SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES NEVEU

Sur la charge associée à une mesure aléatoire réelle stationnaire

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 391-401
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__391_0>

SUR LA CHARGE ASSOCIEE A UNE
MESURE ALEATOIRE REELLE
STATIONNAIRE

par

J. NEVEU (*)

Résumé : Etant donné une mesure aléatoire réelle (de Radon) stationnaire N définie sur l'espace $[\Omega, \mathcal{A}, P; (\theta_t, t \in R)]$, la variable aléatoire positive

$$W = \sup_{t \in R_+} (N(]-t,0]) - t)$$

représente à l'instant zéro la charge d'un serveur assurant la demande de service $N(dt)$ au rythme dt. (A tout instant la charge du serveur est la quantité de service demandée antérieurement et non encore effectuée). Les propriétés de W sont bien connues lorsque N est un processus ponctuel discret ; nous les étendons ici dans le cas général en remarquant que dans le cas d'une mesure aléatoire de la forme $N(dt) = \sigma\theta_t\, dt$ par exemple, ces propriétés prennent une forme un peu différente.

(*) Laboratoire de PROBABILITES
Tour 56 - 3ème étage
4, Place Jussieu
75230 PARIS Cédex 05

Soit $(\theta_t, t \in R)$ un flot mesurable réel défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui préserve la mesure et soit ergodique. Soit N une mesure aléatoire réelle stationnaire par ce flot, c'est-à-dire une application mesurable de Ω dans le cône des mesures de Radon positives sur R qui vérifie la propriété d'équivariance $N(\theta_t \omega) = \tau_t \circ N(\omega)$ $(\omega \in \Omega,\ t \in R)$ où $(\tau_t, t \in R)$ désigne le flot des translations $(\tau_t (s) = s - t)$ sur R et son extension aux mesures de Radon.

Deux cas particuliers de mesures aléatoires stationnaires sont plus intéressants du point de vue des applications :

- les mesures aléatoires ponctuelles stationnaires, d'une part,

et

- les mesures aléatoires de la forme $\sigma(\theta_t \omega)\, dt$ où σ est une v. a. r. positive et intégrable, d'autre part.

Notons la "décomposition de LEBESGUE" suivante, qui se démontre très simplement.

PROPOSITION 1 : Pour toute mesure aléatoire stationnaire N, il existe une v. a. r. positive σ unique à une équivalence près, telle que pour presque tout ω, la mesure $\sigma(\theta_t \omega)\, dt$ soit la partie absolument continue de $N(\omega, \cdot)$ par rapport à la mesure de LEBESGUE.

Nous dirons dans la suite que σ est la partie absolument continue de N.

Démonstration : Soit Θ l'involution de $\Omega \times R$ définie par $\Theta[(\omega, t)] = (\theta_t \omega, - t)$. Elle applique la mesure positive $P(d\omega)\, N(\omega, dt)$ sur le produit d'une mesure positive σ-finie $\hat{P}$ sur Ω (la mesure de Palm de N) et de la mesure de Lebesgue λ sur R. Si σ désigne alors la v.a.r. positive unique à une équivalence près, telle que $\sigma \cdot P$ soit la partie P-absolument continue de $\hat{P}$, la mesure produit $\sigma(\omega)\, P(d\omega)\, \lambda(dt)$ sera aussi la partie $P(d\omega)\, \lambda(dt)$ - absolument continue de $\hat{P}(d\omega)\, \lambda(dt)$

sur $\Omega \times R$; ensuite par transposition par Θ puisque $\Theta[f(\omega)\ P(d\omega)\ \lambda(dt)] = f(\theta_t\omega)\ P(d\omega)\ \lambda(dt)$, la mesure $\sigma(\theta_t\omega)$ $P(d\omega)\ \lambda(dt)$ sera la partie $P(d\omega)\ \lambda(dt)$ - absolument continue de $P(d\omega)\ N(\omega,dt)$ ce qui équivaut à dire que pour P presque tout ω, $\sigma(\theta_t\omega)\ \lambda(dt)$ est la partie absolument continue de $N(\omega,dt)$ par rapport à $\lambda(dt)$. ■

La masse totale $i = \hat{P}(\Omega)$ de la mesure de Palm de N s'appelle l'intensité de N car elle vérifie l'égalité $E[N(F)] = i\ \lambda(F)$ pour tout borélien F de R.

PROPOSITION 2 : Si N est une mesure aléatoire stationnaire d'intensité $i < 1$, la v.a.r. positive

$$W = \operatorname*{Sup}_{t \in R_+} (N(]-t,o]) - t)$$

est p.s. finie.

