Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Laurent Schwartz

Calculs stochastiques directs sur les trajectoires et propriétés des boréliens porteurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 271-326
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__271_0>

CALCULS STOCHASTIQUES DIRECTS SUR LES TRAJECTOIRES ET PROPRIETES DE BORELIENS PORTEURS.

par Laurent SCHWARTZ

INTRODUCTION

Cet article vise un double but :

1) On utilise en probabilités des intégrales stochastiques $H.Z$, des équations différentielles stochastiques $X = x + H(X,.).Z$, des crochets $[Z,Z]$ de semi-martingales. Leur calcul est global, le résultat est défini à un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable près, $\mathbb{P}$ étant la probabilité de base. Cependant, si au lieu de $\mathbb{P}$ on a une famille $\mathcal{P}$ de probabilités, on sait calculer un représentant commun de ces objets pour toutes les $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, qui est alors défini à un ensemble $\mathcal{P}$-négligeable près, i.e. $\mathbb{P}$-négligeable pour toute $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. Le but ici est d'aller plus loin. On appellera W l'espace des trajectoires cadlag. Prenons par exemple le cas d'une équation différentielle stochastique. Pour chaque trajectoire cadlag $w \in W$, on trouvera un algorithme formel donnant une solution ξ de $\xi = x + H(\xi,.).w$, ξ fonction de w ; on résout trajectoire par trajectoire, sans souci d'aucune probabilité. Pour une trajectoire donnée w, $\xi(w)$ n'a aucun sens profond (sauf si w est à variation finie), et d'ailleurs n'est pas une trajectoire cadlag. Mais, si Z est une $\mathbb{P}$-semi-martingale $\mathbb{P}$-presque sûrement cadlag sur un Ω muni des données habituelles, Z définit une application de Ω dans W (définie $\mathbb{P}$ ps.), $\omega \mapsto Z(\omega)$, et alors $\xi \circ Z$ sera un représentant de la solution de l'équation différentielle ; donc $\xi(w)$, individuellement, n'aura pas de signification précise, mais $\xi \circ Z$ en aura une. Au lieu de résoudre, pour un champ H donné, des équations différentielles stochastiques, pour des Ω , $\mathbb{P}$, Z divers, on n'en résoudra plus qu'une, sur W, et non stochastique. Pour l'essentiel, ce résultat est connu, Bichteler l'a déjà formulé ; mais nous donnons ici beaucoup de propriétés nouvelles, celles de 1) des théorèmes (1.2), (2.4), etc... L'algorithme

particulier choisi n'a aucun intérêt (si ce n'est celui d'être éventuellement valable pour des calculs pratiques), l'intérêt est l'existence et l'unicité essentielle d'un tel calcul universel (par exemple, théorème (1.2), parties 1) et 5)).

2) Reprenons les mêmes résultats. Pour $w \in W$ donnée, la "solution" $\xi(w)$ n'est pas cadlag, même si w l'est. Cependant, si l'on prend $\xi \circ Z$, elle est $\mathbb{P}$ ps. cadlag. Il existe donc une partie $W_{\bullet}$ de W telle que, pour toute réalisation $(\Omega,\mathbb{P},Z)$, $Z^{-1}(W_{\bullet})$ porte $\mathbb{P}$. Nous montrons alors qu'on peut choisir $W_{\bullet}$ borélien ; $W \setminus W_{\bullet}$ peut être négligé, mais le caractère borélien de $W_{\bullet}$ dans W fait qu'il est, par exemple, encore lusinien si W l'est ; $W_{\bullet}$ est un borélien portant toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur W qui font du processus canonique π, $(t,w) \to \pi_t(w) = w_t$, une semi-martingale, § 3.

Nous reprenons alors cette étude à propos des désintégrations régulières. Supposons donnés Ω, et une famille $(\mathcal{C}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$ de tribus sur Ω, croissante et continue à droite (sans complétion), et supposons qu'un <u>ensemble $\mathcal{P}$</u> de probabilités sur Ω ait une désintégration régulière commune, $(\mathbb{P}_t^{\omega})_{(t,\omega) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega}$. Il y a alors des propriétés qui sont vérifiées $\mathcal{P}$ps., i.e. pour les ω d'un ensemble $\Omega' \subset \Omega$, portant toutes les $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. Or ici encore, on peut aller plus loin, et trouver un borélien Ω' de Ω, portant toutes les $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, tel que ces propriétés soient vraies pour tout $\omega \in \Omega'$.

Les démonstrations sont naturelles, parfois un peu longues, en général sans surprise ; encore faut-il les faire, et on est heureux que ces résultats soient exacts. La meilleure preuve qu'on n'en est pas sûr à l'avance, est que certains résultats usuels qui donnent un $\mathcal{P}$ps., ne donnent peut être pas un borélien portant $\mathcal{P}$ pour lequel ils restent vrais. Nous indiquons à ce propos 4 problèmes qui, de ce point de vue, ou d'un point de vue voisin, restent ouverts : remarque (5.3), partie 3) du théorème (5.5), remarque (7.15), remarque (7.23).

§ 1. INTEGRALES STOCHASTIQUES

(1.1) Nous calculerons des intégrales stochastiques $J = H_{-}.Z$, où Z sera une semi-martingale à valeurs dans un espace vectoriel G de dimension m, H un processus cadlag ($H_{-}(t,\omega) = H(t_{-},\omega)$), à valeurs dans $\mathcal{L}(G;E)$, donc J une semi-martingale à valeurs dans E, espace vectoriel de dimension N. Nous noterons par W'^{m}, $W'^{N,m}$, W'^{N} l'ensemble de toutes les trajectoires à valeurs dans G, $\mathcal{L}(G;E)$, E respectivement, pour les temps $t \in \overline{\mathbb{R}}_{+} = [0,+\infty]$; ainsi $W'^{m} = G^{\overline{\mathbb{R}}_{+}}$; W désignera les sous-ensembles de trajectoires cadlag correspondantes. Dans de nombreux cas, quand il n'y aura aucune ambiguité, nous écrirons W' ou W au lieu de W'^{m}, $W'^{N,m}$, W'^{N}, ou $W^{m}, W^{N,m}$, W^{N}.

On appellera π le processus canonique sur W'^{m} ou W^{m}, $\pi_{t}(w) = w_{t}$. Alors $\mathcal{W}'^{m}$ sera la tribu borélienne de W'^{m}, engendrée par les π_{t}, $t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}$, $\mathcal{W}^{m}$ sera la tribu induite sur W^{m}, $(\mathcal{W}'^{m}_{t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}}$ sera la plus petite famille de tribus sur W'^{m}, croissante et continue à droite, pour laquelle chaque $\pi_{t} : W \to G$ soit $\mathcal{W}'_{t}$-mesurable ; $(\mathcal{W}^{m}_{t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}}$ sera la famille induite sur W. On peut donc faire du calcul des probabilités sur $(W', \mathcal{W}', (\mathcal{W}'_{t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}})$, $(W, \mathcal{W}, (\mathcal{W}_{t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}})$; dans ce dernier cas, π, adaptée cadlag, est optionnelle.

On peut considérer sur $W'^{N,m} \times W'^{m}$ les tribus analogues ; $\mathcal{W}'^{N,m} \otimes \mathcal{W}'^{m}$ est la tribu engendrée par les projections $\pi_{1} : (\eta,w) \mapsto \eta$ et $\pi_{2} : (\eta,w) \mapsto w$, et $((\mathcal{W}'^{N,m} \otimes \mathcal{W}'^{m})_{t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}}$ est la plus petite famille de tribus croissante et continue à droite pour laquelle les t-ièmes projections $(\eta,w) \mapsto \eta_{t}$ et $(\eta,w) \mapsto w_{t}$ soit $(\mathcal{W}'^{N,m} \otimes \mathcal{W}'^{m})_{t}$-mesurable. Ces deux processus π_{1} et π_{2}, adaptés cadlag sur $W^{N,m} \times W^{m}$, sont optionnels.

Nous appellerons système $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathbb{P}, H, Z)$ la donnée d'un ensemble Ω, d'une tribu $\mathcal{O}$ sur Ω, d'une famille $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}}$ de sous tribus de $\mathcal{O}$, croissante et continue à droite (sans complétion), d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{O})$, et de deux processus H,Z, $\mathcal{C}$-adaptés $\mathbb{P}$ ps. cadlag, à valeurs dans $\mathcal{L}(G;E)$ et G respectivement, Z $\mathbb{P}$-semi-martingale. Parfois certains des objets $H,Z,\mathbb{P}$ seront absents. Il ne sert à rien de supposer que H et Z sont seulement $(\mathcal{C} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}} = (\mathcal{C}_{t} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}})$-adaptés, $\mathcal{C}_{t} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}}$ $\mathbb{P}$-complétée de $\mathcal{C}_{t}$, parce qu'alors il suffit de considérer le même système avec $\mathcal{C} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}}$ au lieu de $\mathcal{C}$.

Si H est un processus sur $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C})$, il définit une application $(t,\omega) \mapsto H_t(\omega)$ de $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ dans $\mathcal{L}(G;E)$, mais alors aussi une application $\omega \to H(\omega)$ (où $H(\omega)$ est la trajectoire $t \mapsto H_t(\omega)$) de Ω dans $W'^{N,m}$); on les désignera par la même lettre H. Si H est optionnel sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (relativement à $\mathcal{C}$) ,$\omega \mapsto H_t(\omega)$ est $\mathcal{C}_t$-mesurable (et $\omega \mapsto H_T(\omega)$ $\mathcal{C}_T$-mesurable pour tout temps d'arrêt T), donc borélienne ($\mathcal{O}$-mesurable), donc H est borélienne de Ω dans W'^N.

<u>Définition (1.1.1)</u> : On dit qu'un ensemble S de $W^{N,m} \times W^m$ est porteur si, <u>pour tout système</u> $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},H,Z)$, $\mathbb{P}$ ps. $(H,Z) \in S$, (i.e. pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, $(H(\omega),Z(\omega)) \in S$) ou encore $(H^{-1} \times Z^{-1})(S)$ porte $\mathbb{P}$. Le théorème démontré dans ce paragraphe est le suivant :

<u>Théorème (1.2)</u> : Il existe une application (non unique !) $J : (\eta,w) \mapsto \eta_- \cdot\cdot\, w$ (♦) de $W'^{N,m} \times W'^m$ dans W'^N, borélienne de $W \times W$ dans W', ayant les propriétés suivantes :

1) $\eta_- \cdot\cdot\, w$ est nul au temps 0, et dans $[0,\tau|$ si w y est constante ($[0,\tau|$ = indifféremment $[0,\tau[$ ou $[0,\tau]$) ; si η et w sont connues dans $[0,\tau|$, $\eta_- \cdot\cdot\, w$ aussi ; si w est constante ou si η est nulle dans $|\alpha,\beta| \subset \bar{\mathbb{R}}_+$, $\eta_- \cdot\cdot\, w$ y est constante ; en particulier, si w est arrêtée en T, $\eta_- \cdot\cdot\, w$ aussi ; et $(\eta_- \cdot\cdot\, w)^T = \eta_- \cdot\cdot\, w)^T$.
Le processus $(t,(\eta,w)) \mapsto (\eta_- \cdot\cdot\, w)_t$ est optionnel de $\bar{R}_+ \times (W \times W)$ dans E, donc $(\eta,w) \mapsto \eta_- \cdot\cdot\, w$ est borélien de $W \times W$ dans W'^N.

2) Il existe un <u>borélien</u> porteur $(W^{N,m} \times W^m)_.$ de $W^{N,m} \times W^m$ dont l'image par J est dans W^N : pour $(\eta,w) \in (W^{N,m} \times W^m)_.$, $\eta_- \cdot\cdot\, w$ est cadlag ;

3) Pour un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},H,Z)$, le processus

(1.3) $$H_- \cdot\cdot\, Z, (H_- \cdot\cdot\, Z)(\omega) = H(\omega)_- \cdot\cdot\, Z(\omega)$$

est une $\mathbb{P}$- semi-martingale $\mathbb{P}$ ps. cadlag, représentant de l'intégrale stochastique

---

(♦) C'est une pure écriture ; η n'étant pas cadlag, η_- n'a donc pas de sens.

$H_-.Z$ (1). Si H et Z sont $\mathcal{C}$-optionnels, $H_-..Z$ aussi (cela se produira par exemple si H et Z sont partout cadlag, mais $H_-..Z$ ne l'est pas pour autant ; mais $(H_-..Z)(\omega)$ est toujours cadlag pour $\omega \in (H,Z)^{-1}((W\times W).)$, borélien dans Ω et portant $\mathbb{P}$) . Si on a seulement un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},H,Z),(H^{-1}\times Z^{-1})(W\times W).$ porte toutes les $\mathbb{P}$ qui rendent H et Z ps. cadlag et Z semi-martingale.

4) Pour tout système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},H,Z)$, la loi de $H_-.Z$, l'intégrale stochastique, c'est à dire $(H_-.Z)(\mathbb{P})$, probabilité sur $W^{N,m}$, ne dépend que de la loi de (H,Z), $(H,Z)(\mathbb{P})$, probabilité sur $W^{N,m}\times W^m$, par :

$$(1.3.1)\qquad (H_-.Z)(\mathbb{P}) = (H_-..Z)(\mathbb{P}) = J((H,Z)\mathbb{P}).$$

5) L'application $(\eta,w)\mapsto \eta_-..w$ est "essentiellement" unique au sens suivant : deux de ces applications coïncident sur un <u>borélien</u> porteur de $W^{N,m}\times W^m$.

La philosophie de ce théorème, c'est qu'il n'y a pas des intégrales stochastiques, pour des $\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},H,Z$ divers et variés, mais une seule, $J:(\eta,w)\mapsto \eta_-..w$, de $W\times W$ dans W', non stochastique.

La partie probabiliste de ce théorème est dûe à Bichteler, seuls sont nouveaux les résultats 1), et surtout l'existence et les propriétés du <u>borélien</u> $(W\times W).$ de $W\times W$.

<u>Démonstration</u> :

(1.4) Pour n fixé, nous déterminerons une suite de temps

$T_{o,n} = 0,\dots,T_{i+1,n}(\eta) = T_{i+1,n} = \operatorname{Inf}\{t\in\overline{\mathbb{Q}}_+,\ t\geq T_{i,n}\ ;|\ \eta_t-\eta_{T_{i,n}}| > \frac{1}{2^n}\}$;

$T_{i+1,n} = \overline{+\infty}$ si { } est vide (2). Nous appellerons $\eta_{n^-}\in W'^{N,m}$ la trajectoire

$$\eta_{n^-} = \sum_{i=o}^{+\infty} 1_{]T_{i,n}(\eta),T_{i+1,n}(\eta)]}\ \eta_{T_{i,n}(\eta)}\quad ;$$

η_{n^-} est constante aux temps $\geq T_n = \operatorname{Sup}_i T_{i,n}$, nulle au temps 0. Si $\eta\in W^{N,m}$ est cadlag, $\overline{\mathbb{Q}}_+$ peut être remplacé par $\overline{\mathbb{R}}_+$, les $T_{i,n}$ tendent stationnairement vers $\overline{+\infty}$ pour $i\to+\infty$ (et sont donc en nombre fini), ce que nous écrirons $T_{i,n}\underset{i\to\infty}{\uparrow\uparrow}\overline{+\infty}$,

$T_{i,n} < T_{i+1,n}$ si $T_{i,n} < \overline{+\infty}$; les $T_{i,n} : \eta \mapsto T_{i,n}(\eta)$, restreints à $W^{N,m}$ muni de la famille de tribus $(W_t^{N,m})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$, sont des temps d'arrêt. En outre, la connaissance de η dans $[0,\tau]$ entraîne celle de $\eta_{n}{}_{-}$.

On notera aussi que

(1.5) $\quad |\eta_{n}{}_{-} - \eta_{-}| \leq \frac{1}{2^n}$, si η est cadlag ($\eta_{-}(t) = \eta(t_{-})$).

La fonction $\eta_{n}{}_{-}$ est toujours caglad dans $[0,T_n[$, est nulle dans $]T_n,+\infty]$, donc caglad sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ si η est cadlag, et alors $\eta_{n}{}_{-}$ tend vers η_{-} uniformément pour $n \to +\infty$.

On définit alors une intégrale $(\eta_{-}..w)^{(n)}$, w trajectoire :

(1.6)
$$(\eta_{-}..w)_t^{(n)} = \overline{\sum_{i=0}^{+\infty}} \eta_{T_{i,n}} (w_{t \wedge T_{i+1,n}} - w_{t \wedge T_{i,n}})$$
$$(\eta_{-}..w)^{(n)} = \overline{\sum_{i=0}^{+\infty}} \eta_{T_{i,n}} (w^{T_{i+1,n}} - w^{T_{i,n}}),$$

<u>avec la convention, que nous ferons une fois pour toutes jusqu'à la fin de l'article,</u> que la somme d'une série ou la limite d'une suite, avec le signe $\overline{}$ (barre), $\overline{\Sigma}$ ou $\overline{\lim}$, vaut 0 si la série ou la suite n'est pas convergente.

On voit que $(\eta_{-}...w)^{(n)}$ est connue dans $[0,\tau|$ si η et w le sont, qu'elle est cadlag si η et w le sont, qu'elle vaut 0 au temps 0, et dans $[0,\tau|$ si w y est constante. En outre, si w est constant dans un intervalle $|\alpha,\beta|$, $(\eta_{-}..w)^{(n)}$ aussi (cela se voit en remarquant que chaque terme de la série a ces propriétés ; $\eta_{T_{i,n}}(w_{t \wedge T_{i+1,n}} - w_{t \wedge T_{i,n}})$ vaut 0 dans $[0,T_{i,n}]$, $\eta_{T_{i,n}}(w_t - w_{T_{i,n}})$ dans $[T_{i,n},T_{i+1,n}]$, $\eta_{T_{i,n}}(w_{T_{i+1,n}} - w_{T_{i,n}})$ dans $[T_{i+1,n}, +\infty]$; chaque terme est constant dans $|\alpha,\beta|$, sauf éventuellement ceux pour lesquels $]T_{i,n},T_{i+1,n}[\cap]\alpha,\beta[\neq \emptyset$, mais ceux-ci sont constants dans $|\alpha,\beta|$ si w y est constant).

Enfin nous poserons, par définition ,

(1.7)
$$J(\eta,w) = \eta_{-}..w = \overline{\lim_{n \to +\infty}} (\eta_{-}..w)^{(n)} ,$$

et nous l'appellerons l'intégrale de η_{-} par rapport à w. Elle dépend complètement de l'algorithme utilisé (suite des $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$) . Elle n'est pas en général cadlag, même si η et w le sont.

(1.7.1) Supposons η nulle dans $|\alpha,\beta|$. Regardons $(\eta_-..w)^{(n)}$; chacun de ses termes est constant dans $|\alpha,\beta|$ sauf ceux pour lesquels $[T_{i,n}, T_{i+1,n}[\cap |\alpha,\beta| \neq \emptyset$; ou bien tous les $T_{i,n}$ sont $\leqslant \alpha$, alors tous les termes sont constants ; sinon, soit i le dernier indice pour lequel $T_{i,n} \leqslant \alpha$; alors $T_{i+1,n} > \alpha$ donc $\geqslant \beta$ si η est nul dans $|\alpha,\beta|$, et le i-ième terme est le seul à ne pas être constant dans $|\alpha,\beta|$; mais alors nécessairement $|\eta_{T_{i,n}}| \leqslant \frac{1}{2^n}$, et alors, si $t,t' \in |\alpha,\beta|$, $|\eta_{T_{i,n}}(w_{t'} - w_t)| \leqslant \frac{1}{2^n} |w_{t'} - w_t|$, la variation de t à t' de $(\eta_-..w)^{(n)}$ est de module $\leqslant \frac{1}{2^n} |w_{t'} - w_t|$; donc $\eta_-..w$ est bien constant dans $|\alpha,\beta|$ si η y est nulle.

(1.8) Restreignons-nous aux W. Les $T_{i,n} = T_{i,n}(\eta)$ sont alors des temps d'arrêt sur W, donc $\eta \mapsto \eta_{T_{i,n}}$ est $\mathcal{W}_{T_{i,n}}$ -mesurable (donc borélienne), puis

$$(t,(\eta,w)) \longmapsto (\eta_{T_{i,n}}(w^{T_{i+1,n}} - w^{T_{i,n}}))_t \quad \text{est optionnelle}$$

sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times (W \times W)$ à valeurs dans E, donc aussi la somme $\overline{\sum_{i=o}^{+\infty}}$, c'est à dire $(t,(\eta,w)) \mapsto (\eta_-..w)_t^{(n)}$, et la limite $\overline{\lim_{n\to\infty}}$ c'est à dire $(t,(\eta,w)) \to (\eta_-..w)_t$. Par suite $(\eta,w) \mapsto (\eta_-..w)^{(n)}$ est borélienne de $W^{N,m} \times W^m$ dans W^N et $(\eta,w) \mapsto (\eta_-..w)$ de $W^{N,m} \times W^m$ dans W'^N, ce qui achève de démontrer 1).

