math. Supplementary Studies, Vol 7 B . Academic Press, New-York, 1981.

[13] W.A. ZHENG. Semi-martingales in Predictable Random Open Sets. Séminaire de Probabilités XVI, Lecture Notes in Math 920, Springer 1982.

I.R.M.A. (Laboratoire associé au CNRS)
Département de Mathématique
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex
FRANCE