La f.a.r. positive et stationnaire $(W(t) = W\circ\theta_t\ ,\ t \in R)$ est cadlag, ses seules discontinuités sont les sauts éventuels de la mesure N, elle vérifie l'équation différentielle stochastique

$$(1) \qquad d\,W(t) + 1_{\{W(t)\ >\ o\}}\,dt + 1_{\{W(t)\ =\ o\}}\,\sigma\theta_t dt = N(dt)$$

où σ désigne la partie absolument continue de N.

Enfin $\sigma \leq 1$ sur $\{W = o\}$ et

$$(2) \qquad \int_{\{W\ =\ o\}} (1-\sigma)\,dP = 1 - i,$$

de sorte que $P(W = o) \geq 1 - i$, l'égalité ayant lieu si $\sigma = o$ p.s.

<u>Démonstration</u> : les v.a.r. positives

$$W_u = \sup_{0 \leq t \leq u} (N(]-t,0]) - t)$$

sont intégrables car $W_u \leq N(]-u,0])$ et $E[N(]-u,0])] = iu \leq u$; elles croissent avec u et tendent vers W lorsque $u \uparrow \infty$.

De plus si $0 \leq v \leq u$

$$W_u\, \theta_v = \sup_{0 \leq t \leq u} (N(]v-t, v]) - t)$$

par la stationnarité de N et comme

$$\sup_{v \leq t \leq u} (N(]v-t,v]) - t) = N(]0,v]) - v + W_{u-v}$$

tandis que :

$$\sup_{0 \leq t \leq v} (N(]v-t,v]) - t) = N(]0,v]) - v + M_v$$

à condition de poser :

$$M_v = \sup_{0 \leq s \leq v} (s - N(]0,s])) \qquad (v \in R_+),$$

nous pouvons écrire que :

$$W_u\, \theta_v = N(]0,v]) - v + \max(W_{u-v}, M_v) \qquad (u,v \in R_+) ;$$

Il est facile de vérifier que la f.a. réelle $(M_v, v \in R_+)$ est positive, croissante et continue, et telle que $M_v \leq v$.

En faisant tendre $u \uparrow \infty$ dans l'équation précédente, nous obtenons que la v.a. $W = \lim_u \uparrow W_u$ de la proposition vérifie l'égalité

$$v + W o\, \theta_v = N(]0,v]) + \max(W, M_v) \qquad (v \in R_+).$$

Cela montre d'abord que l'évènement $\{W < \infty\}$ est invariant par les θ_v $(v \in R_+)$ et donc que sa probabilité vaut 0 ou 1 par l'ergodicité du flot.

D'autre part, en prenant l'espérance des deux membres de l'équation en W_u, nous pouvons écrire, si $o \leqq v \leqq u$, que

$$E[N(]o,v]) - v + (M_v - W_{u-v})^+] = E[W_u\ \theta_v - W_{u-v}]$$
$$= E[W_u - W_{u-v}] \geqq o$$

puisque W_u est intégrable et supérieur à W_{u-v} ; en faisant tendre $u \uparrow \infty$ il vient alors :

$$E[(M_v - W)^+] \geqq (1 - i)v$$

Si $i < 1$, le second membre est strictement positif avec v et il est donc impossible dans ce cas que W soit p.s. infini, ce qui implique que :

$P(W < \infty) = 1$ lorsque $i < 1$ d'après ce qui précède.

On sait que pour une transformation θ préservant la probabilité P et une fonction réelle p.s. finie f, la fonction $f o\theta - f$ possède une espérance nulle dès qu'elle est intégrable (que f elle-même soit intégrable ou non). Lorsque W est p.s. finie, en particulier lorsque $i < 1$, l'équation en W montre donc que :

$$E[(M_v - W)^+] = (1 - i)\ v \qquad (v \in R_+).$$

Montrons ensuite qu'il existe une mesure aléatoire stationnaire de la forme $\eta(\theta_t\omega)dt$ avec $o \leqq \eta \leqq 1$ sur Ω telle que p.s.

$$v + W\theta_v - W = N(]o,v]) + \int_0^v \eta\theta_s\ ds \qquad (v \in R_+)$$

En effet, pour tout ω fixé, la fonction d'intervalles

$$]u, u+v] \longrightarrow v + Wo\theta_{u+v} - Wo\theta_u - N(]u, u+v])$$

qui vaut encore :

$$\{v + W\theta_v - W - N(]o,v])\}\ o\theta_u = (M_v - W)^+ o\theta_u \qquad (u \in R, v \in R_+)$$

d'après ce qui précède, est additive, continue en v, positive et majorée par v ; elle est donc l'intégrale sur les intervalles d'une mesure positive, inférieure à la mesure de Lebesgue. Cette mesure aléatoire (elle dépend manifestement mesurablement de ω) est évidemment stationnaire ; puisqu'elle est majorée par la mesure de Lebesgue, sa mesure de Palm $\hat{P}$ est majorée par P, c'est-à-dire de la forme $\eta.P$ pour une v.a. η à valeurs dans $[o,1]$; la mesure aléatoire elle-même est alors p.s. égale à $\eta(\theta_t\omega)\ dt$.