(1.9) Montrons alors la partie 3) de l'énoncé (c'est le théorème de Bichteler). Il est évident que (H,Z) est $\mathbb{P}$ pp. définie $\mathbb{P}$-mesurable de Ω dans $W^{N,m} \times W^m$, donc partout définie et borélienne si H et Z sont partout cadlag, et J est borélienne de $W^{N,m} \times W^m$ dans W'^N, donc $H_-..Z$ est $\mathbb{P}$-mesurable de Ω dans W'^N, borélienne si H et Z sont partout cadlag . On peut, pour démontrer 3), supposer H et Z partout cadlag, donc $\mathcal{C}$-optionnelles, en supprimant de Ω une partie $\mathbb{P}$-négligeable. Or, dès que H et Z sont $\mathcal{C}$-optionnelles, les $T_{i,n}$ étant des temps d'arrêt sur Ω pour $\mathcal{C}$, $H_{T_{i,n}}$ et $Z^{T_{i,n}}$ sont $\mathcal{C}_{T_{i,n}}$ -mesurable et $\mathcal{C}$-optionnelle respectivement , $H_{T_{i,n}}(Z^{T_{i+1,n}} - Z^{T_{i,n}})$ est $\mathcal{C}$-optionnelle, donc aussi $\overline{\sum_{i=o}^{+\infty}}$ et $\overline{\lim_{n\to+\infty}}$, donc $H_-..Z$ est $\mathcal{C}$-optionnelle (donc $\mathcal{C}$-adaptée) . Ensuite $(H_-..Z)^{(n)}$ est une version de l'intégrale stochastique $H_{n\,-}.Z$; si, comme toujours pour un processus f, on pose $f^*(\omega) = \sup_t |f(t,\omega)|$, alors $\sum_{n=o}^{+\infty} (H_{n+1^-} - H_{n^-})^* \leqslant \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < +\infty$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((H_-..Z)^{(n+1)} - (H_-..Z)^{(n)} \right)^* < +\infty$$

$\mathbb{P}$ ps, $(H_-.. Z)^n$ converge vers un représentant de l'intégrale stochastique et aussi vers $H_-.. Z$, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, uniformément en $t^{(\blacklozenge)}$. Ceci démontre 3), dont 4) se déduit aussitôt.

(1.10) Il reste à trouver le borélien porteur $(W \times W)_\bullet$ de $W \times W$. On a vu à (1.8) que $(\eta,w) \mapsto (\eta_-.. w)^{(n)}$ et $\mapsto \eta_-..w$ sont boréliennes de $W \times W$ dans W'. Alors $(\eta,w) \to \sup_{t \in \overline{\mathbb{Q}}_t} |(\eta_-.. w)_t^{(m)} - (\eta_-..w)_t^{(n)}|$ est réelle $\geqslant 0$ borélienne sur $W \times W$; l'ensemble des η,w pour lesquelle elle tend vers 0 pour $m,n \to +\infty$ est un borélien $(W \times W)_\bullet$. Comme les $(\eta_-..w)^{(n)}$ sont cadlag, c'est exactement l'ensemble des (η,w) pour lesquelles $(\eta_-.. w)^{(n)}$ converge pour $n \to +\infty$, nécessairement vers $\eta_-..w$, uniformément sur $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, pour $(\eta,w) \in (W \times W)_\bullet$, $\eta_-..w$ est cadlag. Et, puisque $\mathbb{P}$ ps. les $(H_-..Z)^{(n)}$ convergent vers $H_-..Z$, uniformément en t, $\mathbb{P}$ ps. $(H,Z) \in (W^{N,m} \times W^m)_\bullet$, ce qui prouve 2) ; comme $(W \times W)_\bullet$ est borélien, il porte $(H,Z)(\mathbb{P})$.

(1.11) Si on a deux applications $J_{(1)}$, $J_{(2)}$, l'intersection des boréliens porteurs correspondants, $(W \times W)_{\bullet(1)} \cap (W \times W)_{\bullet(2)}$ est encore porteuse ; sur elle, J_1 et J_2 sont boréliennes à valeur dans W^N, et la diagonale de $W^N \times W^N$ est borélienne, donc $\{J_{(1)} = J_{(2)}\}$ est borélien dans $(W \times W)_{\bullet(1)} \cap (W \times W)_{\bullet(2)}$ donc dans $W \times W$, et porteur par (3). ∎

(♦) La méthode de l'introduction des $T_{i,n}$ est dûe à Klaus Bichteler [1], théorème (7.14), page 80, c'est évidemment là qu'est le fondement essentiel du théorème (1.2), c'est le résultat qui fait que W^m sera porteur.

§ 2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES, CAS DE SEMI-MARTINGALES DIRECTRICES DISCONTINUES

Ici Z sera encore une semi-martingale à valeurs dans un espace vectoriel G, H sera une fonction $(x,t) \mapsto H(x,t)$ sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G;E)$, et on cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique, de valeur initiale x au temps 0 : (♦)

$$(2.1) \qquad X^x = x + H(X,.)_- \,.\, Z \;, \quad X \text{ à valeurs dans } E.$$

On suppose que, pour tout x, $H(x,.)$ est cadlag $((H\,(X,.)_-)_t = H(X_{t_-},t_-))$ et que H est uniformément lipschitzienne :

$$(2.2) \qquad |H(x',t) - H(x'',t)| \leq K|x'-x''|.$$

Pour abréger, nous ferons comme si H ne dépendait pas du temps, et nous écrirons $H(X)_-.Z$ pour $H(X,.)_-.Z$.

Nous allons, comme au § 1, la résoudre trajectoire par trajectoire. Nous construirons un algorithme de "résolution formelle de l'équation"

$$(2.3) \qquad \xi = x + H(\xi)_- \,.\, w,$$

pour $x \in E$, $w \in W'$ qui ensuite donnera de vraies solutions. H sera fixée une fois pour toutes, x variera au § 3, mais pas ici.

Théorème (2.4) : Il existe une application (non unique) $\xi : w \mapsto \xi(w)$ de W'^m dans W'^N, ayant les propriétés suivantes :

1) $\xi(w)$ vaut x au temps 0, et dans $[0,\tau|$ si w y est constante ; si w est connue dans $[0,\tau|$, $\xi(w)$ aussi ; si w est constante dans $|\alpha,\beta| \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, $\xi(w)$ aussi ; en particulier, si w est arrêtée en T, $\xi(w)$ aussi, et $(\xi(w))^T = \xi(w^T)$.
Le processus $(t,w) \mapsto (\xi(w))_t$ est optionnel de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times W^m$ dans E, donc ξ est borélienne de W dans W'^N ;

(♦) On peut traiter les équations différentielles dans un cadre infiniment plus général. Volontairement nous ne l'avons pas cherché, dans un but de simplification.

2) Il existe un borélien porteur $W_{\bullet}^{m}$ de W^{m}, tel que $\xi(W_{\bullet}^{m}) \subset W^{N}$: si $w \in W_{\bullet}^{m}$, $\xi(w)$ est cadlag ;

3) Soient $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$. Alors

$$(2.5) \qquad \xi(Z),\ (\xi(Z))(\omega) = \xi(Z(\omega)),$$

est un représentant de la solution de l'équation différentielle stochastique, en particulier elle est une $\mathbb{P}$-semi-martingale $\mathbb{P}$ ps-cadlag ; si Z est optionnelle (par exemple si elle est partout cadlag), $\xi(Z)$ l'est aussi (mais elle n'est pas partout cadlag, même si Z l'est).

4) La loi de la solution X^{x} de l'équation différentielle, $X^{x}(\mathbb{P})$, probabilité sur W^{N}, ne dépend (pour H et x fixés) que de celle de Z, $Z(\mathbb{P})$, probabilité sur W^{m}, et c'est $X^{x}(\mathbb{P}) = \xi(Z)(\mathbb{P}) = \xi(Z(\mathbb{P}))$.

5) L'application ξ est "essentiellement" unique au sens suivant : deux telles applications coïncident sur un borélien porteur de W^{m}.

La philosophie de ce théorème, dont la partie probabiliste est encore dûe à Bichteler, est qu'il n'y a pas, pour H et x donnés, des équations différentielles stochastiques, pour des $\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z$, divers et variés, mais une seule, sur W^{m}, et non stochastique.

Démonstration :

(2.7) Nous poserons $\xi_{o} = x$, puis, par récurrence :

$$\xi_{n+1}(w) = x + H(\xi_{n}(w),.)_{-}\cdot w ,$$

suivant l'algorithme du théorème (1.2). Puis

$$(2.8) \qquad \xi(w) = \overline{\lim_{n \to +\infty}}\ \xi_{n}(w)$$

Notons que l'on n'a pas du tout l'égalité

$$\xi(w) = x + H(\xi(w))_{-}\cdot w .$$

Des premières propriétés 1) de (1.2), on déduit celles de (2.4). Puisque $\xi_o = x$, $(t,w) \mapsto (\xi_o)_t$ est optionnel. Supposons montré que $(t,w) \mapsto (\xi_n(w))_t$ est optionnel. Alors $(t,w) \mapsto H((\xi_n(w))_t,t)$ aussi (par approximation de $(\xi,w) \mapsto (\xi_n(w))_t$ par des fonctions étagées optionnelles, H étant continue en x), donc aussi $(t,w) \mapsto (\xi_{n+1}(w))_t = (H(\xi_n(w))_-\cdot w)_t$ (c'est le 3) de (1.2), appliqué au système $(\Omega = W^m, \mathcal{O} = \mathcal{W}^m, \mathcal{C}_t = \mathcal{W}^m_t$, $H = H(\xi_n,.)$, $Z = \pi$)), et enfin $(t,w) \mapsto (\xi(w))_t$ aussi, ce qui achève de démontrer 1).

(2.9) Passons au point 3 de l'énoncé. On peut encore supposer Z ps. cadlag et $\mathcal{C}$ - adaptée, donc $\mathcal{C}$-optionnelle, alors toutes les X_n des approximations successives sont aussi optionnelles (mais pas en général $\mathbb{P}$ ps. cadlag), donc $\xi(Z)$ aussi est optionnelle.

Bichteler a montré que les approximations successives X^x_n convergent vers une solution X^x, $\mathbb{P}$ ps. uniformément en t (Klaus Bichteler [1] , théorème (8.2), inégalité (8.2a), page 82, et remarque (8.4), page 84). Donc 3) est démontré ; cela démontre 4). Il reste encore à trouver $W^m_\bullet$ vérifiant 2).

Posons $W_{\bullet o} = W$. Supposons trouvés $W_{\bullet o} \supset W_{\bullet 1} \supset \dots W_{\bullet n}$ boréliens dans W , tels que $\xi_k(W_{\bullet k}) \subset W^{N}$, $k = 0,1,\dots,n$. Appelons $W_{\bullet n+1}$ l'ensemble des $w \in W_{\bullet n}$ pour lesquels $(H(\xi_n(w),.),w) \in (W \times W)_\bullet$; comme ξ_n est borélienne de $W^m_{\bullet n}$ dans W^N, $H(\xi_n,.)$ aussi, donc $w \mapsto (H(\xi_n),w)$ est borélienne de $W^m_{\bullet n}$ dans $W^{N,m} \times W^m$; l'image réciproque $W^m_{\bullet n+1}$ de $(W \times W)_\bullet$ est donc borélienne, et, puisque $\eta_-\cdot w \in W^N$ pour $(\eta,w) \in (W \times W)_\bullet$, $\xi_{n+1}(W_{\bullet n+1}) \subset W^N$. Si $W_{\bullet\infty} = \bigcap_n W_{\bullet n}$, pour $w \in W_{\bullet\infty}$, toutes les ξ_n seront cadlag. La fonction $\sup_{t \in \overline{\Phi}_+} |\xi_{m,t} - \xi_{n,t}|$ est réelle $\geqslant 0$ borélienne sur $W_{\bullet\infty}$, et l'ensemble $W_\bullet$ des $w \in W_{\bullet\infty}$ pour lesquels elle tend vers 0 pour $m,n \to +\infty$, est borélien dans $W_{\bullet\infty}$; c'est l'ensemble cherché ; il est exactement l'ensemble des $w \in W_{\bullet\infty}$ pour lesquels $\xi_n(w)$ tend vers une limite pour $n \to \infty$, limite qui ne peut être que $\xi(w)$, uniformément en t ; alors $\xi(w)$ est cadlag pour $w \in W_\bullet$.
Reprenons $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$; $X_o = x$, $X_{n+1} = x + H(X_n)_-\cdot Z$, donc $X_n = \xi_n \circ Z$, $X = \xi \circ Z$.
On sait que, $\mathbb{P}$ ps., $(H(x),Z) \in (W \times W)_\bullet$, qui est porteur. Supposons montré que, $\mathbb{P}$ ps., $Z \in W_{\bullet n}$; alors $\mathbb{P}$ ps. $(H(X_n),Z) \in (W \times W)_\bullet$ puisque $H(X)$ et Z sont $\mathbb{P}$ ps cadlag, Z $\mathbb{P}$-semi-martingale, donc $\mathbb{P}$ ps. $Z \in W_{\bullet n+1}$. Donc $\mathbb{P}$ ps. $Z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_{\bullet n} = W_{\bullet\infty}$
Mais Bichteler a montré que $\mathbb{P}$ ps. les approximations successives X^x_n convergent

vers la solution X^x, uniformément en t, donc nécessairement vers $\xi(Z)$, c'est à dire $\mathbb{P}$ ps. $Z \in W_\bullet$, donc $W_\bullet$ est porteur.

(2.10) Si $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$, sont deux applications telles que ξ, l'intersection $W_{\bullet(1)} \cap W_{\bullet(2)}$ des boréliens correspondants est un borélien porteur, sur lequel $\xi_{(1)}$ et $\xi_{(2)}$ sont boréliens à valeurs dans W^N, la diagonale de $W^N \times W^N$ est borélienne, donc $\{\xi_{(1)} = \xi_{(2)}\}$ est borélien dans $W_{\bullet(1)} \cap W_{\bullet(2)}$ donc dans W, et 3) montre qu'il est porteur, ce qui montre 5). ■

(2.11) Nous avons signalé après (2.8) que l'on n'a pas $\xi(w) = x + H(\xi(w))_{-} \cdot\cdot w$. Mais ξ est borélienne de $W_\bullet$ dans W^N; donc $w \mapsto (H(\xi(w)),w)$ est borélienne de $W_\bullet$ dans $W \times W$; alors $W_{\bullet\bullet} = \{w \in W_\bullet \,;(H(\xi(w)),w) \in (W \times W)_\bullet\}$ est borélien, donc ξ et $w \to H(\xi(w))_{-} \cdot\cdot w$ sont boréliennes de $W_{\bullet\bullet}$ dans W^N, la diagonale de $W^N \times W^N$ est borélienne, donc $\{w \in W_{\bullet\bullet} \,;\, \xi = x + H(\xi(w))_{-} \cdot\cdot w\}$ est un borélien, et, par 3), il est porteur : ξ vérifie "l'équation différentielle" sur un borélien porteur.

§ 3. PASSAGE DES SEMI-MARTINGALES DE Ω A W^m .

(3.1) Pour simplifier, nous nous bornerons aux semi-martingales partout cadlag sur Ω; on s'y ramène toujours, en supprimant éventuellement une partie $\mathbb{P}$-négligeable de Ω.

Soient données $\Omega, \mathcal{O}, Z$ processus sur Ω , $\mathbb{P}$ probabilité sur $(\Omega,\mathcal{O})$, Z partout cadlag, et nous appellerons $\mathcal{G}$ la plus petite famille de tribus, croissante et continue à droite, pour laquelle Z soit adaptée. On sait qu'alors, si Z est une $\mathbb{P}$-semi-martingale pour une famille quelconque de tribus, elle l'est aussi pour $\mathcal{G}$. D'autre part, on a W^m, $\mathcal{W}^m$, la famille de tribus $(\mathcal{W}^m_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$, et le processus canonique π sur W^m, $\pi_t w = w_t$. Ensuite Z définit une application $\omega \mapsto Z(\omega)$, borélienne de Ω dans W^m, d'où une mesure image $Z(\mathbb{P})$, qui est la loi de Z ; $\mathcal{G}_t = Z^{-1}(\mathcal{W}^m_t)$. Alors :

<u>Théorème (3.2)</u> : Z est une $\mathbb{P}$- semi-martingale, si et seulement si π est une $Z(\mathbb{P})$-semi-martingale. Si alors U est la solution de l'équation différentielle stochastique $U = x + H(U)_-.\pi$ sur W^m, la solution sur Ω de $X = x + H(X)_-.Z$ est $X = U \circ Z$.

<u>Démonstration</u> : Bien que la fin se démontre élémentairement par divers moyens, elle résulte en fait de la formule $U(w) = \xi(w)$, $X(\omega) = \xi(Z(\omega))$ de (2.4).

(3.3) Soit τ un temps d'arrêt sur W^m pour $(\mathcal{W}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$; alors $T = \tau \circ Z$ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{G}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$. En effet, $\{T \leq t\} = Z^{-1}\{\tau \leq t\} \in Z^{-1}(\mathcal{W}^m_t) = \mathcal{G}_t$. Inversement, soit T un $((\mathcal{G}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+})$-temps d'arrêt ; il existe un τ , $(\mathcal{W}^m_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$ - temps d'arrêt, tel que $T = \tau \circ Z$. C'est d'abord vrai si T ne prend qu'un nombre fini de valeurs, $T = t_k$ sur $\Omega_k \in \mathcal{G}_{t_k}$; comme $\mathcal{G}_{t_k}$ ne sépare pas deux points de Ω ayant la même image par Z, il existe un $\overline{W}_k$, de $Z(\Omega)$, tel que $\Omega_k = Z^{-1}(\overline{W}_k)$; puisque $\Omega_k \in \mathcal{G}_{t_k}$, il existe un $W_k \in \mathcal{W}^m_{t_k}$ tel que $\overline{W}_k = W_k \cap Z(\Omega)$, donc $\Omega_k = Z^{-1}(W_k)$; par un changement évident, on peut faire en sorte que les W_k soient deux à deux distincts et de réunion W ; alors, si $\tau = t_k$ sur W_k, $T = \tau \circ Z$. Si maintenant T est quelconque, on prendra une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow T$, T_n arrêt à nombre fini de valeurs ; alors $T_n = \tau_n \circ Z$, on pourra choisir les τ_n décroissants, donc ayant une limite τ, alors $T = \tau \circ Z$. Ayant considéré Z comme une application de Ω dans W^m, il convient d'appeler $I \times Z$ l'application $(t,\omega) \mapsto (t,Z(\omega))$ de $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times W^m$. Alors les $[T,+\infty]$ et $]T,+\infty]$, $\mathcal{C}$-temps d'arrêt, sont exactement les $(I \times Z)^{-1}[\tau,+\infty]$, $(I \times Z)^{-1}]\tau,+\infty]$, τ étant $(\mathcal{W}^m_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$-temps d'arrêt ; donc les tribus optionnelle et prévisible sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ sont les images réciproques $(I \times Z)^{-1}$ des tribus correspondantes sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times W^m$.

(3.4) Supposons alors que Z soit une $\mathbb{P}$-semi-martingale . Comme π est cadlag, on peut montrer qu'elle est une $Z(\mathbb{P})$- semi-martingale par le critère de Dellacherie (Voir P. A. Meyer [2] , théorème 1, page 620). Soit donc $\varphi = \sum_i H_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ une fonction prévisible élémentaire sur W^m, H_{t_i} fonction sur W^m, $\mathcal{W}^m_{t_i}$-mesurable (donc borélienne); $\psi = \varphi \circ Z$ et aussi une fonction prévisible élémentaire sur Ω , $\varphi \circ Z = \sum_i (H_{t_i} \circ Z) 1_{]t_i,t_{i+1}]}$, où $H_{t_i} \circ Z$ est $\mathcal{C}_{t_i}$-mesurable (donc borélienne). Mais, si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de telles fonctions, convergeant uniformément vers 0 , les $\psi_n = \varphi_n \circ Z$ aussi convergent uniformément vers 0 ; alors, Z étant une $\mathbb{P}$-semi-martingale, $((\varphi_n \circ Z).Z)_\infty = \sum_i (H_{t_i} \circ Z)(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})$ convergera vers 0 dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},\mathbb{P})$. Mais ceci équivaut à dire que $(\varphi_n \cdot \pi)_\infty = \sum_i H_{t_i}(\pi_{t_{i+1}} - \pi_{t_i})$ converge vers 0 dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},Z(\mathbb{P}))$; donc π est une $Z(\mathbb{P})$-semi-martingale .

(3.5) Inversement , supposons π $Z(\mathbb{P})$- semi-martingale. Soit ψ une fonction prévisible élémentaire sur Ω , $\psi = \sum K_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}$, K_{t_i} $\mathcal{C}_{t_i}$-mesurable. De la même manière qu'à (3.3), on verra qu'il existe H_{t_i} ,$\mathcal{W}^m_{t_i}$-mesurable, telle que $K_{t_i} = H_{t_i} \circ Z$; alors il existe φ telle que $\psi = \varphi \circ Z$; quitte à la remplacer par $(\varphi \wedge \sup|\psi|) \vee (-\mathrm{Sup}\,|\psi|)$, on peut supposer que $\sup|\varphi| = \mathrm{Sup}\,|\psi|$. Alors, si ψ_n converge uniformément vers 0, φ_n aussi ; π étant une semi-martingale , $(\varphi_n.\pi)_\infty$ convergera vers 0 dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},Z(\mathbb{P}))$, donc $\psi_n.Z$ convergera vers 0 dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},\mathbb{P})$; et Z est une $\mathbb{P}$-semi-martingale. ∎

Remarque (3.6) : Au lieu de π et $Z = \pi \circ (I \times Z)$, on aurait aussi bien pu considérer un processus X sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times W$, et $X \circ (I \times Z)$ sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

(3.7) Désormais il n'est même plus nécessaire de recourir aux $\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{E}, \mathbb{P}, Z$, il suffit de tout faire sur W^m. Dans l'énoncé (2.4), on aura un processus ξ sur W^m, qui sera une solution de l'équation différentielle stochastique $\xi = x + H(\xi).\pi$, pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur W^m qui font de π une semi-martingale ; sur $W^m_\bullet$, ξ est borélienne et $\xi(W^m_\bullet) \subset W^N$, et $W_\bullet$ est un borélien porteur, ce qui signifie maintenant portant toutes les $\mathbb{P}$, probabilités sur W^m qui font de π une semi-martingale. Pour H et x donnés, il n'y a plus qu'une équation, une solution, et une semi-martingale, π.

(3.8) **On aurait pu faire de même au § 1.** Supposons $(W \times W)_\bullet$ borélien porteur; en particulier, il porte toute probabilité Φ sur $W \times W$ qui fait de $\pi_2 : (\eta, w) \mapsto w$ une semi-martingale. Inversement supposons que $(W \times W)_\bullet$ borélien ait cette propriété ; pour tout système $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{E}, \mathbb{P}, H, Z)$, $Z(\mathbb{P}) = \pi_2((H,Z)(\mathbb{P}))$; alors le théorème (3.2) dit que π est une $Z(\mathbb{P})$-semi-martingale, donc $(H,Z)(\mathbb{P})$ est une probabilité sur $W \times W$ dont l'image par π_2 fait de π une semi-martingale, donc, encore par (3.2), π_2 est une $(H,Z)(\mathbb{P})$-semi-martingale, donc $(H,Z)(\mathbb{P})$ est portée par $(W \times W)_\bullet$, et $(W \times W)_\bullet$ est porteur.

On aurait donc pu dire qu'il existe une intégrale stochastique universelle $\pi_1 . \pi_2$ sur $W \times W$, pour toutes les probabilités qui font de π_2 une semi-martingale, et qu'elle est cadlag sur un borélien portant toutes ces probabilités.

§ 4. CAS DES SEMI-MARTINGALES DIRECTRICES CONTINUES. LE FLOT.

(4.1) On aurait pu, dans ce qui précède, remplacer les semi-martingales cadlag par des semi-martingales continues. Conservons $W^{N,m}$ avec la même signification, et H avec les mêmes hypothèses qu'aux §§ 1 et 2, W^m et W^N signifieront dans ce paragraphe, les espaces de trajectoires continues,

$$W^m = C(\mathbb{R}_+;G) \ , \ W^N = C(\overline{\mathbb{R}}_+;E) \ .$$

On va alors considérer le flot, c'est à dire la solution de l'équation où x et s varient :

(4.2) $$X^x = X = x + H(X,.).(Z - Z^s), \ x \in E, \quad s \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Théorème (4.3) : Il existe un flot Φ , fonction sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times E \times W^m$ à valeurs dans W^N et un ensemble borélien porteur $W^m_\bullet$, ayant les propriétés suivantes :

1) Le $\xi(w)$ du théorème (2.4) dépend de x, on aurait dû le noter $\xi(x,w)$. Alors, pour tous s,x, $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \in E$, $w \mapsto \Phi(s;x;w)$ a les propriétés de $w \mapsto \xi(x;w - w^s)$ du théorème (2.4) , avec en plus $\Phi(s;x;w) = x$ dans $[0,s]$; pour H,s,x, fixés, la loi de ${}^sX^x$, soit ${}^sX^x(\mathbb{P})$, ne dépend que de celle de Z (et même de $Z - Z^s$), soit

(4.3.1) $$\begin{aligned} {}^sX^x(\mathbb{P}) &= \xi(x;.)((Z - Z^s)(\mathbb{P})) = \Phi(s;x;Z)(\mathbb{P}) \\ &= \Phi(s;x;.)(Z(\mathbb{P})). \end{aligned}$$

2) L'application $(s,x,(t,w)) \mapsto \Phi_t(s;x;w)$ est mesurable de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times E \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \times W^m)$ dans E, pour les tribus boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et E et la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times W^m$, et se prolonge , par $\hat{\Phi}(s;\infty;w) \equiv \infty$, en une application $\hat{\Phi}$ de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \times W)$ dans S^N, où S^N est le compactifié d'Alexandroff de E, $S^N = E \cup \{\infty\}$, mesurable pour les tribus analogues. En particulier, Φ est borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N \times W$ dans $\hat{W}'^{N}$, espaces des trajectoires à valeurs dans S^N. Pour $w \in W^m_\bullet$, $(s,x) \mapsto \Phi(s;x;w)$ est continue de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N$ dans $C(\overline{\mathbb{R}}_+;S^N)$, ou $(t,s,x) \mapsto \Phi_t(s;x;w)$ de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N$ dans S^N, et, pour tous s,t, $x \mapsto \Phi_t(s;x;w)$ est injective. Ensuite, pour $w \in W_\bullet$, on a la formule de transitivité :

(4.4) $$\Phi_t(r;x;w) = \Phi_t(s;\Phi_s(r;x;w);w), \quad r \leq s \leq t \in \overline{\mathbb{R}}_+ , \quad x \in S^N,$$

qu'on peut aussi écrire, en appelant $\Phi_{t,s}(w)$ l'application $x \mapsto \Phi_t(s;x;w)$:

$$\Phi_{t,r}(w) = \Phi_{t,s}(w) \circ \Phi_{s,r}(w) .$$

3) Si $\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(2)}$, sont deux flots, ayant les propriétés précédentes, il existe un borélien porteur de W^m sur lequel ils coïncident.

Démonstration :

(4.5) Pour s', x' rationnels (par rapport à une base de $E \simeq \mathbb{R}^N$) appelons $W_\bullet(x')$ ce que nous appelions $W_\bullet$ au paragraphe 2 (il dépendait de x'), et $W_\bullet(s;x')$ l'ensemble des W pour lesquels $w - w^s \in W_\bullet(x')$; il est borélien parce que $w \mapsto w - w^s$ est borélienne de W dans W'. Dans la situation $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$, $\mathbb{P}$ ps. $Z - Z^s \in W(x')$ puisque c'est une semi-martingale, donc $Z \in W(s;x')$, ce dernier est donc porteur. Posons $\overline{W} = \bigcap_{\substack{s' \in \mathbb{Q}_+ , \\ x' \in \mathbb{Q}^N}} W_\bullet(s';x')$, il est donc borélien porteur.

Appelons $\xi(x';w)$ ce que nous appelions $\xi(w)$ au § 2 (il dépend de x'), et $\xi(s';x';w) = \xi(x';w - w^{s'})$. Posons

$$(4.6) \qquad \Phi(s;x;w) = x + \overline{\lim_{\substack{s' \in \mathbb{Q}_+, s' \to s \\ x' \in \mathbb{Q}^N, x' \to x}}} (\xi(s';x';w) - x) ;$$

et $\hat{\Phi}(s;\infty;w) = \infty$ pour tout t.

Les propriétés 1) de (2.4) sont alors évidentes (il faut juste vérifier en plus que $\Phi(s;x;w) = x$ dans $[0,s]$. Si la limite de $\xi(s';x';w)$ existe, comme il vaut x' dans $[0,s'] \supset [0,s]$ pour $s' \geqslant s$, la limite est x, et $\Phi(s;x;w) = x$; sinon, $\overline{\lim} = 0$ et encore $\Phi(s;x;w) = x$).

(4.7) Soient d une distance sur $[0,+\infty]$, compatible avec sa topologie, et aussi d (pas de risque de les confondre !) une distance sur S^N, compatible avec sa topologie. Appelons $W_\bullet$ l'ensemble des $w \in W_\bullet^m$ ayant les propriétés suivantes :

A) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$, tels que, $\forall\, s',s'' \in \overline{\mathbb{Q}}_+$, $\forall x',x'' \in \mathbb{Q}^N$, $d(s',s'') \leqslant \eta$ et $d(x',x'') \leqslant \eta$ entraînent $\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} d(\xi_t(s';x';w), \xi_t(s'';x'';w)) \leqslant \varepsilon$; cela veut dire que, sur $\overline{\mathbb{Q}}_+ \times \mathbb{Q}^N$ muni de la distance définie par d, $\xi(.,.,w)$ est uniformément continue à valeurs dans $C(\overline{\mathbb{R}}_+ ;S^N)$ muni de la métrique $d(u,v) = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} d(u_t,v_t)$ pour

$u,v \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;S^N)$; ou encore que la restriction de $\xi(.;.;w)$ à $\overline{\mathbb{Q}}_+ \times \mathbb{Q}^N$ est restiction d'une fonction continue sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N$ à valeurs dans $C(\overline{\mathbb{R}}_+;S^N)$. Cette fonction continue ne peut être que Φ, et cela entraîne que $\Phi(.;.;w)$ soit continue de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N$ à valeurs dans $C(\overline{\mathbb{R}}_+;S^N)$, ou que $(t,s,x) \mapsto \Phi_t(s;x;w)$ soit continue de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times S^N$ dans S^N (et que $\Phi(s';x';w) = \xi(s',x';w)$ pour s',x' rationnels);

B) $\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0$ tel que, $\forall s',t' \in \overline{\mathbb{Q}}_+$, $\forall x',x'' \in \mathbb{Q}^N$,

$d(\xi_{t'}(s';x';w), \xi_{t'}(s';x'';w)) \leqslant \eta'$ entraîne $d(x',x'') \leqslant \varepsilon'$; c'est équivalent à dire, compte tenu de A), que $\Phi_t(s;.;w)$ soit injective, pour s,t, réels ;

C) $\forall r' \leqslant s' \leqslant t' \in \overline{\mathbb{Q}}_+$, $\forall x' \in \mathbb{Q}^N$,

$$\Phi_{t'}(r';x';w) = \Phi_{t'}(s';\Phi_{s'}(r';x';w);w) \ ;$$

par suite de la continuité A), c'est équivalent à dire que l'on a (4.4), pour $r \leqslant s \leqslant t$, x quelconques.

Alors trivialement $W_\bullet^m$ est borélien.

Et les propriétés connues du flot [(3)] pour les équations différentielles stochastiques uniformément lipschitziennes disent que, dans la situations $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathbb{P}, Z)$, $\mathbb{P}$ ps. $Z \in W_\bullet$, et que $\Phi(s;x;Z)$ vérifie (4.2) pour tous s,x ; donc $W_\bullet$ est porteur.

(4.8) Comme, pour s',x' fixés, $(t,w) \mapsto \xi_t(s';x';w)$ est optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times W$ dans E, on en déduit aisément que $(s,x,(t,w)) \mapsto \Phi_t(s;x;w)$ est mesurable de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times E \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \times W)$ à valeurs dans E, pour les tribus indiquées dans l'énoncé, c'est-à-dire $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathrm{Bor}(E) \otimes \mathrm{Opt}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times W)$.

C'est la propriété suivante : soit A un espace métrique (ici $\overline{\mathbb{R}}_+ \times E$) muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$ (ici $\overline{\mathbb{R}}_+ \times W$, Opt), soit A' un ensemble dénombrable dense de A (ici $A = \overline{\mathbb{Q}}_t \times \mathbb{Q}^N$) et soit f une fonction sur $A' \times B$ (ici f est $((s',x'),(t,w)) \mapsto \xi_t(s';x';w))$, telle que, pour tout $a' \in A'$, $f(a',.)$ soit $\mathcal{B}$-mesurable : si on pose $g(a,b) = \overline{\lim}_{\substack{a' \in A' \\ a' \to a}} f(a',b)$, g est $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$-mesurable, ce que nous appellerons borélienne. Prenons d'abord des fonctions f et g valeurs réelles . Appelons $\overline{f}$ la fonction

$\bar{f}(a,b) = \limsup_{a' \in A',\, a' \to a} f(a',b)$, montrons qu'elle est borélienne. Soient $\alpha > \beta$ dans $\mathbb{R}$, et $\rho > 0$. Pour tout $a' \in A$, soit $C(\alpha',\beta,\rho) \subset A \times B$ le produit de la boule de centre a' et de rayon ρ dans A par l'ensemble $\{b \in B\ ;\ f(a',b) \geqslant \beta\}$ de B ; il est borélien, ainsi que la réunion $C(\beta,\rho) = \bigcup_{a' \in A'} C(a',\beta,\rho)$. C'est l'ensemble des $(a,b) \in A \times B$ tels qu'il existe $a' \in A'$, $d(a,a') \leqslant \rho$, vérifiant $f(a',b) \geqslant \beta$. Soit ensuite $C(\alpha)$ l'intersection $\bigcap_{\substack{\rho > 0 \\ \beta < \alpha}} C(\beta,\rho)$; il est encore borélien, et c'est $\{\bar{f} \geqslant \alpha\}$. Donc $\bar{f}$ est borélienne. De même $\underline{f}$, où

$\underline{f}(a,b) = \liminf_{a' \in A', a' \to a} f(a',b)$. Si alors nous revenons à une fonction f à valeurs dans $E = \mathbb{R}^N$, f a des composantes f_k, $k = 1,2,\ldots,N$, et la limite généralisée

$\overline{\lim}_{n \to +\infty}$ est $(\bar{f}_k)_{k=1,2,\ldots,N}$, là où, pour tout k, $\bar{f}_k = \underline{f}_k$ finie, et 0 ailleurs ; elle est encore borélienne. Manifestement le résultat subsiste si nous remplaçons E par $\overline{\mathbb{R}}^N$. Donc $(s,x,w) \mapsto \Phi(s;x;w)$ est borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times W$ dans W'^N. On passe immédiatement de Φ à $\hat{\Phi}$.

(4.9) Soient $\Phi_{(1)}$, Φ_2 ayant les propriétés ci-dessus, $W_{\bullet(1)}$, $W_{\bullet(2)}$, les boréliens porteurs associés ; $W_{\bullet(1)} \cap W_{\bullet(2)}$ est un borélien porteur où tous ont les propriétés voulues. Comme ils sont boréliens, l'ensemble $\{w \in W_{\bullet(1)} \cap W_{\bullet(2)}\ ;\ \forall t',s',x'$ rationnels, $\Phi_{(1)t'}(s',x';w) = \Phi_{(2)t'}(s';x';w)\}$ est borélien, sur lui la coïncidence a lieu, par continuité, pour tous les t,s,x réels, et il est porteur par l'unicité essentielle du flot pour $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{G},\mathbb{P},Z)$.

<u>Remarque</u> : Les propriétés du flot n'ont pas été historiquement faciles à démontrer et ne sont même pas complètement achevées ! Mais le présent théorème est très facile, parce qu'il est évident que $W_\bullet^m$ est borélien dans W^m. Au contraire, dans les théorèmes (1.2) et (2.4), les propriétés élémentaires des solutions des équations différentielles stochastiques sont connues depuis bien plus longtemps, mais il a fallu les procédés techniques récents de Bichteler et les démonstrations données aux §§ 1 et 2 pour obtenir les propriétés 1) des théorèmes (1.2) et (2.4), et le fait que $W_\bullet^m$ est borélien dans (2.4).

§ 5. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LOCALEMENT LIPSCHITZIENNES AVEC TEMPS DE MORT.

(5.0) Nous avons toujours une équation (2.1) mais avec H seulement localement lipschitzienne : pour tout $x \in E$, $H(x,.)$ est cadlag, et, pour tout compact F de E, il existe une constante K_F telle que, pour $x', x'' \in F$,

$$|H(x',t) - H(x'',t)| \leqslant K_F |x' - x''| .$$

Théorème (5.1) : Il existe une application ξ de W'^m dans W'^N, un ensemble borélien $W^m_\bullet$ de W^m, et un temps d'arrêt ζ sur W^m, annonçable sur $W^m_\bullet$, ayant les propriétés suivantes :

1) Comme 1) du théorème (2.4) pour ξ ; en outre, si w est constante dans $[0,\tau|$, $\zeta(w) \geqslant \tau$, et $> \tau$ si $w \in W_\bullet$. Si $w_1 = w_2$ dans $[0,\tau|$, ou bien $\zeta(w_1) = \zeta(w_2) < \tau$ ou bien tous les deux sont $\geqslant \tau$ mais peut être pas égaux. Si w est constante dans $|\alpha,\beta|$, $\zeta(w) \leqslant \alpha$ ou $\geqslant \beta$;

2) $W^m_\bullet$ est porteur, et, pour $w \in W^m_\bullet$, $\xi(w)$ est cadlag dans $[0, \zeta(w)[$, et si $\zeta(w) \leqslant +\infty$, tend vers l'infini quand $t < \zeta(w)$ tend vers $\zeta(w)$;

3) Pour un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{G},\mathbb{P},Z)$, $\xi(Z)$, optionnelle si Z est optionnelle, est un représentant de la solution de l'équation différentielle stochastique (2.1), avec temps de mort $\zeta(Z)$; en particulier, elle est une $\mathbb{P}$-semi-martingale $\mathbb{P}$ ps. cadlag dans $[0, \zeta(Z)[$.

4) Appelons trajectoire tuée la nouvelle trajectoire $\hat{\xi}(w)$, égale à $\xi(w)$ sur $[0, \zeta(w)[$, à ∞ sur $[\zeta(w),+\infty]$ à valeurs dans $S^N = E \cup \{\infty\}$, compactifié d'Alexandroff de E. Si w est constante dans $[0,\tau|$, $\hat{\xi}(w) = x$ dans $[0,\tau[$, dans $[0,\tau|$ si $w \in W_\bullet$. Si $w_1 = w_2$ dans $[0,\tau|$, $\hat{\xi}(w_1) = \hat{\xi}(w_2)$ dans $[0,\tau[$. Si w est constante dans $|\alpha,\beta|$, $\hat{\xi}(w)$ est constante dans $[\alpha,\beta[$; en particulier, si w est arrêtée en T, $\hat{\xi}(w)$ aussi, et $(\hat{\xi}(w))^T = \hat{\xi}(w^T)$. Ensuite, pour $w \in W_\bullet$, $\hat{\xi}(w)$ est cadlag, et, si $\zeta(w) \neq +\infty$, $\hat{\xi}_{\zeta(w)}(w) = \hat{\xi}_{\zeta(w)-}(w) = \infty$. Dans la situation $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{G},\mathbb{P},Z)$, la loi $\hat{X}(\mathbb{P})$ de la solution tuée $\hat{X}$ ne dépend que de la loi $Z(\mathbb{P})$ de Z :

$$\hat{X}(\mathbb{P}) = \hat{\xi}(Z(\mathbb{P})) . \tag{5.2}$$

5) Si $(\xi_{(1)},\zeta_{(1)})$, $(\xi_{(2)},\zeta_{(2)})$, sont deux solutions, elles coïncident sur un borélien porteur de W^m.