D'après la formule que nous venons de démontrer, p.s. la f.a. $(W(t) = W o \theta_t,\ t \in R)$ est cadlag et ses discontinuités sont exactement les sauts (positifs) de la mesure aléatoire N ; en particulier si $N = \sigma\theta_t\ dt$, la f.a. $W(\cdot)$ est continue sur R. De plus elle satisfait l'équation différentielle stochastique

(3) $\quad dW(t) + (1 - \eta\theta_t)\ dt = N\ (dt)$

sur R. Il reste à identifier η. Or d'après ce qui précède et le théorème ergodique local

$$\eta = \lim_{v \downarrow o} \text{p.s. } \frac{1}{v} \int_o^v \eta\theta_s\ ds = \lim_{v \downarrow o} \text{p.s. } \frac{1}{v}\ (M_v - W)^+ \quad ;$$

cela montre d'abord que $\eta = o$ sur $\{W > o\}$ puisque

$$\lim_{v \downarrow o} M_v = o.$$

Etablissons ensuite que $\eta = \lim_{v \downarrow o} \frac{1}{v} M_v = 1 - \sigma$ sur $\{W = o\}$.

D'après le théorème classique de dérivation de Lebesgue, si σ désigne la v.a. associée à N par la proposition 1,

$$\lim_{v \downarrow o} \frac{1}{v}\ N(\omega,]u,u+v]) = \sigma(\theta_u\omega)$$

pour $P(d\omega)du$ presque tout (ω,u) ; comme $N(\omega,]u,u+v])$ $= N(\theta_u\omega,\ ]o,v])$, si A désigne l'évènement

$$A = \{\omega : \lim_{v \downarrow o} \frac{1}{v}\ N(\omega,\ ]o,v]) = \sigma(\omega)\}$$

Cela revient à dire que l'ensemble $\{(\omega,u) : \theta_u\omega \notin A\}$ est $P(d\omega)du$ négligeable et puisque P est invariante par le flot, cela montre que $P(A^c) = o$. Or sur A

$$\lim_{v \downarrow o} \frac{1}{v} M_v = [1 - \sigma(\omega)]^+$$ par définition des M_v. Enfin

sur $\{W = o\}$, $N(]-t,o]) \leq t$ pour tout $t \in R_+$ et comme par symétrie de ce qu'on vient de démontrer

$$\lim_{t \downarrow o} \frac{1}{t} N(]-t, o]) = \sigma \quad \text{p.s.},$$

on a donc :

$$\sigma \leq 1 \quad \text{p.s. sur } \{W = o\}.$$

Cela achève de prouver que :

(4) $\eta = 1_{\{W = o\}} (1 - \sigma)$ p.s.

et donc que :

$$1 - \eta\theta_t = 1_{\{W\theta_t > o\}} + 1_{\{W\theta_t = o\}} \sigma\theta_t$$

Enfin par application du théorème de convergence dominée à l'égalité $E[(M_v - W)^+] = v(1 - i)$, on obtient que $E(\eta) = 1 - i$ c'est-à-dire que :

$$\int_{\{W = o\}} (1 - \sigma) \, dP = 1 - i. \quad \blacksquare$$

Après le résultat d'unicité que constitue la proposition suivante, nous montrerons que la variable aléatoire η de la démonstration précédente s'interprète comme étant la disponibilité du serveur à l'instant zéro.

<u>PROPOSITION 3</u> : <u>Sous les hypothèses de la proposition précédente, la v.a.r.</u> W <u>est à une équivalence près, l'unique v.a.r. positive telle que la f.a. stationnaire</u> $(W\circ\theta_t,\ t\in\mathbb{R})$ <u>soit une solution cadlag de l'équation (1) et telle que</u> $\sigma \leq 1$ <u>sur</u> $\{W = o\}$.

<u>Démonstration</u> : Supposons que W^* soit une seconde v.a.r. positive p.s. finie jouissant des propriétés de la proposition ; alors pour tout $t\in\mathbb{R}_+$

$$W^* = W^*\theta_{-t} - \int_{-t}^{o} (1_{\{W^*\theta_s > o\}} + 1_{\{W^*\theta_s = o\}}\,\sigma\theta_s)\,ds + N(]-t,o]) - t$$

$$\geq N(]-t,o]) - t$$

et il en résulte que $W^* \geq W$. Comme la v.a. W vérifie aussi l'égalité de la première ligne, il vient par différence :

$$(W^* - W) - (W^* - W)\theta_{-t} = \int_{-t}^{o} (\sigma\theta_s - 1)\,1_{\{W\theta_s = o < W^*\theta_s\}}\,ds.$$