Démonstration (5.3) : Donnons-nous une suite croissante d'ouverts relativement compacts, $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$, de réunion E. Soit H^n un champ lipschitzien sur E tout entier, égal à H sur U^n. Soient ξ^n, $W_\bullet^n$ construits pour H^n, suivant le théorème (2.4).
Posons $\zeta^n(w) = \mathrm{Inf}\{t \in \bar{\Phi}_+ ; \forall \varepsilon > 0, \exists t' \leq t, t' \in \Phi_+ , d(\xi^n_{t'}(w), \complement U^n) \leq \varepsilon\}$.
C'est un temps d'arrêt sur W, parce que $(t,w) \mapsto \xi^n_t(w)$ est optionnelle, donc il est borélien ; c'est exactement le temps de sortie de $\xi^n(w)$ ou $\xi^n_-(w)$ $((\xi^n_-(w))_t = \xi^n_{t-}(w))$ de U^n si $w \in W_\bullet^n$. On appellera alors $W_{\bullet\bullet}$ l'ensemble des w de $W_\bullet^\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_\bullet^n$ pour lesquels, $\forall n$, $\zeta^n(w) \leq \zeta^{n+1}(w)$ et $\xi^n(w) = \xi^{n+1}(w)$ sur $[0, \zeta^n_{(w)}]$. Il est borélien puisque les ζ^n sont boréliens, les $\xi^n(w)$ sont cadlag pour $w \in W_\bullet^\infty$, les ξ^n boréliens sur $W_\bullet^\infty$. Posons $\zeta = \operatorname{Sup}_n \zeta^n$, c'est un temps d'arrêt sur W, et $\xi = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi^n$; la dernière limite est vraie et même stationnaire sur $W_{\bullet\bullet}$; ξ est borélienne sur $W_{\bullet\bullet}$. Soit $w \in W_{\bullet\bullet}$; si $\zeta(w) \neq \overline{+\infty}$, donc $\zeta^n(w) \neq \overline{+\infty}$, l'ensemble des $\xi^n_t(w)$ et $\xi^n_{t-}(w)$, $t < \zeta^n(w)$, est dans U^n ; il existe $k \geq 0$ tel que $\xi^n_{\zeta^n(w)}(w)$ et $\xi^n_{\zeta^n(w)-}(w) \in U^{n+k}$, donc $\xi^n(w)([0,\zeta^n(w)]$ et $\xi_-(w)[0, \zeta^n(w)] \subset U^{n+k}$; mais alors aussi $\xi^{n+k}(w)\ [0,\zeta^n(w)]$ et $\xi^{n+k}_-(w)[0, \zeta^n(w)]$; comme $\xi^{n+k}(w)$ est cadlag, le temps de sortie $\zeta^{n+k}(w)$ de $\xi^{n+k}(w)$ ou $\xi^{n+k}_-(w)$ de U^{n+k} est nécessairement $> \zeta^n(w)$, donc $\zeta^n(w) < \zeta(w)$; donc $\zeta^n \nearrow \zeta$, $\zeta^n < \zeta$ sur $\{\zeta \leq +\infty\}$, et bien évidemment $\zeta^n \nearrow\nearrow \overline{+\infty}$ sur $\{\zeta = \overline{+\infty}\}$, ce qui veut exactement dire que les ζ^n annoncent ζ, ζ est annonçable sur $W_{\bullet\bullet}$[4]. D'autre part, $\xi(w)([0, \zeta^n(w)])$ est relativement compact, puisque $\xi(w)([0,\zeta^n(w)[) \subset U^n$; et $\xi(w)([0,\zeta(w)[)$ ne l'est pas, puisque nécessairement, pour tout n, $\xi(w)$ ($\zeta^n(w)$ ou $\zeta^n_-(w)) \notin U_n$.

Prenons ensuite un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$, posons $X^n = \xi^n \circ Z$, $\theta = \zeta \circ Z$. Alors X^n et X^{n+1} sont solutions de la même équation différentielle stochastique formée avec H^n dans $[0, \theta^n[$, donc $\theta^n \leq \theta^{n+1}$ et elles coïncident $\mathbb{P}$ ps. dans cet intervalle stochastique ; mais elles ont le même saut en θ^n, à savoir $H^n(X^n_{\theta^n_-}, \theta^n_-)\, \Delta Z_{\theta^n}$, donc elles coïncident encore $\mathbb{P}$ ps. dans $[0,\theta_n]$; donc $W_{\bullet\bullet}$ est porteur. En outre, $X = \lim_{n\to\infty} X^n$ (limite $\mathbb{P}$ ps. stationnaire) est solution de l'équation différentielle dans $[0,\theta[$. La trajectoire $X[0,\theta[$ n'est $\mathbb{P}$ ps. pas relativement compacte, donc θ est le temps de mort.

Appelons alors $W_\bullet$ le sous-ensemble de $W_{\bullet\bullet}$ des points w pour lesquels ou bien $\zeta(w) = +\infty$, ou bien, d étant une distance sur $\mathbb{R}_+$ compatible avec sa topologie,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\operatorname*{Inf}_{\substack{t' \in \mathbb{Q}_+ ,\, t' < \zeta(w) \\ d(t', \zeta(w)) \leqslant 1/n}} |\xi_{t'}(w)| \right) = +\infty \quad ;$$

il est encore borélien, c'est exactement ($\xi(w)$ étant cadlag) l'ensemble des w pour lesquels ou bien $\zeta(w) = \overline{+\infty}$, ou bien $\xi_t(w)$ tend vers l'infini dans E quand $t < \zeta(w)$ tend vers $\zeta(w)$, par valeurs rationnelles donc aussi par valeurs quelconques. Pour $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{G},\mathbb{P},Z)$, on sait justement que $\theta = \zeta \circ Z$, $X = \xi \circ Z$ ont cette propriété $\mathbb{P}$ ps., donc $W_\bullet$ est encore porteur [(5)]. Si w est constante dans $[0,\tau|$, $\xi_n(w) = x$ dans $[0,\tau|$, donc, pour n assez grand (tel que $w \in U_n$), $\zeta_n(w) \geqslant \tau$ et $\zeta(w) \geqslant \tau$; si en outre $w \in W_\bullet$, $\xi_n([0,\tau]) \subset U_n$ pour n assez grand et $\xi_n(w)$ est cadlag, donc $\zeta_n(w) > \tau$ et $\zeta(w) > \tau$; donc toujours $\hat{\xi}(w) = x$ dans $[0,\tau[$, mais peut être $\zeta(w) = \tau$ et alors $\hat{\xi}_\tau(w) = \infty$; mais si $w \in W_\bullet$, et w constant dans $[0, \tau]$, $\zeta(w) > \tau$, et $\xi_\tau(w) = x$. Si $w_1 = w_2$ dans $[0,\tau|$, $\xi_n(w_1) = \xi_n(w)$ dans $[0,\tau|$, donc ou bien $\zeta_1(w) = \zeta_2(w) < \tau$, ou tous les deux sont $\geqslant \tau$ mais peut être pas égaux ; donc $\hat{\xi}(w_1) = \hat{\xi}(w_2)$ dans $[0,\tau[$, mais peut être pas au temps τ . Si w est constante dans $|\alpha,\beta|$, bien évidemment $\zeta_n(w) \leqslant \alpha$ ou $\geqslant \beta$, et la même conclusion subsiste pour $\zeta(w)$; alors $\hat{\xi}(w)$ est constante dans $[\alpha,\beta[$, mais peut valoir $\xi(w)$ dans $[\alpha,\beta[$ et ∞ au temps β si $\zeta(w) = \beta$; la conclusion pour l'arrêt s'obtient en faisant $\alpha = T$, $\beta = \overline{+\infty}$.

Si l'on a deux solutions du problème $(\xi_{(1)}, \zeta_{(1)})$ et $(\xi_{(2)}, \zeta_{(2)})$, elles coïncident sur le borélien porteur de W :

$$W_{\bullet(1)} \cap W_{\bullet(2)} \cap \{\xi_{(1)} = \xi_{(2)}\} \cap \{\zeta_{(1)} = \zeta_{(2)}\}.$$

<u>Remarque (5.3)</u> : Je n'ai jamais vu démontré nulle part que, et ne sais pas si les approximations successives de la solution X, soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent vers

elle pour $\mathbb{P}$- presque tout ω , uniformément sur tout compact de $[0, \theta(\omega)[$. C'est vrai dans un $[0,\bar{\theta}(\omega)[$, $\bar{\theta}$ temps d'arrêt, $0 < \bar{\theta} \leq \theta$ $\mathbb{P}$ ps., mais je ne sais pas si $\bar{\theta} = \theta$ $\mathbb{P}$ ps. Si donc on pose $\bar{\zeta}(w) = \text{Inf}\{t \in \Phi_t \; ; \; \lim_{m,n \to +\infty} \sup_{t' \in \bar{\Phi}_+} |\xi_{m,t'}(w) - \xi_{n,t'}(w)| \neq 0\}$, $\bar{\zeta}$ est un temps d'arrêt sur W, donc borélien. Pour $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$, $\bar{\theta} = \bar{\zeta} \circ Z$ $\mathbb{P}$ ps. On voit que $\bar{\zeta}$ se caractérise par le fait que, sur $W_\bullet$, les approximations successives $\xi_n(w)$ convergent vers $\xi(w)$, uniformément sur tout compact de $[0,\bar{\zeta}(\omega)[$, mais pas sur $[0,\bar{\zeta}(w) + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Dans le théorème (2.4), si on reprend les notations de la démonstration, le $W_\bullet$ n'était autre que $W_{\bullet\infty} \cap \{\bar{\zeta} = \overline{+\infty}\}$, donc il était borélien, mais en outre porteur. Ici, sur le $W_\bullet$ du théorème (5.1), $\{\bar{\zeta} = \overline{+\infty}\}$ n'est plus porteur , $\{0 < \bar{\zeta} \leq \zeta\}$ l'est, mais peut être pas $\{\bar{\zeta} = \zeta\}$.

(5.4) Etudions maintenant le flot, dans le cas où la semi-martingale directrice est continue, c'est à dire l'extension du théorème (2.4) au cas localement lipschitzien, <u>avec donc W^m et W^N espaces</u> $C(\bar{\mathbb{R}}_+ ;G)$ et $C(\bar{\mathbb{R}}_+ ;E)$.

<u>Théorème (5.5)</u> : Il existe un flot Φ , fonction sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times E \times W'^m$ à valeurs dans W'^N, un borélien porteur $W^m_\bullet$ de W, et un temps ζ , fonction sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times E \times W^m$ à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, qui, pour s,x, fixés, est un temps d'arrêt sur W^m, annonçable sur $W^m_\bullet$, avec les propriétés suivantes :

1) Comme 1) du théorème (4.3), mais ${}^sX^x = \Phi(s;x;Z)$ est seulement solution dans $[0,\zeta(Z)[$, (4.3.1) est seulement vraie pour la solution tuée ${}^s\hat{X}^x = \hat{\Phi}(s;x;Z)$ (voir (5.1.1)) ;

2) $\hat{\Phi}$ est borélienne sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times E \times W_\bullet$ à valeurs dans l'espace $\hat{W}^N$ des applications de $\bar{\mathbb{R}}_+$ dans S^N, continues dans $[0,\zeta[$, valant ∞ dans $[\zeta,+\infty]$;

3) Pour w fixé dans $W_\bullet$, on a les propriétés suivantes : $\zeta(.,.,w)$ est semi-continue inférieurement de $\bar{\mathbb{R}}_+ \times E$ dans $[0,\overline{+\infty}]$, et $(t,s,x) \mapsto \hat{\Phi}_t(s;x;w)$ est continue de $\{t < \zeta(s;x;w)\}$ dans S^N ; si $x \neq y$, et $t < (\zeta(s;x;w) \wedge \zeta(s;y;w))$, $\Phi_t(s;x;w) \neq \Phi_t(s;y;w)$; on a la formule de transitivité (4.4) pour $t < \zeta(r;x;w)$ (auquel cas $t < \zeta(s;\Phi_s(r;x;w))$; enfin $\Phi(s;x;w)$ $([0,\zeta(s;x;w)[)$ n'est pas relativement compact dans E si $\zeta(s;x;w) \leq +\infty$, autrement dit, quand $t < \zeta(s;x;w)$ tend vers $\zeta(s;x;w)$, rien ne dit que $\Phi_t(s;x;w)$ tende vers l'infini, on sait seulement qu'il ne reste dans aucune partie relativement compacte de E.

4) Si $(\Phi_{(1)}, \zeta_{(1)})$, $(\Phi_{(2)}, \zeta_{(2)})$ sont deux solutions du problème, elles coïncident sur un borélien porteur de W.

Démonstration : Utilisons la démonstration de (5.1) ; nous ne répèterons pas les notations. La résolution de l'équation relative à H^n nous donne un flot Φ^n. Nous appellerons $\zeta^n(s;x;w)$ le temps de sortie de $\Phi^n(s;x;w)$ de U^n défini comme nous l'avons fait à (5.3) ; comme ici W^N est l'espace des trajectoires continues, $C(\overline{\mathbb{R}}_+; E)$, c'est exactement de temps de sortie de $\Phi^n(s;x;w)$ de U^n, pour $w \in W_\bullet^n$. On définira ensuite $W_\bullet$, ensemble des $w \in \bigcap_n W_\bullet^n = W_\bullet^\infty$ pour lesquels, pour tout n, $\zeta^n(s';x';w) \leqslant \zeta^{n+1}(s';x';w)$, et $\Phi^n(s';x';w) = \Phi^{n+1}(s';x';w)$ sur $[0, \zeta^n(s',x';w)]$, pour s', x', rationnels relativement à une base de $E = \mathbb{R}^N$, puis ξ et ζ comme à la démonstration de (5.1), pour tous s,x,w; comme les ξ^n sont boréliennes, ξ l'est aussi sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times E \times W$, ζ est un temps d'arrêt, annonçable sur $W_\bullet$. Soient s_o, x_o quelconques. Soit $\tau < \zeta(s_o;x_o;w)$, $w \in W_\bullet$. Alors $\Phi^n(s_o;x_o;w)$ reste dans un compact de U^n, sur $[0,\tau]$. Par continuité, pour s, x assez voisins de s_o, x_o, $\Phi^n(s;x;w)$ reste aussi dans un compact de U^n, dans $[0,\tau]$; donc $\zeta^n(s;x;w) > \tau$; ceci prouve que $\zeta^n(.,.;w)$ est semi-continue inférieurement. Dans ce voisinage de s_o, x_o, il y a des points rationnels s',x' ; $\Phi^{n+1}(s';x';w) = \Phi^n(s';x';w)$ dans $[0, \zeta^n(s';x';w)]$ donc dans $[0,\tau]$, donc, par continuité des flots, $\Phi^{n+1}(s_o;x_o;w) = \Phi^n(s_o;x_o;w)$ dans $[0,\tau]$, et il est dans un compact de U^n, par suite $\zeta^{n+1}(s_o;x_o) > \tau$, donc $\zeta^{n+1} \geqslant \zeta^n$ partout sur $W_\bullet$; ensuite $\Phi^{n+1} = \Phi^n$ dans $[0, \zeta^n]$ partout sur $W_\bullet$. On posera encore $\zeta = \operatorname{Sup}_n \zeta_n$, défini partout sur W'^m, temps d'arrêt sur W^m, $(s,x) \mapsto \zeta(s;x;w)$ semi-continue inférieurement pour $w \in W_\bullet$, et $\Phi = \overline{\lim_{n \to \infty}} \Phi^n$, limite vraie stationnaire sur $W_\bullet$. On démontrera alors comme à (5.3) que les ζ_n annoncent ζ sur $W_\bullet$, que $\Phi(s;x;w)\ [0,\zeta_n]$ est relativement compact pour $w \in W_\bullet$, et que $\Phi(s;x;w)\ [0,\zeta[$ ne l'est pas.

Donc, pour tout s,x, $\Phi(s;x;.)$ a toutes les mêmes propriétés que $w \mapsto \xi(x;w - w^s)$ du théorème (5.1) sauf une : pour $\zeta(s;x;w) \leqslant +\infty$, il n'est pas sûr que, quand $t < \zeta(s;x;w)$ tend vers $\zeta(s;x;w)$, $\Phi_t(s;x;w)$ tende vers l'infini, on sait seulement qu'il ne reste pas dans un compact ; donc, pour la propriété 4) de (5.1), il n'y a pas d'analogue exact, $\hat{\Phi}(s;x;w)$ est continue dans $[0,\zeta(s;x;w)[$, constante égale à ∞ dans $[\zeta(s;x;w), +\infty)]$, mais elle n'a peut-être pas de limite à gauche au temps $\zeta(s;x;w)$. Naturellement, on pourrait toujours considérer le sous-ensemble des $w \in W_{\bullet}$ pour lesquels cette propriété serait vraie pour s', x', rationnels ; mais cela ne l'entraînerait pas pour s, x, réels, et n'a donc aucun intérêt. Le fait que $W_{\bullet}$ soit porteur, résulte encore des propriétés du flot dans le système $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{G}, \mathbb{P}, Z)$, sans doute publiés nulle part quand on fait à la fois varier s et x [6]. On sait que, si $\zeta(s;x;Z) \neq \overline{+\infty}$, pour s et x fixés, quand $t < \zeta(s;x;Z)$ tend vers $\zeta(s;x;Z)$, $\Phi(s;x;Z)$ tend vers ∞ $\mathbb{P}$ ps., mais on ne sait pas si c'est vrai $\mathbb{P}$ ps, pour tous s et x. Si $(\Phi_{(1)}, \zeta_{(1)})$, $(\Phi_{(2)}, \zeta_{(2)})$ sont deux solutions du problème, elles coïncident sur le borélien porteur de W :

$$W_{\cdot(1)} \cap W_{\cdot(2)} \cap \{\forall\, t', s', x' \text{ rationnels}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \Phi^n_{(1)t'}(s';x';w) = \Phi^n_{(2)t'}(s';x;w)\}$$

Il est évidemment borélien porteur. Pour w dans cet ensemble, $\Phi^n_{(1)}$ et $\Phi^n_{(2)}$ coïncident pour tous les t,s,x réels, donc aussi $\Phi_{(1)}$ et $\Phi_{(2)}$. Mais alors $\zeta^n_{(1)}(s;x;w) = \zeta^n_2(s;x;w)$ puisqu'ils ne dépendent que de $\Phi^n_{(1)}(s;x;w)$ et $\Phi^n_{(2)}(s;x;w)$, donc aussi $\zeta_{(1)}(s;x;w) = \zeta_{(2)}(s;x;w)$.

(5.6) Remarque : Il y a une situation intermédiaire entre les théorèmes (5.1) et (5.5). Dans (5.5), on cherche un flot dépendant continuement de s et de x, la semi-martingale Z doit alors être continue ; si en effet Z est discontinue, et $H \equiv 1$, on résout $dX = d(Z - Z^s)$ avec $X_o = x$, la solution est ${}^sX^x = x + (Z - Z^s)$, elle ne peut pas avoir de version dépendant continuement de s. Dans (5.1), s et x sont fixées, Z est quelconque. Mais on sait qu'on peut laisser s fixé, et faire varier x seul ; il y a alors un flot $\Phi(s;x;w)$, avec la propriété de continuité en x, même pour des semi-martingales Z cadlag.(♦) Dans ce cas, on peut aussi remplacer s par un temps d'arrêt S sur W. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème correspondant. Pour la transitivité, on pourra prendre r,s,t fixes, ou temps d'arrêt $R \leqslant S \leqslant T$ sur W^m, et alors $\Phi_T(R;x;w) = \Phi_T(S;\Phi_S(R;x;w);w)$ pour $w \in W_{\bullet}$, toujours porteur.

(♦) Voir P. A. Meyer [3] , pages 103 et suivantes

§ 6. LE CROCHET [,] . EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES SUR DES VARIETES

(6.1) Soit $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$, on sait qu'il existe un calcul par trajectoires, $\mathbb{P}$ ps. du crochet $[Z,Z]$, à valeurs dans $G \odot G$. Nous nous proposons d'en faire ici encore un calcul universel ; nous appellerons (par un terrible abus de langage!) $W'^m \odot W'^m$ l'ensemble des trajectoires $\overline{\mathbb{R}}_+ \to G \odot G$, $W^m \odot W^m$ le sous-espace des trajectoires cadlag.

<u>Théorème (6.2)</u> : Il existe une application $(\xi,\eta) \mapsto [\xi,,\eta]$ de $W' \times W'$ dans $W' \odot W'$, ayant les propriétés suivantes :

1) $[\xi,,\eta]_o = \xi_o\ \eta_o$, et $[\xi,,\eta] = \xi_o\ \eta_o$ dans $[0,\tau|$, si ξ ou η est constante dans $[0,\tau|$; si ξ et η sont connues dans $[0,\tau|$, $[\xi,,\eta]$ aussi ; si ξ ou η est constante dans $|\alpha,\beta| \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, $[\xi,,\eta]$ aussi ; en particulier, si ξ ou η est arrêtée en T, $[\xi,,\eta]$ aussi ; et on a toujours $[\xi,,\eta]^T = [\xi^T,,\eta] = [\xi,,\eta^T] = [\xi^T,,\eta^T]$; le processus $(t,(\xi,\eta)) \mapsto [\xi,,\eta]_t$ est optionnel de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times (W \times W)$ dans $G \odot G$, donc $(\xi,\eta) \mapsto [\xi,,\eta]$ est borélienne de $W \times W$ dans $W' \odot W'$;

2) Il existe un borélien porteur $(W \times W)_\bullet$ de $W \times W$, tel que, si $(\xi,\eta) \in (W \times W)_\bullet$, le crochet $[\xi,,\eta](w)$ soit cadlag et à variation finie ;

3) Pour un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},X,Y)$, où X,Y sont des $\mathbb{P}$-semi-martingales, $[X,,Y]$ est une version de $[X,Y]$, donc est $\mathbb{P}$ ps. à variation finie cadlag, optionnel si X et Y le sont.

4) La loi de $[X,Y]$ dans $W \odot W$, soit $[X,Y](\mathbb{P})$, est $[X,,Y]$ $(\mathbb{P})$, donc ne dépend que de la loi de (X,Y) dans $W \times W$, soit $(X,Y)(\mathbb{P})$, elle est l'image de $(X,Y)(\mathbb{P})$ par $(\xi,\eta) \mapsto [\xi,,\eta]$.

5) Si l'on a deux solutions du problème $[\xi,,\eta]_{(1)}$, $[\xi,,\eta]_{(2)}$, elles coïncident sur un borélien porteur de $W \times W$.

<u>Démonstration</u> : Nous irons un peu vite. On détermine des $T_{i,n}$ comme dans la démonstration de (1.2).

$T_{o,n} = 0, \dots T_{i+1,n}(\xi,\eta) = T_{i+1,n} =$

$\mathrm{Inf}\{t \in \mathbb{Q}_+,\ t \geq T_{i,n}\ ;\ |\xi_t - \xi_{T_{i,n}}|$ ou $|\eta_t - \eta_{T_{i,n}}| > \frac{1}{2^n}\}$.

Alors $\xi_{n^-} = \sum_{i=o}^{\infty} 1_{]T_{i,n}(\xi,\eta),T_{i+1,n}(\xi,\eta)]}\, \xi_{T_{i,n}(\xi,\eta)}$ et

$\eta_{n^-} = \sum_{i=o}^{\infty} 1_{]T_{i,n}(\xi,\eta),T_{i+1,n}(\xi,\eta)]}\, \eta_{T_{i,n}(\xi,\eta)}$.

Les $T_{i,n}$ sont des temps d'arrêt sur $W^m \times W^m$, ξ_{n^-} et η_{n^-} sont cadlag si ξ et η sont cadlag, et alors $T_{i,n} \uparrow\uparrow \overline{+\infty}$ pour $i \to +\infty$. La connaissance de (ξ,η) dans $[0,\tau|$ entraîne celle de (ξ_{n^-}, η_{n^-}). Si ξ et η sont cadlag, $|\xi_- - \xi_{n^-}| \leq \frac{1}{2^n}$, $|\eta_- - \eta_{n^-}| \leq \frac{1}{2^n}$. On définit alors le crochet comme suit :

$$(6.4)\ \begin{cases} [\xi,,\eta]_t^{(n)} = \sum_{i=o}^{\overline{+\infty}} (\xi_{t\wedge T_{i+1,n}} - \xi_{t\wedge T_{i,n}})(\eta_{t\wedge T_{i+1,n}} - \eta_{t\wedge T_{i,n}}) + \xi_o\, \eta_o\ , \\ \text{ou} \\ [\xi,,\eta]^{(n)} = \sum_{i=o}^{\overline{+\infty}} (\xi^{T_{i+1,n}} - \xi^{T_{i,n}})(\eta^{T_{i+1,n}} - \eta^{T_{i,n}}) + \xi_o\, \eta_o\ , \end{cases}$$

$$(6.5)\quad [\xi,,\eta] = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ [\xi,,\eta]^{(n)}.$$

Il possède alors toutes les propriétés relatives à $[0,\tau|$ et $|\alpha,\beta|$ de 1) du théorème, comme on l'a vu dans un cas analogue au théorème (1.2). La seule qu'il faille regarder de près est : si η est constante dans $|\alpha,\beta|$, $[\xi,,\eta]$ aussi. On remarque que chaque terme $(\xi^{T_{i+1,n}} - \xi^{T_{i,n}})(\eta^{T_{i+i,n}} - \eta^{T_{i,n}})$ est nul dans $[0,T_{i,n}]$, constant dans $[T_{i+1,n}, +\infty]$, et vaut, dans $[T_{i,n}, T_{i+1,n}]$, $t \mapsto (\xi_t - \xi_{T_{i,n}})(\eta_t - \eta_{T_{i,n}})$. Un de ces termes au plus n'est pas constant dans $|\alpha,\beta|$, c'est celui où $T_{i,n} \leq \alpha < T_{i+1,n}$, et il suffit de regarder sa variation dans $[\alpha, T_{i+1,n}\wedge\beta]$. Là, il vaut, au temps t, ce qui est écrit plus haut, et la différence de ses valeurs en t' et t est

$$(\xi_{t'} - \xi_t)(\eta_{t'} - \eta_{T_{i,n}}) + (\xi_t - \xi_{T_{i,n}})(\eta_{t'} - \eta_t)$$

$$= (\xi_{t'} - \xi_t)(\eta_{t'} - \eta_{T_{i,n}})$$

puisque η est constant dans $|\alpha,\beta|$. Mais, puisque $T_{i+1,n} > \alpha$, c'est que, η étant constant dans $|\alpha,\beta|$, $|\eta_{t'} - \eta_{T_{i,n}}| \leq \frac{1}{2^n}$ pour t' assez voisin de α donc pour t' quelconque dans $|\alpha,\beta|$, donc cette variation est, en valeur absolue, $\leq \frac{1}{2^n}[\xi_{t'} - \xi_t']$, qui tend vers 0 pour $n \to +\infty$, donc $[\xi\,,,\eta]$ est bien constant dans $|\alpha,\beta|$.

(6.6) Si alors on se restreint à $W \times W$, les $T_{i,n}$ sont des temps d'arrêt sur $W \times W$, et $(t,(\xi,\eta)) \mapsto [\xi,,\eta]_t(w)$ est optionnel sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (et adapté cadlag), donc aussi $(t,(\xi,\eta)) \mapsto [\overline{\xi},,\eta]_t(w)$, qui n'est plus cadlag ; et $(\xi,\eta) \mapsto [\xi,,\eta]$ est borélienne de $W \times W$ dans $W \odot W$; ceci achève la partie 1).

(6.7) Montrons la partie 3) de l'énoncé : on prend un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{G},\mathbb{P},X,Y)$, où X et Y sont des $\mathbb{P}$ semi-martingales $\mathbb{P}$ ps. cadlag.

Pour tout ω, $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont des éléments de W', donc on peut parler de $[X,,Y] : \omega \mapsto [X(\omega),, Y(\omega)]$, et on doit montrer que $[X,,Y]$ est une version de $[X,Y]$. On a, dans $]T_{i,n},T_{i+1,n}]$:

$$(X_t - X_{T_{i,n}})(Y_t - Y_{T_{i,n}}) =$$

$$= (X_t Y_t - X_{T_{i,n}} Y_{T_{i,n}}) - X_{T_{i,n}} (Y_t - Y_{T_{i,n}})$$

$$- Y_{T_{i,n}} (X_t - X_{T_{i,n}})$$

$$= \int_{]T_{i,n},t]} (d(XY)_s - X_{n,s_-} dY_s - Y_{n,s_-} dX_s) \text{ (où } X_{n,s_-} = (X_n{}_-)_s)$$

$$= \text{(par Ito)} \int_{]T_{i,n,t}]} ((X - X_n)_{s_-} dY_s + (Y - Y_n)_{s_-} dX_s + d[X,Y]_s),\ \mathbb{P} \text{ ps.}$$

En faisant $\overline{\sum_{i=o}^{+\infty}}$ (qui est une somme finie $\mathbb{P}$ ps.) + $X_o Y_o$, on trouve $[X,,Y]^{(n)} = [X,Y]$ (version quelconque) + $(X - X^{(n)})_- . Y + (Y - Y^{(n)})_- . X$, $\mathbb{P}$ ps.

Compte tenu de $|(X - X_n)_-| \leq \frac{1}{2^n}$, $|(Y - Y_n)_-| \leq \frac{1}{2^n}$ $\mathbb{P}$ ps., le même raisonnement qu'à (1.9) montre que $[X,,Y]^{(n)}$ converge vers une version de $[X,Y]$, pour $n \to +\infty$, $\mathbb{P}$ ps. uniformément en t, ce qui est 3), d'où 5).

Il est maintenant évident de trouver $(W \times W)_\bullet$, comme à (1.10) : c'est l'ensemble des (ξ,η) de $W \times W$ pour lequels

$[\xi,,\eta]^{(n)}$ converge, uniformément en t, vers une limite, qui est donc $[\xi,,\eta]$, et pour lesquelles la variation de $[\xi,,\eta]$ (calculée sur les temps rationnels) est finie ; il est borélien, et nous venons de voir qu'il est porteur . ■

(6.8) Equations différentielles stochastiques sur les variétés.

Ici intervient non seulement la semi-martingale directrice Z, à valeurs dans G, mais aussi son crochet [Z,Z] à valeurs dans $G \odot G$. Le champ sur la variété V (de classe C^2-lipschitzienne) comprend un champ 1-tangent H, fonction sur $V \times \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G;T^1(V))$, $H(x,t) \in \mathcal{L}(G;T^1(V;x))$, localement lipschitzien, et un champ 2-tangent K, fonction sur $V \times \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G;T^2(V))$, $K(x,t) \in \mathcal{L}(G;T^2(V;x))$, localement lipschitzien ; on exige en outre que la projection de K sur le quotient $\mathcal{L}(G \odot G;\ T^1(V) \odot T^1(V))$ soit $H \circledcirc H$. Alors l'équation différentielle s'écrit (en notant toujours H(x), K(x) au lieu de H(x,.), K(x,.)) :

(6.9) $$dX = H(X)dZ + \frac{1}{2} K(X)d[Z,Z] \ , \ X_o = x \in V \ .$$

Z est une semi-martingale continue. On va alors donner une résolution trajectoire par trajectoire. On peut donner un énoncé du type (5.1) ou du type (5.5), puisque Z est continue ; le résultat (5.5) est plus fort en tous les points sauf un, celui de la convergence de la solution vers l'infini lorsque t tend vers ζ . Nous donnerons tout à la fois :

Théorème (6.10) : Etant donnés les champs H et K sur V, il existe une application $(s;x;w) \mapsto \Phi(s;x;w)$ de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \hat{V} \times W^m$ dans $\hat{W}'^N$ (où ici $\hat{W}'^N$ est l'espace des trajectoires à valeurs dans $\hat{V} = V \cup \{\infty\}$, compactifié d'Alexandroff de V), un temps ζ , fonction sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \hat{V} \times W'^m$ à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, et un borélien porteur $\dot{W}^m$ de W^m , ayant toutes les propriétés indiquées aux théorèmes (5.1) et (5.5), où S^N est remplacé par $\hat{V}$, et où l'équation différentielle stochastique est (6.9).

Démonstration (6.11) : On sait qu'on peut prolonger H et K à E, si on plonge V dans un espace vectoriel E (♦) , et qu'alors la solution de (5.9) est $\mathbb{P}$ ps. entièrement dans V si $x \in V$. Supposons fait ce prolongement ; nous avons maintenant des objets sur E, que nous noterons de la même manière, H,K : mais le semi-martingale directrice est maintenant $(Z \oplus \frac{1}{2}[Z,Z])$, à valeurs dans $G \oplus (G \odot G)$,

(♦) Schwartz [1], définition (8.4) page 105, Corollaire (9.28) page 117, lemme (10.3) et proposition (10.4) page 119.

tandis que H est devenue une fonction sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$, à valeurs dans $\mathcal{L}(G;E)$, et K une fonction sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G \odot G \,;\, E \oplus (E \odot E))$, dont on ne retiendra que la composante dans $\mathcal{L}(G \odot G;E)$; on a une équation différentielle stochastique ordinaire sur E. Peut-être ici des coordonnées sont-elles plus utiles, relativement à une base de G. Le champ H a les coordonnées H_k, $k = 1,2,\dots,m$, H_k fonction sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ à valeurs dans E, et le champ K les coordonnées $K_{i,j}$, $i,j = 1,2,\dots,m$, symétriques en i,j, $K_{i,j}$ fonction sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$; la 2e composante de $K_{i,j}$ est $H_i \odot H_j$, seule la première $\overset{1}{K}_{i,j}$, à valeurs dans E, sera retenue ; les composantes de Z sont Z^k, $k = 1,2,\dots,m$ dans G, alors $[Z,Z]$ a les composantes $[Z^i,Z^j]$, $i,j = 1,2,\dots,m$ dans $G \odot G$, et l'équation différentielle sur E est maintenant

$$
(6.12)\qquad \begin{cases} dX = H(X)dZ + \dfrac{1}{2}\overset{1}{K}(X)\; d[Z,Z] \qquad \text{ou} \\ dX = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} H_k(X)dZ^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \overset{1}{K}_{i,j}(X)d[Z^i,Z^j]. \end{cases}
$$

Nous avons alors une application $(\xi,\eta) \mapsto [\xi,,\eta]$ de $W' \times W'$ dans $W' \times W'$, donc une application $w \mapsto w \oplus \frac{1}{2}[w,,w]$ de W dans $W' \oplus (W' \odot W')$, espace des applications de $\overline{\mathbb{R}}_+$ dans $G \oplus (G \odot G)$; on pourra alors considérer, pour les données H,K, la solution du théorème (5.1) ou (5.5), que nous appellerons $\bar{\xi}(w+\frac{1}{2}[w,,w])$, $\bar{\Phi}(s;x;w+\frac{1}{2}[w,,w])$, $\bar{\zeta}(s;x;w+\frac{1}{2}[w,,w])$, $w \oplus \frac{1}{2}[w,,w] \in W' \oplus (W' \odot W')$. Il faut faire une petite transformation, car $\bar{\xi}_t$ et $\bar{\Phi}_t$ prennent leurs valeurs dans E, non dans V. Soit p une projection borélienne de E sur V. On posera alors $\xi(w) = p\,\bar{\xi}\,(w+\frac{1}{2}[w,,w])$, $\Phi = p\,\bar{\Phi}\,(s;x;w + \frac{1}{2}[w,,w])$, $\zeta(s;x;w) = \bar{\zeta}(s;x;w + \frac{1}{2}[w,,w])$.
Si alors $(W^m \oplus (W^m \odot W^m))_\bullet$ est l'ensemble borélien porteur sur $W^m \oplus (W^m \odot W^m)$ relatif à (H,K), provenant de ces théorèmes, on appellera $W^m_\bullet$ l'ensemble des $w \in W$ pour lesquels $w + \frac{1}{2}[w,,w] \in (W^m \oplus (W^m \odot W^m))_\bullet$, d'une part, et pour lesquels d'autre part $\bar{\xi}(w+\frac{1}{2}[w,,w])$ ou $\bar{\Phi}(s';x';w+\frac{1}{2}[w,,w])$ sont à valeurs dans V aux temps rationnels (donc aussi aux temps réels $< \bar{\zeta}(s';x';w + \frac{1}{2}[w,,w])$, pour tous les s',x' rationnels, donc aussi pour tous les s,x, réels. (Il faut faire ceci sur $\bar{\xi}$, $\bar{\Phi}$, et non sur leur projection $\xi = p\,\bar{\xi}$, $\Phi = p\bar{\Phi}$, car p est borélienne mais ne respecte pas la propriété cadlag, donc, si $\bar{\xi}(w+\frac{1}{2}[w,,w])$ est cadlag pour $w + \frac{1}{2}[w,,w] \in (W \oplus (W \odot W))_\bullet$, $p\,\bar{\xi}(w+\frac{1}{2}[w,w]) = \xi(w)$ ne l'est plus ; mais si $\bar{\xi}(w + \frac{1}{2}[w,,w])$ est cadlag et si on

choisit w telle qu'elle soit dans V aux temps rationnels, elle l'est aussi aux temps réels, et $p\,\bar{\bar{\xi}}\,(w + \frac{1}{2}[w,w]) = \xi(w+\frac{1}{2}[w,,w])$ est restée cadlag). On voit aussitôt que $W_{\bullet}^{m}$ est porteur. Le passage de V à $\hat{V}$ est évident.

§ 7. DESINTEGRATION REGULIERE

(7.1) Ici les trajectoires ne sont plus seules en jeu, nous devrons raisonner sur un système $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C})$. Rappelons qu'une désintégration régulière d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{O})$ est une famille $(\mathbb{P}_t^\omega)_{(t,\omega)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega}$ (♦) de probabilités sur $(\Omega,\mathcal{O})$, telle que :

$$
(7.2)\quad \begin{cases} 1)\ \text{pour tout } t\in\overline{\mathbb{R}}_+,\ \omega\longmapsto\mathbb{P}_t^\omega \text{ est une désintégration de } \mathbb{P} \text{ pour } \mathcal{C}_t, \\ \quad \text{c'est à dire elle est } \mathcal{C}_t\text{-mesurable (pour tout } B\in\mathcal{O},\ \omega\mapsto\mathbb{P}_t^\omega(B) \\ \quad \text{l'est), et, quelles que soient } A\in\mathcal{C}_t,\ B\in\mathcal{O},\ \mathbb{P}(A\cap B)=\int_A \mathbb{P}_t^\omega(B)\,\mathbb{P}(d\omega)\,; \\ 2)\ \text{pour toute fonction } \varphi \text{ sur } \Omega,\ \text{borélienne}, \geq 0 \text{ ou bornée, } \mathbb{P} \text{ ps.} \\ \quad t\mapsto\mathbb{P}_t^\omega(\varphi) \text{ est cadlag.} \end{cases}
$$

De telles désintégrations n'existent pas toujours ; mais, si elles existent et si $\mathcal{O}$ est dénombrablement engendrée, deux d'entre elles sont $\mathbb{P}$ ps.égales.L'existence est assurée si par exemple $(\Omega,\mathcal{O})$ est souslinien, c'est à dire s'il existe une topologie souslinienne sur Ω , dont $\mathcal{O}$ soit la tribu borélienne. Désormais nous supposerons $(\Omega,\mathcal{O})$ lusinien, dans le sens précédent (7) .

(7.3) Mais il y a des désintégrations qui seront meilleures que d'autres et nous allons les chercher. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de probabilités sur $(\Omega,\mathcal{O})$ lusinien, ayant toutes une désintégration régulière commune $(\mathbb{P}_t^\omega)$; on pourra se donner une famille arbitraire $(\mathbb{P}_t^\omega)$, et prendre pour $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités l'admettant comme désintégration régulière (ce n'est intéressant que si $\mathcal{P}$ n'est pas vide ; auquel cas $\mathcal{P}$ est en général assez grand . En effet, si les tribus $\mathcal{C}_t$ sont fortes, et si $(t,\omega)\mapsto\mathbb{P}_t^\omega$ est $(\mathrm{Bor}\ \overline{\mathbb{R}}_+)\otimes\mathcal{O})$-mesurable, soit Ω' l'ensemble des $\omega\in\Omega$ pour lesquels $\mathbb{P}_o^\omega$ admet la désintégration $(\mathbb{P}_t^{\omega'})_{(t,\omega')\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega}$; il porte toutes les $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}$, et $\mathcal{P}$ est exactement l'ensemble des intégrales $\mathbb{P}=\int_{\Omega'}\mathbb{P}_o^\omega\,\mu(d\omega)$, μ-mesures sur Ω', ou aussi mesures sur Ω portées,par Ω', car alors $\mathbb{P}=\int_{\Omega'}\mathbb{P}_o^\omega\,\mathbb{P}(d\omega)$ (Schwartz [2] , proposition (6.15), page 137). Nous introduirons les définitions suivantes :

Définition (7.4) : Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de probabilités sur $(\Omega,\mathcal{O})$ lusinien,

---

(♦) Tout ici se réfère à Schwartz [2].

admettant une désintégration régulière commune $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ pour $\mathcal{C}$; $(\mathbb{P}_t^{\omega})$, entre parenthèses, veut dire $(\mathbb{P}_t^{\omega})_{(t,\omega)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega}$. Soient θ une topologie lusinienne sur Ω de tribu borélienne $\mathcal{O}$, et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions boréliennes bornées sur Ω. On dit qu'un ensemble de Ω est $\mathcal{P}$-négligeable s'il est $\mathbb{P}$-négligeable pour toute $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$ (ce qui n'entraîne nullement qu'il soit contenu dans un borélien $\mathcal{P}$-négligeable), d'où la notion de $\mathcal{P}$ps. ; un ensemble Ω est $\mathcal{P}$-porteur si son complémentaire est $\mathcal{P}$-négligeable, i.e. s'il porte toutes les $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$. Un ensemble Ω' sera dit $(\mathbb{P}_{\omega}^{t})$-porteur si, pour $\omega\in\Omega'$ (pas nécessairement pour $\omega\in\Omega$), il porte toutes les $\mathbb{P}_t^{\omega}$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$; θ-porteur pour $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ si, pour tout $\omega\in\Omega'$, $t\to\mathbb{P}_t^{\omega}$ est cadlag pour la topologie étroite de $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$, espace des probabilités sur Ω_θ ; $\mathcal{F}$- porteur pour $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ si, pour tout $\omega\in\Omega'$ et toute $\varphi\in\mathcal{F}$, $t\to\mathbb{P}_t^{\omega}(\varphi)$ est cadlag . Toutes ces notions sont relatives à une désintégration $(\mathbb{P}_t^{\omega})$, sauf $\mathcal{P}$-porteur. Une désintégration régulière de $\mathcal{P}$, $(\mathbb{P}_t^{\omega})$, est dite <u>très régulière</u>, si elle est infra-optionnelle, c'est à dire optionnelle pour tout famille de tribus $\mathcal{C}'_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, où $(\mathcal{C}'_\varepsilon)_t=\mathcal{C}_{t+\varepsilon}$, (infra-optionnelle en tant que fonction à valeurs mesures $\geqslant 0$ sur Ω, ou à valeur dans l'espace $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$ de ces mesures, muni de la topologie étroite relative à une topologie lusinienne θ sur Ω de tribu borélienne $\mathcal{O}$) et si, pour toute θ, toute $\mathcal{F}$, il existe un borélien de Ω qui est $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^{\omega}),\theta,\mathcal{F})$-porteur. Notons que si un processus F est infra-optionnel, F_T est $\mathcal{C}_T$-mesurable pour tout temps d'arrêt, car, puisqu'il est $(\mathcal{C}')$-optionnel, F_T est $\mathcal{C}_{T+\varepsilon}$-mesurable, donc $\mathcal{C}_T$-mesurable par continuité à droite. Il en résulte que, si $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ est très régulière, et si T est un temps d'arrêt, $(\mathbb{P}_{T(\omega)}^{\omega})_{\omega\in\mathbb{R}_+}$ est une désintégration de toute $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$ pour la tribu $\mathcal{C}_T$ (pour une désintégration seulement régulière, elle est seulement $\mathcal{P}$ps. égale à une désintégration pour $\mathcal{C}_T$; si la désintégration est très régulière, $\omega\mapsto\mathbb{P}_{T(\omega)}^{\omega}$ est $\mathcal{C}_T$-mesurable, donc on a une vraie désintégration relativement à la tribu $\mathcal{C}_T$.