Le deuxième membre est une v.a.r. négative (car $\sigma \leq 1$ sur $\{W = o\}$) et intégrable qui d'après la forme du premier membre, possède une espérance nulle ; les deux membres sont donc p.s. nuls. Ainsi, la v.a. positive $W^* - W$ est p.s. invariante par le flot et donc constante p.p. Cette constante ne peut être que nulle car sinon, la v.a. W^* serait p.s. strictement positive et l'égalité ci-dessus entraînerait que :

$$\int_{-t}^{o} (\sigma\theta_s - 1)\,1_{\{W\theta_s = o\}}\,ds = o \quad (t\in\mathbb{R}_+)$$

et donc que :

$$E[(\sigma - 1)\,1_{\{W = o\}}] = o \quad ;$$

or ceci contredit la formule (2) de la proposition précédente. Nous avons ainsi établi que :

$$W^* = W \quad p.s. \quad \blacksquare$$

Considérons pour terminer, l'application $t \to t + W(t)$; elle translate l'instant $t \in R$ au premier instant auquel toute la demande formulée jusqu'à t (t compris) aura pu être satisfaite. De plus, si $N(\{t\}) \neq o$, la demande ponctuelle $N(\{t\})$ sera satisfaite pendant l'intervalle de temps :

$$]t + W(t-),\ t + W(t)]$$

de longueur :

$$\Delta W(t) = N(\{t\}),$$

si le serveur sert les demandes dans leur ordre d'arrivée. Ces considérations rendent plus intuitive la première partie de la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : Sous les hypothèses de la proposition 2, si $N = N_1 + N_2$ est la décomposition de N en mesure ponctuelle stationnaire $N_1 = \sum_n \sigma_n \varepsilon_{T_n}$ et en mesure diffuse ($N_2(\omega,\{t\}) = o$ sur $\Omega \times R$), la mesure aléatoire stationnaire $N^* = N^*_1 + N^*_2$ où $N^*_1(dt) = (\sum_n 1_{]T_n + W(T_n-),\ T_n + W(T_n)]})\ \lambda(dt)$ et où N^*_2 est l'image de N_2 par $t \to t + W\circ\theta_t$ est donnée par

$$N^*\ (dt) = (1 - \eta\theta_t)\ dt$$

où η est la v.a. à valeurs dans $[o,1]$ de la formule (4).

<u>La mesure aléatoire</u> N^* *<u>est donc majorée par la mesure de Lebesgue et inversement</u>* W *<u>est à une équivalence près la plus petite v.a.r. positive, telle que l'application</u>* $t \to t + W\theta_t$ *<u>transforme</u>* N *<u>de la manière précédente en une mesure aléatoire majorée par la mesure de LEBESGUE</u>*.

<u>Démonstration</u> : L'intégrale de toute fonction borélienne positive $f : R \to R_+$ par la mesure aléatoire N^* est donnée par :

$$\int_R f(s)\ N^*(ds) = \sum_n \int_{T_n+W(T_{n-})}^{T_n+W(T_n)} f(s)ds + \int_R f(s+W(s))\ N_2(ds)$$

Or, d'après la formule (3)

$$\int f(s+W(s))\ N_2\ (ds) = \int_{\{s\ :\ \Delta W(s)\ =\ o\}} f(s+W(s))\quad d(s+W(s)) - \eta\theta_s\ ds$$

puisque les sauts de W coïncident avec la partie ponctuelle de N ; par conséquent, par le changement de variable $t \to t+W(t)$

$$\int_R f(s)\ N^*(ds) = \int_R f(u)du - \int_R f(s+W(s))\quad \eta\theta_s\ ds$$

$$= \int_R f(u)\ (1 - \eta\theta_u)du$$

car $\eta\theta_s = o$ si $W(s) > o$.

Enfin, si W^* est une v.a.r. positive telle que $t + W^*\theta_t$ soit cadlag en t et transforme la mesure N en une mesure majorée par la mesure de Lebesgue, la masse $N(]-t,o])$ est pour tout $t \in R_+$ appliquée sur l'intervalle $]-t + W^*\theta_{-t}, W^*]$

et l'hypothèse de majoration de la mesure image par la mesure de Lebesgue entraîne que :

$$W^* + t - W^*\theta_{-t} \leq N_1]-t,o]) \qquad (t \in R_+) .$$

La définition de W montre alors que $W^* \geq W$. ∎

Bibliographie :

A.A. BOROVKOV - "Random Processes in Queuing Theory" Springer Verlag 1976.

J. NEVEU - "Processus ponctuels". Lect. Notes Math. 598, p. 249-447 Springer Verlag 1977.