<u>Remarque (7.4.1)</u> : Nous n'avons pas introduit la tribu infra-optionnelle $\mathbb{R}_+\times\Omega$ aux paragraphes précédents, pour ne pas les alourdir, alors qu'elle est indispensable ici. Mais on peut ajouter au théorème (1.2), 3), que, si H et Z sont infra-optionnels, $H_-.Z$ l'est aussi ; en effet H et Z sont optionnelles pour $(\mathcal{C}'_\varepsilon)$,

donc les $T_{i,n}$ sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{C}'_\varepsilon)$, $H_{T_{i,n}}(Z^{T_{i+1,n}} - Z^{T_{i,n}}) \doteq (H_-..Z)^{(n)}$ est optionnelle pour $(\mathcal{C}'_\varepsilon)$, enfin $H_-..Z$ aussi ; donc elle est infra-optionnelle. De même au théorème (2.4), si Z est infra-optionnelle, $\xi \circ Z$ aussi ; au théorème (6.2), si X et Y sont infra-optionnelles ,$[X,,Y]$ aussi.

<u>Théorème (7.5)</u> : Si $\mathcal{P}$ admet une désintégration régulière commune, elle en admet aussi une très régulière, et toute désintégration infra-optionnelle qui, pour une topologie lusinienne θ , admet un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur, est très régulière. Si $(\mathbb{P}_t^\omega)$ est une désintégration très régulière, alors, pour toute θ , toute $\mathcal{F}$, tout borélien $\mathcal{P}$-porteur contient un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega),\theta,\mathcal{F})$-porteur. La désintégration très régulière est essentiellement unique au sens suivant : deux désintégrations très régulières $(\mathbb{P}'^\omega_t)$, $(\mathbb{P}''^\omega_t)$, coïncident sur un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}'^\omega_t),(\mathbb{P}''^\omega_t))$-porteur.

Nous démontrerons ce théorème par une série de lemmes ; on supposera donnés $(\Omega,\mathcal{O})$ lusihien, $\mathcal{C}$, et $\mathcal{P}$ un ensemble de probabilités ayant au moins une désintégration régulière commune.

<u>Proposition (7.6)</u> : Soit F une fonction sur $\bar{\mathbb{Q}}_+\times\Omega$ à valeurs dans un espace polonais M, $F_{t'}$, $\mathcal{C}_{t'}$-mesurable. La fonction

$$(7.6.0) \qquad \tilde{F}(t,\omega) = \overline{\lim_{\substack{t' \in \bar{\mathbb{Q}}_+ \\ t' \geqslant t \\ t' \to t}}} F(t',\omega) \quad (8)$$

est infra-optionnelle. Soit $\tilde{\Omega} = \{\omega; t' \mapsto F(t',\omega)$ est restriction à $\bar{\mathbb{Q}}_+$ d'une fonction cadlag sur $\bar{\mathbb{R}}_+\}$; il est borélien et contenu dans l'ensemble des points pour lesquels $t\mapsto \tilde{F}(t,\omega)$ est cadlag ; si F était définie sur $\bar{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, il contient l'ensemble $\Omega_\bullet$ des ω pour lesquels $t\mapsto F(t,\omega)$ est cadlag, et, sur ce dernier ensemble, $F = \tilde{F}$.

Si on convient d'appeler régulier un processus adapté $\mathcal{P}$-ps.cadlag, très régulier un processus infra-optionnel, admettant un borélien $\mathcal{P}$-porteur au-dessus duquel il est cadlag, tout processus F à valeurs dans un polonais M, régulier, est $\mathcal{P}$ ps. égal à un processus $\tilde{F}$ très régulier.

Démonstration : Soit f une fonction réelle sur $\overline{\Phi}_+ \times \Omega$, $f(t',.)$ $\mathcal{C}_{t'}$-mesurable, et $\overline{f}(t,\omega) = \underset{\substack{t' \in \overline{\Phi}_+ \\ t' > t,\ t' \to t}}{\text{lim-sup}} f(t',\omega)$; montrons qu'elle est infra-optionnelle.

Pour $\alpha > \beta$ dans $\mathbb{R}$, $\rho > 0$, soit $C(t',\beta,\rho)$ le produit de $[(t'-\rho)^+, t'] \subset \mathbb{R}$ par $\{\omega \in \Omega ; f(t',\omega) \geqslant \beta\} \subset \Omega$; le 2ème ensemble est dans $\mathcal{C}_{t'} = \mathcal{C}_{(t'-\rho)+\rho}$ donc dans $\mathcal{C}_{(t'-\rho)^+ + \rho} = (\mathcal{C}'_\rho)_{(t'-\rho)^+}$, et le 1er ensemble est un intervalle débutant en en $(t'-\rho)_+$, donc le produit est un intervalle stochastique pour la famille de tribus $\mathcal{C}'_\rho$, et il en est de même de $C(\beta,\rho) = \bigcup_{t' \in \overline{\Phi}_+} C(t',\beta,\rho)$; c'est l'ensemble des (t,ω) pour lesquels il existe un $t' \in \overline{\Phi}_+$, $t \leqslant t' \leqslant t+\rho$, tel que $f(t',\omega) \geqslant \beta$. Alors $\bigcap_{\substack{\rho > 0 \\ \beta < \alpha}} C(\beta,\rho)$ est $\mathcal{C}'_\rho$ -optionnel pour tout $\rho > 0$, donc $\mathcal{C}$-infra-optionnel et c'est exactement $\{\overline{f} \geqslant \alpha\}$, donc $\overline{f}$ est infra-optionnelle. De même la lim-inf. $\underline{f}$.

Si maintenant M est un espace polonais, on peut le considérer comme un borélien B de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (on appelle D un ensemble dénombrable dense dans M, d la distance ; alors $x \mapsto (d(a,x))_{a \in D}$ est un homéomorphisme de M sur son image, donc celle-ci est un borélien B de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Schwartz [2] , corollaire page 94) Donc F, application dans M, devient une famille $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles. On vient de voir que chaque $\overline{F}_k$, $\underline{F}_k$ est infra-optionnelle ; $\tilde{F}$ n'est autre que $(\overline{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là où $\overline{F}_k = \underline{F}_k$ finie, $\forall k$, et où $F \in B$, et 0 là où ces conditions ne sont pas toutes réalisées, donc F est infra-optionnelle.

Alors $F_{t'}$ est $\mathcal{C}_{t'}$-mesurable donc $\mathcal{O}$-mesurable, et F est une application borélienne de Ω dans $M^{\overline{\Phi}_+}$; on sait alors que $\tilde{\Omega}$ est borélien (Schwartz [3], corollaire 2, page 137). Soit alors F régulier sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$; $\Omega_\bullet$ porte $\mathcal{P}$, $\Omega_\bullet \subset \tilde{\Omega}$ donc $\tilde{\Omega}$ est $\mathcal{P}$-porteur, donc $\tilde{F}$ est très régulier, et $\mathcal{P}$ ps-égal à F. ∎

Lemme (7.7) : Soit $(\mathbb{P}^{\omega}_{t'})$ une désintégration de $\mathcal{P}$ pour les temps rationnels. Posons, pour une topologie polonaise θ sur Ω de tribu borélienne $\mathcal{O}$:

$$\mathbb{P}^{\omega}_t(\theta) = \delta_{(\omega_o)} + \overline{\lim_{\substack{t' \in \overline{\Phi}_+ \\ t' \geqslant t \\ t' \to t}}} (\mathbb{P}'^{\omega}_t - \delta_{(\omega_o)}). \tag{7.7.1}$$

Alors $\mathcal{P}$ admet une désintégration régulière commune pour tous les temps, et toute désintégration régulière commune coïncide $\mathcal{P}$ ps. avec $(\mathbb{P}_t^{\omega}(\theta))$. Pour cette dernière, qui est infra-optionnelle, $\Omega(\theta) = \{\omega, t' \mapsto \mathbb{P}_{t'}^{\omega}$, est restriction à $\overline{\mathbb{Q}}_+$ d'une fonction cadlag$\}$ est borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur. [Et, lorsque le théorème (7.5) sera démontré, on saura que $(\mathbb{P}_t^{\omega}(\theta))$ est une désintégration très régulière] . La limite $\overline{\lim}$ et la continuité cadlag sont entendues au sens de la topologie étroite $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta) - \delta_{(\omega_o)}$, espace des $\mu - \delta_{(\omega_o)}$, μ mesure sur Ω_θ (espace Ω muni de la topologie θ); la présence du $\delta_{(\omega_o)}$ est un pur artifice technique, pour que, si la limite n'existe pas et que $\overline{\lim} = 0$, $\mathbb{P}_t^{\omega}(\theta)$ reste une probabilité . "Infra-optionnelle" est considéré, soit comme fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$, espace (polonais) des probabilités sur Ω_θ, soit comme fonction à valeurs mesures sur $(\Omega,\mathcal{O})$.

<u>Démonstration</u> : On se ramène au lemme précédent en prenant, pour M, soit $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$, soit $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta) - \delta_{(\omega_o)}$. On sait que, $(\Omega,\mathcal{O})$ étant lusinien, chaque $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ admet une désintégration régulière $(\mathbb{P}_t^{\omega})$, et celle-ci est $\mathcal{P}$ ps. cadlag à valeurs dans $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$ ou dans l'espace des mesures à valeurs dans $(\Omega,\mathcal{O})$ (9) (l'un d'ailleurs entraîne l'autre parce que les fonctions continues bornées sur Ω_θ engendrent sa tribu borélienne) ; donc nécessairement, d'après le lemme précédent, $(\mathbb{P}_t^{\omega}) = (\mathbb{P}_t^{\omega}(\theta))$ $\mathbb{P}$ ps., mais la deuxième, infra-optionnelle, est $\mathcal{G}$-adaptée, donc sera elle-même une désintégration régulière.

<u>Remarque</u> : En reprenant les notations du lemme précédent, $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ et $(\mathbb{P}_t^{\omega}(\theta))$ coïncident sur $\Omega_\bullet$, $\mathcal{P}$-porteur mais pas borélien ; une désintégration régulière n'est pas en général très régulière, et n'est pas en général cadlag sur un borélien $\mathcal{P}$-porteur.

<u>Lemme (7.8)</u> : Si θ est une topologie lusinienne, il existe une désintégration régulière $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ infra-optionnelle admettant un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur. Pour une telle désintégration, tout borélien $\mathcal{P}$-porteur contient un sous-borélien $(\mathcal{P},\theta)$ porteur.

<u>Démonstration</u> : Partons d'une désintégration régulière quelconque $(\overline{\mathbb{P}_t^{\omega}})$, et soit $\overline{\theta}$ une topologie polonaise plus fine que θ ; l'ensemble $\Omega(\overline{\theta})$ et la désintégration $(\overline{\mathbb{P}_t^{\omega}(\overline{\theta})})$ des lemmes (7.6), (7.7), répondent à la question. La fin résulte de ce que

l'intersection d'un borélien $\mathcal{P}$-porteur et d'un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur est un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur.

Lemme (7.9) : Si $(\mathbb{P}_t'^{\omega})$, $(\mathbb{P}_t''^{\omega})$ sont deux désintégrations régulières, θ', θ'' deux topologies lusiniennes sur Ω de tribu borélienne $\mathcal{O}$, et si elles admettent des boréliens Ω', $(\mathcal{P},\theta')$-porteur pour $(\mathbb{P}_t'^{\omega})$, et $\Omega''(\mathcal{P},\theta'')$-porteur pour $(\mathbb{P}_t''^{\omega})$, il existe un borélien sur lequel elles coïncident, et qui est $(\mathcal{P},\theta,\theta')$-porteur pour chacune d'elles. En particulier, toute désintégration admettant un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur admet un sous-borélien $(\mathcal{P},\theta,\theta')$-porteur.

Démonstration : Soit $\theta' \vee \theta'' = \overline{\theta}$ la topologie borne supérieure ; elle est encore lusinienne (c'est la topologie induite sur la diagonale de $\Omega_{\theta'} \times \Omega_{\theta''}$). Soient $(\overline{\mathbb{P}_t^{\omega}})$, $\overline{\Omega}$, ayant pour $\overline{\theta}$ les propriétés du lemme (7.8). Considérons le borélien $\mathcal{P}$-porteur $\Omega' \cap \Omega'' \cap \{\omega; \mathbb{P}_{t'}'^{\omega} = \mathbb{P}_{t'}''^{\omega} = \overline{\mathbb{P}_{t'}^{\omega}}$, pour tout $t' \in \overline{\mathbb{Q}_+}\}$. Pour ω dans ce borélien, $t \mapsto \mathbb{P}_t'^{\omega}$ et $t \mapsto \overline{\mathbb{P}_t^{\omega}}$ sont cadlag pour les topologies étroites relatives à θ' et $\overline{\theta}$ respectivement, donc toutes deux pour θ', et coïncident aux temps rationnels, donc à tous les temps ; de même pour $\mathbb{P}_t''^{\omega}$ et $\overline{\mathbb{P}_t^{\omega}}$, d'où le résultat.

Lemme (7.10) : Si θ est une topologie lusinienne, $\mathcal{F}$ une famille dénombrable de fonctions boréliennes bornées sur Ω, toute désintégration admettant un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur admet un sous-borélien $(\mathcal{P},\theta,\mathcal{F})$-porteur.

Démonstration : Soit θ' la topologie plus fine que θ, la moins fine pour laquelle les $\varphi \in \mathcal{F}$ soient continues ; $\omega \mapsto (\omega,(\varphi(\omega))_{\varphi \in \mathcal{F}})$ est borélienne injective de Ω_θ dans $\Omega_\theta \times \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$, et θ' est exactement la topologie de l'image de cette application, qui est lusinienne ; donc il existe un sous-borélien $(\mathcal{P},\theta,\theta')$-porteur d'après (7.9), donc $(\mathcal{P},\theta,\mathcal{F})$-porteur.

Remarque (7.10.1) : On ne pourrait pas remplacer les φ boréliennes bornées par des φ boréliennes non bornées, ≥ 0 par exemple. En effet, les topologies étroites $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$ sont définies par la convergence simple sur les fonctions continues bornées. Si φ est continue ≥ 0 non bornée sur Ω_θ, $\mu \longmapsto \mu(\varphi)$ est seulement semi-continue inférieurement pour la topologie étroite, parce que $\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow (\varphi \wedge n)$.

<u>Lemme (7.11)</u> : Soient $(\mathbb{P}_t^\omega)$ une désintégration de $\mathcal{P}$, θ une topologie lusinienne. S'il existe un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur, il existe un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega),\theta)$-porteur, et tout borélien $\mathcal{P}$-porteur contient un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega),\theta)$-porteur.

<u>Démonstration</u> : L'intersection d'un borélien $\mathcal{P}$-porteur et d'un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur est $(\mathcal{P},\theta)$-porteuse ; donc, si Ω'_o est un borélien $\mathcal{P}$-porteur, il existe $\Omega'_1 \subset \Omega'_o$, $(\mathcal{P},\theta)$-porteur. Soit $\mathcal{F}_1$ la famille $\{1_{\Omega'_1}\}$; il existe, d'après le lemme (7.10), un borélien Ω''_2 $(\mathcal{P},\theta,\mathcal{F}_1)$-porteur, qu'on peut supposer contenu dans Ω'_1 ; puisque Ω'_1 est $\mathcal{P}$-porteur, $\mathcal{P}$ ps. $t \mapsto \mathbb{P}_t^\omega(\Omega'_1)$ est constante et égale à 1 ; donc $\Omega'_2 = \Omega''_2 \cap \{\omega; \mathbb{P}_t^\omega(\Omega'_1) = 1$ pour tout $t \in \overline{\mathbb{Q}}_+\}$ est un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur, et, pour $\omega \in \Omega'_2$, $\mathbb{P}_t^\omega$ est portée par Ω'_1 pour tout t réel. On continue par récurrence ; si $\Omega'_o, \Omega'_1, \dots, \Omega'_n$ sont déterminés, si Ω''_{n+1} est un borélien $(\mathcal{P},\theta,\mathcal{F}_n)$-porteur, $\mathcal{F}_n = \{1_{\Omega'_n}\}$, qu'on peut supposer contenu dans Ω'_n, $\Omega'_{n+1} = \Omega''_{n+1} \cap \{\mathbb{P}_t(\Omega'_n) = 1$ pour tout $t \in \overline{\mathbb{Q}}_+\}$ est $(\mathcal{P},\theta)$- porteur, et, pour $\omega \in \Omega'_{n+1}$, pour tout t, $\mathbb{P}_t^\omega$ est portée par Ω'_n. On posera $\Omega' = \bigcap_n \Omega'_n$; $\Omega' \subset \Omega'_o$, il est $(\mathcal{P},\theta)$-porteur, et, pour $\omega \in \Omega'$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mathbb{P}_t^\omega$ est portée par Ω', donc il est $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega),\theta)$-porteur.

(7.12) <u>Démonstration du théorème (7.5)</u> : Soit $\mathcal{P}$, admettant une désintégration régulière commune. Par (7.8), si θ_σ est une topologie lusinienne, il existe une désintégration. $(\mathbb{P}_t^\omega)$ infra-optionnelle, admettant un borélien $(\mathcal{P}, \theta_o)$-porteur. Par (7.9), pour toute topologie lusinienne θ, elle admet un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur. Par (7.10), pour toute $\mathcal{F}$, elle admet un borélien $(\mathcal{P},\theta,\mathcal{F})$-porteur ; par (7.11), celui-ci contient un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega),\theta,\mathcal{F})$-porteur, donc (P_t^ω) est très régulière. Tout borélien $\mathcal{P}$-porteur contient un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur (7.8), celui-ci un borélien $(\mathcal{P},\theta,\mathcal{F})$-porteur (7.10), celui-ci un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega),\theta,\mathcal{F})$-porteur (7.11). Si $(\mathbb{P}'^\omega_t)$, $(\mathbb{P}''^\omega_t)$ sont deux désintégrations très régulières, alors, pour n'importe quelle θ, (7.9) montre qu'il existe un borélien sur lequel elles coïncident, et $(\mathcal{P},\theta)$-porteur relativement à chacune d'elles ; par (7.11), il contient un sous-borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}'^\omega_t), (\mathbb{P}''^\omega_t))$-porteur sur lequel elles coïncident. ∎

<u>Corollaire (7.13)</u> : Soient $(\mathbb{P}_t^\omega)$ une désintégration très régulière de $\mathcal{P}$, et soit Ω' un ensemble $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur. Alors, pour Ω', $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap \Omega'$ (lusinienne), $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \Omega'$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P}|_{\Omega'}$, $\mathbb{P}'^\omega_t = \mathbb{P}_t^\omega|_{\Omega'}$, $(\mathbb{P}'^\omega_t)$ est une désintégration très régulière de $\mathcal{P}'$.

Démonstration : Le fait que ce soit une désintégration régulière est évident, et ne dépend pas des propriétés boréliennes : si Ω'' quelconque est $\mathcal{P}$-porteur, il contient un $\Omega'(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur par une démonstration analogue à celle du lemme (7.11), et en se restreignant à Ω', on a une désintégration régulière. Le principal intérêt ici est que $(\Omega',\mathcal{O}')$ est encore lusinien, et qu'on garde une désintégration très régulière (♦). Ensuite il est évident que $(\mathbb{P}'^{\omega}_t)$ est $\mathcal{C}'$-infra-optionnelle. Soit θ une topologie lusinienne ; elle induit sur Ω' une topologie lusinienne, et la topologie étroite $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$ induit la topologie étroite $\mathcal{M}_+(\Omega'_{\theta'})$. Alors il existe un borélien $(\mathcal{P},\theta)$-porteur , relativement à $(\mathbb{P}_t^\omega)$, qu'on peut supposer contenu dans Ω' ; il est donc $(\mathcal{P}',\theta')$-porteur relativement à $(\mathbb{P}'^{\omega}_t)$. ∎

Nous allons maintenant voir certaines propriétés des désintégrations très régulières.

Proposition (7.14) (Voir Schwartz [2] , proposition (5.18), qui dit qu'on a une propriété $\mathcal{P}$ps., pour $s \leqslant t$; nous voulons un borélien $\mathcal{P}$-porteur, on ne l'obtient que pour $s < t$) : Soit $(\mathbb{P}_t^\omega)$ une désintégration très régulière de $\mathcal{P}$. Soit Z une fonction $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \longrightarrow (E,\mathcal{E})$, E ensemble muni d'une tribu $\mathcal{E}$ dénombrablement séparante. On suppose qu'il existe un borélien $\mathcal{P}$-porteur $\Omega' \subset \Omega$, tel que Z, restreinte à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'$, soit $(\mathcal{C} \cap \Omega')$-infra-optionnelle (resp. prévisible). Alors il existe un borélien Ω'' $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur tel que, pour tout $\omega \in \Omega''$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, Z_s soit $\mathbb{P}_t^\omega$-ps. égale à $Z_s(\omega)$ pour $s < t$ (resp. $s \leqslant t$). Si alors on se restreint à Ω'' (suivant (7.13)), la propriété devient vraie pour tout ω .

Démonstration : Par l'opération du corollaire (7.12), on peut passer à un sous-borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur de Ω', et démontrer la propriété pour lui ; on pourra ensuite revenir à Ω . Cela revient à supprimer Ω', à supposer Z infra-optionnel (resp. prévisible) sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ tout entier. On peut ensuite supposer Z optionnel au lieu d'infra-optionnel ; car il est $(\mathcal{C}'_\varepsilon)$-optionnel, $(\mathcal{C}'_\varepsilon)_t = \mathcal{C}_{t+\varepsilon}$; la désintégration $(t,\omega) \longmapsto \mathbb{P}^\omega_{t+\varepsilon}$ est très régulière pour $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}'_\varepsilon$; si alors on a démontré la proprié-

(♦) Tout borélien d'un lusinien est lusinien, Schwartz [3] , théorème 2, page 95.

té dans le cas optionnel, on saura que, pour $\omega \in \Omega''$ borélien $\mathcal{P}$-porteur, pour tout t, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}^{\omega}_{t+\varepsilon}$ ps. $Z_s = Z_s(\omega)$ pour tout $s < t$, donc aussi $\mathbb{P}^{\omega}_t$ ps. $Z_s = Z_s(\omega)$ pour tout $s < t-\varepsilon$, donc aussi pour tout $s < t$.

Comme il s'agit d'une propriété de tribus, et qu'on peut remplacer la tribu $\mathcal{E}$ par une tribu plus petite dénombrablement engendrée, on peut se ramener à $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc à $E = \mathbb{R}$, et supposons Z cadlag (resp. continue). Fixons d'abord $s \leqslant t$. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions caractéristiques de parties boréliennes séparant les points de $\mathbb{R}$. Alors $\varphi_n \circ Z_s$ est $\mathcal{C}_s$-mesurable donc $\mathcal{C}_t$-mesurable ; on sait donc que, pour $\mathcal{P}$-presque tout ω, $\mathbb{P}^{\omega}_t$ ps. $\varphi_n \circ Z_s = \varphi_n(Z_s(\omega))$, donc $\mathbb{P}^{\omega}_t(\varphi_n \circ Z_s) = \varphi_n(Z_s(\omega))$. Mais les fonctions $\omega \mapsto \mathbb{P}^{\omega}_t(\varphi_n \circ Z_s)$ et $\omega \mapsto \varphi_n(Z_s(\omega))$ dont boréliennes, leur ensemble de coïncidence est borélien, donc il existe un borélien $\mathcal{P}$-porteur $\bar{\Omega}$ tel que, $\forall\, \omega \in \bar{\Omega}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}^{\omega}_t(\varphi_n \circ Z_s) = \varphi_n(Z_s(\omega))$. On peut même choisir $\bar{\Omega}$ de manière que ceci soit vrai pour tout t rationnel $\geqslant s$. Mais, si on pose $\mathcal{F} = (\varphi_n \circ Z_s)_{n \in \mathbb{N}}$, pour s fixé, il existe un borélien $\bar{\bar{\Omega}}_s \subset \bar{\Omega}$, $(\mathcal{P}, (\mathbb{P}^{\omega}_t), \mathcal{F})$-porteur ; alors, pour $\omega \in \bar{\bar{\Omega}}_s$, pour tout n , $t \mapsto \mathbb{P}^{\omega}_t(\varphi_n \circ Z_s)$ est égale à $\varphi_n(Z_s(\omega))$ pour t rationnel $\geqslant s$ et est cadlag, donc est égale à $\varphi_n(Z_s(\omega))$ pour t réel $\geqslant s$. Cela veut dire que, pour tout n pour lequel $\varphi_n(Z_s(\omega)) = 1$, $\mathbb{P}^{\omega}_t(\varphi_n \circ Z_s)$ aussi vaut 1, et comme $0 \leqslant \varphi_n \circ Z_s \leqslant 1$, $\mathbb{P}^{\omega}_t$ ps. $\varphi_n \circ Z_s = 1$; en prenant tous les n pour lesquels $\varphi_n(Z_s(\omega)) = 1$, cela veut dire que, pour $\omega \in \bar{\bar{\Omega}}_s$, et tout $t \geqslant s$, $\mathbb{P}^{\omega}_t$ ps. $Z_s = Z_s(\omega)$. Si alors $\Omega''' = \bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+} \bar{\bar{\Omega}}_s$, on voit que, c'est un borélien $(\mathcal{P}, (\mathbb{P}^{\omega}_t))$-porteur et que, pour $\omega \in \Omega'''$, pour t réel, s' rationnel $\leqslant t$, $\mathbb{P}^{\omega}_t$ ps. $Z_{s'} = Z_{s'}(\omega)$; Z étant cadlag (resp. continue), il est aussi vrai que $\mathbb{P}^{\omega}_t$ ps. $Z_s = Z_s(\omega)$ pour s réel $< t$ (resp. $\leqslant t$) . ∎

<u>Remarque (7.15)</u> : <u>Si l'on fixe</u> t, même dans le cas infra-optionnel, on peut aller jusqu'à $s \leqslant t$, comme nous venons de le voir ; d'autre part, si l'on cherche seulement un $\mathcal{P}$ ps. , sans <u>borélien</u> porteur, on peut aussi, sans fixer t, aller jusqu'à $s \leqslant t$. Mais le cas $s = t$ est bien plus délicat que le cas $s < t$, même pour démontrer $\mathcal{P}$ps. J'ignore absolument si $s \leqslant t$ est vrai dans le même cas infra-optionnel, avec un borélien porteur. Les propriétés suivantes sont équivalentes, toutes vraies ou toutes fausses pour une désintégration très régulière :

1) Si Z est infra-optionnel, il existe un borélien $\mathcal{P}$-porteur Ω'' tel que, $\forall\ \omega \in \Omega''$, $\forall t$, $\mathbb{P}_t^\omega$ ps. $Z_s = Z_s(\omega)$ pour $s \leqslant t$ (ou pour $s = t$) ;

2) Même résultat avec $Z = 1_{[T,+\infty]}$, T temps d'arrêt ;

3) Si Z est réel infra-optionnel borné, $\forall\ \omega \in \Omega''$, $\forall\ t$, $\mathbb{P}_t^\omega(Z_t) = Z_t(\omega)$;

4) Si Z est réel très régulier, borné, $(t,\omega) \mapsto \mathbb{P}_t^\omega(Z_t)$ est très régulier.

Tous ces résultats sont vrais si le suivant est vrai (mais je doute qu'il le soit) :

5) Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de surmartingales $\geqslant 0$ bornées, très régulières, et si Z est leur limite, elle est aussi très régulière (on sait qu'elle est $\mathcal{P}$ ps. cadlag ; est-elle cadlag sur un borélien porteur ?).

Corollaire (7.16) : Soit $(\mathbb{P}_t^\omega)$ une désintégration très régulière de $\mathcal{P}$. Il existe un borélien Ω', $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur, tel que, $\forall\ \omega \in \Omega'$, $\forall s < t$, $\mathbb{P}_t^\omega$ ps. $\mathbb{P}_s^{\bullet} = \mathbb{P}_s^\omega$. Si on se restreint à Ω' suivant (7.13), la propriété devient vraie pour tout ω .

Démonstration : On raisonne sur les $\mathbb{P}_t^\omega(B_n)$, pour une suite de parties boréliennes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω , séparant les atomes. Alors chaque $(t,\omega) \mapsto \mathbb{P}_t^\omega(B_n)$ est réelle infra-optionnelle.

Proposition (7.16) (♦) : Soit $(\mathbb{P}_t^\omega)$ une désintégration très régulière de $\mathcal{P}$. Il existe un borélien Ω', $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur, tel que, $\forall\ \omega \in \Omega'$, $\forall s$, $\forall t \geqslant s$,

$$\mathbb{P}_s^\omega = \int_\Omega \mathbb{P}_t^{\bar{\omega}}\ \mathbb{P}_s^\omega(d\bar{\omega}) \ . \tag{7.17}$$

Si donc on se restreint à Ω', suivant (7.13), on aura, pour tout $\omega \in \Omega'$, $\forall s$, $\forall t \geqslant s$:

$$\mathbb{P}'^{\,\omega}_s = \int_{\Omega'} \mathbb{P}'^{\,\bar{\omega}}_t\ \mathbb{P}'^{\,\omega}_s(d\bar{\omega}). \tag{7.18}$$

Démonstration : Soient d'abord s, t fixés, $s \leqslant t$. On sait que (7.17) est vraie pour $\mathcal{P}$-presque tout ω ; mais $\omega \mapsto \mathbb{P}_s^\omega$ et $\omega \mapsto \int_\Omega \mathbb{P}_t^{\bar{\omega}}\mathbb{P}_s^\omega(d\bar{\omega})$ sont $\mathcal{G}_s$-mesurables (à valeurs mesures sur une tribu dénombrablement engendrée), donc leur ensemble de

(♦) Voir Schwartz [2] , lemme (5.10) page 108, qui donne une propriété $\mathcal{P}$ps., nous voulons un borélien $\mathcal{P}$-porteur.

coïncidence est borélien, c'est donc un borélien $\mathcal{P}$-porteur ; et il existera un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$-porteur Ω'' (d'après (7.5)) pour lequel l'égalité sera vraie pour $s' \leqslant t'$ rationnels.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dénombrable de fonctions boréliennes bornées sur Ω , stable par $\vee$ et $\wedge$, engendrant la tribu borélienne. Il suffira de prouver l'égalité des deux membres de (7.17) pour toute $\varphi \in \mathcal{F}$. Il existe un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^\omega))$- porteur $\Omega' \subset \Omega''$ tel que, $\forall \omega \in \Omega', \forall t'$ rationnel, $\forall \varphi \in \mathcal{F}$, $s \mapsto \mathbb{P}_s^\omega(\varphi)$ et $s \to \int_\Omega \mathbb{P}_{t'}^{\bar\omega}(\varphi)\, \mathbb{P}_s^\omega(d\bar\omega)$ soient cadlag (car chaque $\mathbb{P}_{t'}^{\bullet}(\varphi)$ est borélienne) ; elles coïncident pour s' rationnel $\leqslant t'$, donc pour tout s réel $\leqslant t'$, donc (7.17) est vraie pour $\omega \in \Omega'$, s réel $\leqslant t'$ rationnel. Fixons maintenant s ; pour $\bar\omega \in \Omega'$, $t \mapsto \mathbb{P}_t^{\bar\omega}(\varphi)$ est cadlag ; mais $\mathbb{P}_s^\omega$ est portée par Ω' pour $\omega \in \Omega'$, donc $\int_\Omega$ peut se remplacer par $\int_{\Omega'}$, et le théorème de convergence dominée de Lebesgue dit que $t \mapsto \int_{\Omega'} \mathbb{P}_t^{\bar\omega}(\varphi)\, \mathbb{P}_s^\omega(d\bar\omega)$ est cadlag ; elle est égale à la constante $\mathbb{P}_s^\omega(\varphi)$ pour t' rationnel $\geqslant s$, donc aussi pour t réel $\geqslant s$, et (7.17) est vraie pour $\omega \in \Omega', s \leqslant t$ réels . ■

Il faut maintenant voir la notion de tribus fortes, sous l'angle borélien.

<u>Définition (7.19)</u> (♦) : Soient $\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ deux tribus, et supposons que $\mathcal{P}$ ait, pour chacune d'elles, une désintégration commune $(\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega)_{\omega \in \Omega}$, $(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega'})_{\omega' \in \Omega}$. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ -beaucoup plus forte que $\mathcal{S}$ s'il existe un borélien $\mathcal{P}$-porteur donc aussi un borélien Ω' $(\mathcal{P}, (\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega), (\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega'}))$-porteur, tel que, $\forall \omega \in \Omega'$, $(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega'})_{\omega' \in \Omega}$ soit une désintégration de $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega$ relativement à $\mathcal{C}$ (Il n'y a ici que 2 tribus, ou 2 valeurs du temps, donc désintégration régulière ou très régulière est synonyme de désintégration) . Ceci est bien évidemment indépendant des choix de $(\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega)$ et $(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega'})$. Soit en effet $(\overline{\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega})$ un autre choix ; les deux choix sont égaux $\mathcal{P}$ps. mais leur ensemble de coïncidence est un borélien Ω'' , qui est donc $\mathcal{P}$-porteur . Pour $\omega \in \Omega' \cap \Omega''$ $\mathcal{P}$-porteur, chaque $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega$, donc chaque $\overline{\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^\omega}$, admet la désintégration $(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega'})$ pour $\mathcal{C}$. De même soit $(\overline{\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega'}})$ une deuxième désintégration de $\mathcal{P}$ pour $\mathcal{C}$; son

---

(♦) Voir définition (3.7) page 56 de Schwartz [2] pour plus forte, forte ; nous avons ici beaucoup plus forte, très forte.

ensemble de coïncidence avec la première est un borélien $\mathcal{P}$-porteur, donc contenant un borélien $(\mathcal{P},(\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{S}}))$-porteur Ω''' ; pour $\omega \in \Omega' \cap \Omega'''$ $\mathcal{P}$-porteur, chaque $\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{S}}$ admet la désintégration $(\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}{}')$ donc aussi $(\overline{\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}{}'})$, puisque celle-ci lui est égale sur $\Omega' \cap \Omega'''$ donc $\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{S}}$ pp. et est $\mathcal{C}$-adaptée. Ensuite, si $\mathcal{C}$ est $\mathcal{P}$-beaucoup plus forte que $\mathcal{S}$, elle est aussi $\mathcal{P}$-beaucoup plus forte que toute sous-tribu $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ pour laquelle elle admette une désintégration commune, $(\mathbb{P}^{\bar{\omega}}_{\mathcal{S}'})$. En effet, d'après (7.17), il existe un borélien $\mathcal{P}$-porteur, donc un borélien $\bar{\Omega} \subset \Omega'$ et $(\mathcal{P},(\mathbb{P}^{\bar{\omega}}_{\mathcal{S}'}))$-porteur, tel que, pour $\omega \in \bar{\Omega}$, $\mathbb{P}^{\bar{\omega}}_{\mathcal{S}'} = \int_{\Omega} \mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{S}}\, \mathbb{P}^{\bar{\omega}}_{\mathcal{S}'}(d\omega) = \int_{\bar{\Omega}}$ ou $\int_{\Omega'}$; elle est donc intégrale de probabilités $\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{S}}$, $\omega \in \Omega'$, qui toutes admettent la désintégration $(\mathbb{P}^{\omega'}_{\mathcal{C}})$ pour $\mathcal{C}$, donc elle a la même propriété.

(7.20) On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$-très forte si elle est $\mathcal{P}$-beaucoup plus forte qu'elle-même ; elle est alors $\mathcal{P}$-beaucoup plus forte que toute sous-tribu $\mathcal{S}$ pour laquelle $\mathcal{P}$ ait une désintégration commune. On voit que $\mathcal{C}$ est $\mathcal{P}$-très forte si et seulement s'il existe un borélien Ω' $\mathcal{P}$-porteur tel que, pour $\omega \in \Omega'$, $\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}$ soit ergodique sur $\mathcal{C}$. En effet, $\mathbb{P}^{\cdot}_{\mathcal{C}}$ est $\mathcal{C}$-mesurable, donc, d'après (7.14), il existe un borélien Ω'' $\mathcal{P}$-porteur tel que , $\forall \omega \in \Omega''$, $\mathbb{P}^{\cdot}_{\mathcal{C}} = \mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}$ $\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}$ps. Alors $\mathcal{C}$ est $\mathcal{P}$-très forte si et seulement s'il existe un borélien $\mathcal{P}$-porteur $\Omega' \subset \Omega''$ tel qu'on ait, pour tout $\omega \in \Omega'$, pour tout $A \in \mathcal{C}$, l'égalité de la désintégration,
$\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(A \cap B) = \int_A \mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(B)\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(d\omega') = \mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(A)\ \mathbb{P}^{\omega}(B)$, ce qui, pour $B = A$, donne
$\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(A) = (\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(A))^2$, ou $\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{C}}(A) = 0$ ou 1 .

<u>Proposition (7.21)</u> (♦) : 1) Une tribu dénombrablement engendrée est $\mathcal{P}$-très forte, pour tout ensemble $\mathcal{P}$ ayant une désintégration commune pour $\mathcal{C}$.

2) Soient $(\mathcal{C}_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{O}$, $\mathcal{C}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{C}_{-n}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{-\infty}$,et supposons que $\mathcal{P}$ ait une désintégration $(\mathbb{P}^{\omega}_{-n})$ pour chaque $\mathcal{C}_{-n}$,et $(\mathbb{P}^{\omega}_{\mathcal{S}})$ pour $\mathcal{S}$. Si chaque $\mathcal{C}_{-n}$ est $\mathcal{P}$-beaucoup plus forte que $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ admet une désintégration pour $\mathcal{C}_{-\infty}$ et $\mathcal{C}_{-\infty}$ est $\mathcal{P}$-beaucoup plus forte que $\mathcal{S}$. En particulier, si chaque $\mathcal{C}_{-n}$ est $\mathcal{P}$-très forte $\mathcal{C}_{-\infty}$ aussi.

(♦) Schwartz [3] , théorème (3.8) page 58, et proposition (6.1), page 127

Démonstration :

1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties engendrant $\mathcal{C}$. On sait que $\mathcal{P}$ps. $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}(A_n) = 1$ ou 0 selon que $\omega \in A_n$ ou $\omega \notin A_n$, c'est à dire $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}(A_n) = 1_{A_n}(\omega)$; mais $\omega \mapsto \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}(A_n)$ et $\omega \mapsto 1_{A_n}(\omega)$ sont boréliennes, donc elles coïncident sur un borélien porteur. Il existe donc un borélien $\mathcal{P}$-porteur Ω' tel que, $\forall \omega \in \Omega', \forall n$, $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}(A_n) = 1_{A_n}(\omega)$; autrement dit tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}$ soit portée par l'atome de ω dans $\mathcal{C}$. [Inversement, toute famille $(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega})_{\omega \in \Omega}$ ayant cette propriété, telle que $\omega \longmapsto \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}$ soit $\mathcal{C}$-mesurable, et que, $\forall\, \mathbb{P} \in \mathcal{P}$, $\mathbb{P} = \int \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}\, \mathbb{P}(d\omega)$, est une désintégration commune pour $\mathcal{P}$]. Mais alors, pour $\omega \in \Omega'$, $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\omega}$ est ergodique sur $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est $\mathcal{P}$-très forte.

2) Soit θ une topologie polonaise sur Ω, de tribu borélienne $\mathcal{O}$. Déterminons $\mathbb{P}_{-\infty}^{\omega'}$ comme au lemme (7.7) :

$$\mathbb{P}_{-\infty}^{\omega'} = \delta_{(\omega_0)} + \overline{\lim_{n \to +\infty}} \left(\mathbb{P}_{-n}^{\omega'} - \delta_{(\omega_0)}\right) .$$

On obtient une désintégration pour $\mathcal{C}_{-\infty}$, par (7.7). Mais à la famille $\mathcal{P}$ on peut adjoindre les $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\omega}$, pour les ω d'un borélien $\mathcal{P}$-porteur Ω', d'où le résultat . ■

Théorème (7.22)(♦) : Soit de nouveau un système $(\Omega, \mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{P})$, $(\Omega, \mathcal{O})$ lusinien, toutes les tribus $\mathcal{C}_t$ $\mathcal{P}$-très fortes. Soit $(\mathbb{P}_t^{\omega})$ une désintégration très régulière de $\mathcal{P}$. Alors il existe un borélien Ω' de Ω, $(\mathcal{P}, (\mathbb{P}_t^{\omega}))$-porteur, tel que $\forall\, \omega \in \Omega'$, $\forall s$, $\mathbb{P}_s^{\omega}$ admette pour $\mathcal{C}$ la désintégration très régulière $(\mathbb{P}_t^{\omega'})$ aux temps $t \geq s$; et même que, $\forall s$, si $\overline{\mathcal{P}_s} = \mathcal{P} \cup \{\mathbb{P}_s^{\omega} ; \omega \in \Omega'\}$, $(\mathbb{P}_t^{\omega'})_{t \geq s}$ soit une désintégration très régulière de $\overline{\mathcal{P}_s}$ aux temps $\geq s$, avec Ω' comme ensemble $(\overline{\mathcal{P}_s}, (\mathbb{P}_t^{\omega'}))$-porteur; pour $\omega \in \Omega'$, $\forall s$, les $\mathcal{C}_t$, $t \geq s$, sont $\overline{\mathcal{P}_s}$-très fortes.

Démonstration : Par hypothèse, pour un temps rationnel t' donné, $\mathcal{C}_{t'}$ est $\mathcal{P}$-très forte, donc il existe un borélien $\Omega_{t'}$, $(\mathcal{P}, (\mathbb{P}_s^{\omega})_{(s,\omega) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega})$-porteur (par (7.5)) tel que, $\forall\, \omega \in \Omega_{t'}$ ($\mathbb{P}_s^{\omega}$ soit portée par $\Omega_{t'}$ et) $\mathbb{P}_{t'}^{\omega}$ admette la désintégration $(\mathbb{P}_{t'}^{\omega'})_{\omega' \in \Omega}$ pour $\mathcal{C}_{t'}$. Mais il existe aussi Ω'' $\mathcal{P}$-porteur tel que l'on ait (7.17) pour $\omega \in \Omega''$; pour $\omega \in \Omega'' \cap \Omega_{t'}$, et tout s réel $\leq t'$,

(♦) Théorème (6.6) page 130 de Schwartz [2].

$$\mathbb{P}_s^{\omega} = \int_{\Omega} \mathbb{P}_{t'}^{\bar{\omega}}\ \mathbb{P}_s^{\omega}(d\bar{\omega}) = \int_{\Omega_{t'}} :$$

$\mathbb{P}_s^{\omega}$ est intégrale de probabilités $\mathbb{P}_t^{\bar{\omega}}$, $\bar{\omega} \in \Omega_{t'}$, qui toutes ont la même désintégration $(\mathbb{P}_{t'}^{\omega'})_{\omega' \in \Omega}$ relativement à $\mathcal{C}_{t'}$, donc $\mathbb{P}_s^{\omega}$ aussi admet la même désintégration. Si $\Omega''' = \Omega'' \cap (\bigcap_{t' \in \bar{\mathbb{Q}}_+} \Omega_{t'})$, pour tout $\omega \in \Omega'''$, tout s réel, tout t' rationnel $\geqslant s$, $\mathbb{P}_s^{\omega}$ admet la désintégration $(\mathbb{P}_{t'}^{\omega'})_{\omega' \in \Omega}$ pour $\mathcal{C}_{t'}$.

Reprenons les notations du lemme (7.6), pour une topologie polonaise θ sur Ω :

$$\mathbb{P}_t^{\omega'}(\theta) = \delta_{(\omega_o)} + \overline{\lim_{\substack{t' \in \mathbb{Q}_+ \\ t' \geqslant t \\ t \to t}}} (\mathbb{P}_{t'}^{\omega'} - \delta_{(\omega_o)}), (t,\omega') \in \bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega.$$

($\overline{\lim}$ pour la topologie étroite de $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta) - \delta_{(\omega_o)}$). Le lemme (7.7) et le théorème (7.5) disent alors que les $\mathbb{P}_s^{\omega}$, $\omega \in \Omega''$, pour les temps $\geqslant s$, et $\mathcal{P}$ pour tous les temps, admettent une désintégration très régulière commune, $(\mathbb{P}_t^{\omega'}(\theta))$. Dans ces conditions, $(\mathbb{P}_t^{\omega'})$ et $(\mathbb{P}_t^{\omega'}(\theta))$ sont deux désintégrations très régulières communes de $\mathcal{P}$ (<u>pour tous les temps</u>) donc (théorème (7.5)) elles coïncident sur un borélien $\Omega' \subset \Omega'''$, $(\mathcal{P},(\mathbb{P}_t^{\omega'}),((\mathbb{P}_t^{\omega'}(\theta)),\theta)$-porteur. Mais, si Ω' porte les $\mathbb{P}_t^{\omega'}$, $\omega' \in \Omega'$, il porte aussi les $\mathbb{P}_s^{\omega}$, $\omega \in \Omega'$, c'est la même chose avec des notations différentes, donc Ω' est, pour tout s, $(\bar{\mathcal{P}}_s,(\mathbb{P}_t^{\omega'}),(\mathbb{P}_t^{\omega'}(\theta)),\theta)$-porteur, Pour $\omega \in \Omega'$, $(\mathbb{P}_t^{\omega'})$ et $(\mathbb{P}_t^{\omega'}(\theta))$ coïncident pour $\omega' \in \Omega'$, donc $\mathbb{P}_s^{\omega}$ ps. ; la 2e est une désintégration régulière de $\mathbb{P}_s^{\omega}$ aux temps $\geqslant s$, donc la 1ère aussi puisqu'elle est infra-optionnelle donc adaptée ; c'est donc une désintégration régulière de $\bar{\mathcal{P}}_s$; mais elle est cadlag sur Ω' $\bar{\mathcal{P}}_s$-porteur, pour la topologie étroite $\mathcal{M}_+(\Omega_\theta)$, donc elle est très régulière.

Il reste à montrer que, pour tout t, $\mathcal{C}_t$, supposée $\mathcal{P}$-très forte, est aussi, $\forall\ s \leqslant t$, $\bar{\mathcal{P}}_s$-très forte, $\bar{\mathcal{P}}_s = \mathcal{P} \cup \{\mathbb{P}_s^{\omega}, \omega \in \Omega'\}$. Or une désintégration commune de $\bar{\mathcal{P}}_s$ pour $\mathcal{C}_t$ est $(\mathbb{P}_t^{\omega'})_{\omega' \in \Omega}$; et, Ω' étant indépendant de s, il vaut aussi pour t, donc, pour $\omega' \in \Omega'$ $\bar{\mathcal{P}}_s$-porteur, $\mathbb{P}_t^{\omega'}$ est désintégrée pour $\mathcal{C}_t$ par $(\mathbb{P}_t^{\omega''})_{\omega'' \in \Omega}$, donc $\mathcal{C}_t$ est bien $\bar{\mathcal{P}}_s$-très forte. ∎

<u>Remarque (7.23)</u> : Puisque $\mathcal{C}_s$ est $\mathcal{P}$-très forte, il existe un borélien Ω_s $\mathcal{P}$-porteur tel que, pour $\omega \in \Omega_s$, $\mathbb{P}_s^\omega$ soit ergodique ; cela vient de ce que, pour $\omega \in \Omega'$ (qu'on peut, nous venons de le voir, choisir indépendamment de s), $\mathbb{P}_s^\omega$ soit désintégrée par $(\mathbb{P}_s^{\omega'})_{\omega' \in \Omega'}$, et de ce que, par le théorème (7.14), il existe $\Omega_s \subset \Omega'$ tel que, pour $\omega \in \Omega_s$, $\mathbb{P}_s^\bullet = \mathbb{P}_s^\omega$, $\mathbb{P}_s^\omega$ ps. Alors $\mathbb{P}_s^\omega$, $\omega \in \Omega_s$ est aussi ergodique sur les $\mathcal{C}_t$, $t \leq s$, donc $\mathbb{P}_s^\omega$, $\omega \in \Omega_s$, est désintégrée pour les $\mathcal{C}_t$, $t \leq s$, par une constante égale à elle-même. Mais nous avons vu, au théorème (7.14) et à (7.15 et 16), qu'il n'est peut-être pas possible de choisir Ω_s indépendant de s ; il n'existe donc peut être pas d' $\Omega_\cdot$, $\mathcal{P}$-porteur, tel que, pour $\omega \in \Omega_\cdot$, $\forall$ s, $\mathbb{P}_s^\omega$ soit désintégérée, pour les temps $\leq$ s, par une constante égale à elle-même, alors que c'est vrai pour $\mathcal{P}$-presque tout ω , pour tout s.

N O T E S

(1) page 5. On peut, si $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},H,Z)$ est donné, sans probabilités, H prévisible et Z adaptée cadlag, trouver, par les limites médiales de Mokobodzki, un représentant universel de l'intégrale stochastique, $H_{-}.Z$, valable pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ qui font de Z une semi-martingale. Mais $H_{-}.Z$ est une fonction universellement mesurable, non borélienne ; l'essentiel de l'esprit du présent travail sera de trouver partout des ensembles et des fonctions boréliennes. Pour les limites médiales, on pourra consulter Paul-André Meyer [1] , pages 198 et suivantes.

(2) page 5. Les temps d'arrêt seront à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}] = [0,+\infty] \cup \{\overline{+\infty}\}$, $\overline{+\infty} > +\infty$; l'inf d'un ensemble vide est donc $\overline{+\infty}$. Si X est un processus cadlag, le processus arrêté $X^{+\infty}$ ou $X^{\overline{+\infty}}$ est X lui-même, alors que le processus préarrêté $X^{(+\infty)-}$ est différent de X et vaut $X_{(+\infty)-}$ au temps $+\infty$, et $X^{(\overline{+\infty})-}$ est X. On convient que $\mathcal{C}_{\overline{+\infty}} = \mathcal{C}_{+\infty}$, et toujours $X_{\overline{+\infty}} = X_{+\infty}$.

(3) page 18. Voir P. A. Meyer [3] , pages 103 et suivantes. Dans cet article, le flot dépend seulement de x, et s = 0 . Si on fait à la fois varier s et x, il y a des résultats de Kunita récents, mais je ne sais pas si les résultats démontrés ici sont démontrés et publiés quelque part dans toute cette généralité. Je les ai démontrés, mais non publiés.

(4) page 21. Un temps d'arrêt ζ est annonçable (c'est plus fort que prévisible, si aucune probabilité n'est en jeu), s'il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de temps d'arrêt, $\zeta_n < \zeta$ sur $\{\zeta > 0\}$, tendant vers ζ pour $n \to +\infty$, et tendant stationnairement vers $+\infty$ ou $\overline{+\infty}$ (i.e., pour tout ω , il existe $n(\omega) = n$ tel que $\zeta_n(\omega) = +\infty$ ou $\overline{+\infty}$) sur $\{\zeta = \overline{+\infty}\}$.

Dans Schwartz [1] , on considérait seulement $\zeta \leqslant +\infty$, ce qui obligeait à définir la solution de l'équation différentielle stochastique dans $[0,\zeta[$ sur $\{\zeta < +\infty\}$, et tantôt sur $[0,+\infty[$, tantôt sur $[0,+\infty]$ sur $\{\zeta = +\infty\}$. Ici $\zeta \leqslant \overline{+\infty}$, la solution est toujours définie dans $[0,\zeta[$.

(5) page 22. Il ne faut pas confondre la propriété faible : lorsque $t < \zeta$ tend vers ζ , si $\zeta \neq \overline{+\infty}$, la solution ne reste dans aucun compact, avec la propriété forte : lorsque $t < \zeta$ tend vers ζ , si $\zeta \neq \overline{+\infty}$, la solution s'éloigne indéfiniment ; il n' y a pas d'éloignements suivis de retours ni l'inverse. Voir Laurent Schwartz [1], proposition (7.4), page 97.

(6) page 25. Lorsqu'on fait varier x seulement, voir note (3), page 18. Seule la forme faible (note (5) page 22) y est démontrée, et c'est, je crois, la seule connue.

(7) page 32. Schwartz [2], § 5. Pour les espaces polonais et lusiniens, on consultera Schwartz [3] , chapitre II. Ce que j'appelais λ , λ_{ω}^{s} dans Schwartz [2], s'appelle ici $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_{s}^{\omega}$. L'un des indices est en haut, l'autre en bas, purement pour des raisons esthétiques ; mais c'était une erreur de mettre s en haut, il doit être en bas, c'est la valeur au temps s, alors que s en haut marquerait un arrêt au temps s !

(8) page 34. J'ai introduit dans Schwartz [2] , les désintégrations régulières, et les désintégrations $(\mathcal{H},\mathcal{R})$-régulières ou d'autres, page 101 ; ces dernières ont des propriétés plus fortes ; voir par exemple théorème (7.2), et remarque 2), page 140 loc. cit. C'était assez maladroit ; les désintégrations $(\mathcal{H},\mathcal{R})$-régulières étaient définies par un mode de construction particulier, et ensuite j'énonçais certaines de leurs propriétés. Ici je définis les désintégrations très régulières par leurs propriétés, peu importe ensuite la façon d'en construire. J'utilisais, pour la construction, une "suite d'approximation", par exemple les dyadiques ; ici j'utilise les rationnels. En fait, les dyadiques sont plus pratiques, c'est pour changer que je prends ici les rationnels.

(9) page 36. Une fonction $x \mapsto \lambda_x$ sur un ensemble X à valeurs dans l'espace des probabilités sur un ensemble $(\Omega,\mathcal{O})$ est dite $\mathcal{X}$-mesurable, $\mathcal{X}$ tribu sur X, si, pour tout $B \in \mathcal{O}$, $x \mapsto \lambda_x(B)$ est $\mathcal{X}$-mesurable .

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

Klaus BICHTELER

[1] Stochastic Integration and L^p-theory of semi-martingales . The Annals of Probability, 1981, vol. 9, n° 1, p.49-89.

Paul-André MEYER

[1] Limites médiales, d'après Mokobodzki. Séminaire de Probabilités VII, 1971-72, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, n° 321, 1973.

[2] Caractérisation des semi-martingales, d'après Dellacherie. Séminaire de Probabilités XIII, 1977-78, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, n° 721, 1979.

[3] Flot d'une équation différentielle stochastique. Séminaire de Probabilités, XV, 1979-80, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, n°850, 1981.

Laurent SCHWARTZ

[1] Géométrie différentielle du 2e ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle . Séminaire de Probabilités, XVI, 1980-1981, Supplément : Géométrie Différentielle stochastique, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, n°921, 1982.

[2] Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. Journal d'Analyse Mathématique, Jerusalem, 1973.

[3] Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical measures. Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, 1973.

INDEX TERMINOLOGIQUE

* * *

Ce texte a été dactylographié au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique à Palaiseau (France), Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 169 .

additif à :

CALCULS STOCHASTIQUES DIRECTS SUR LES TRAJECTOIRES ET PROPRIETES DE BORELIENS PORTEURS .

par Laurent SCHWARTZ

Additif au théorème (1.2)

1) Si w_1 et w_2 diffèrent d'une constante, $\eta_-\cdot\cdot w_1 = \eta_-\cdot\cdot w_2$; donc, si w_1 et w_2 diffèrent d'une constante dans $[0,\tau]$, $\eta_-\cdot\cdot w_1 = \eta_-\cdot\cdot w_2$ dans $[0,\tau|$;

2) Pour une trajectoire ζ , appelons $\theta_s\zeta$ la trajectoire $(\theta_s\zeta)_t = \zeta_{s+t}$.

Alors, si d'une part η est cadlag, si d'autre part η s'annule dans $[0,s]$ ou si η et w sont constantes dans $[0,s]$, $(\theta_s\,\eta)_-\cdot\cdot(\theta_s w) = \theta_s(\eta_-\cdot\cdot w)$.

Démonstration : 1) est évident, démontrons 2).

On a toujours $T_{o,n}(\eta) = 0$, donc $\eta_{T_{o,n}(\eta)} = \eta_o = \eta_s = (\theta_s\eta)_o = (\theta_s\eta)_{T_{o,n}(\theta_s\eta)}$

Ensuite, pour $i \geqslant 1$: $T_{i,n}(\eta) = T_{i,n}(\theta_s\eta) + s$, à cause de la constance de η dans $[0,s]$ et parce que, η étant cadlag, les temps d'arrêts sont définis par $T_{i,n} = \mathrm{Inf}\,\{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ldots\}$ aussi bien que par $\mathrm{Inf}\{t \in \overline{\mathbb{Q}}_+\ldots\}$. Donc, pour $i \geqslant 1$:

$$\eta_{T_{i,n}(\eta)} = \eta_{T_{i,n}(\theta_s\eta) + s} = (\theta_s\eta)_{T_{i,n}(\theta_s\eta)} ,$$

et c'est donc vrai pour tout $i \geqslant 0$. Alors

$$(\eta_-\cdot\cdot w)^{(n)}_{s+t} = \sum_{i=o}^{\overline{+\infty}} \eta_{T_{i,n}(\eta)}\left(w_{(s+t)\wedge T_{i+1,n}(\eta)} - w_{(s+t)\wedge T_{i,n}(\eta)}\right).$$

Mais $w_{(s+t)\wedge T_{j,n}(\eta)} = w_{(s+t)\wedge(T_{j,n}(\theta_s\eta)+s)} = w_{s+(t\wedge T_{j,n}(\theta_s\eta))} = (\theta_s w)_{t\wedge T_{j,n}(\theta_s\eta)}$ pour $j \geqslant 1$, donc

$$(\theta_s(\eta_-\cdot\cdot w)^{(n)})_t = \overline{\lim_{k\to+\infty}} (\eta_o((\theta_s w)_{t\wedge T_1(\theta_s\eta)} - w_o) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (\theta_s\eta)_{T_{i,n}(\theta_s\eta)}((\theta_s w)_{t\wedge T_{i+1,n}(\theta_s\eta)} - (\theta_s w)_{t\wedge T_{i,n}(\theta_s\eta)}))$$

$$= \overline{\lim_{k\to+\infty}} (\eta_o(w_s - w_o) + (\theta_s\eta)_o((\theta_s w)_{t\wedge T_1(\theta_s\eta)} - (\theta_s w)_o)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (\theta_s\eta)_{T_{i,n}(\theta_s\eta)}((\theta_s w)_{t\wedge T_{i+1,n}(\theta_s\eta)} - (\theta_s w)_{t\wedge T_{i,n}(\theta_s\eta)}))$$

$$= \overline{\sum_{i=o}^{+\infty}} (\theta_s\eta)_{T_{i,n}(\theta_s\eta)}((\theta_s w)_{t\wedge T_{i+1,n}(\theta_s\eta)} - (\theta_s w)_{t\wedge T_{i,n}(\theta_s\eta)})$$

$$= ((\theta_s\ )_-\cdot\cdot\theta_s w)_t^{(n)} .$$

En prenant la limite généralisée pour $n \to +\infty$, on trouve bien

$\theta_s(\eta_-\cdot\cdot w) = (\theta_s\eta)_-\cdot\cdot\theta_s w.$

Additif au théorème (2.4)

1) Si w_1 et w_2 diffèrent d'une constante , $\xi(w_1) = \xi(w_2)$; si donc elles diffèrent d'une constante dans $[0,\tau|$, $\xi(w_1) = \xi(w_2)$ dans $[0,\tau|$;

2) Si $H(x,.)$ est constante dans $[0,s]$, et $w \in \mathbf{W}$, constante dans $[0,s]$, $\theta_s(\xi(w)) = \xi(\theta_s w)$.

Démonstration : 1) est évident, démontrons 2).

$\theta_s(\xi_n(w)) = \xi_n(\theta_s w)$ pour $n = 0$; supposons-le vrai pour n, c'est vrai pour $n+1$, par

$$\theta_s(\xi_{n+1}(w)) = \theta_s(x + H(\xi_n(w),.)_-\cdot\cdot w) = x + H(\xi_n(\theta_s w),.)_-\cdot\cdot\theta_s w$$

(en appliquant l'additif qu'on vient de voir pour le théorème (1.2), valable parce que $\xi_n(w)$ est cadlag, et égale à x, donc constant, dans $[0,s]$) $= \xi_{n+1}(\theta_s w)$.

En prenant la limite généralisée pour $n \to +\infty$, on obtient le résultat.

Additif I) au théorème (4.3)

1) Si w_1 et w_2 diffèrent d'une constante, $\Phi(s;x;w_1) = \Phi(s;x;w_2)$; donc, si elles diffèrent d'une constante dans $[0,\tau|$, $\Phi(s;x;w_1) = \Phi(s;x;w_2)$ dans $[0,\tau|$;

2) Dans l'esprit de (5.6), même avec des semi-martingales directrices discontinues, si H est indépendant du temps et si S est un temps d'arrêt donné, on peut choisir $W_\bullet$ tel que, $\forall w \in W_\bullet$: $\theta_S(\Phi(S;x;w)) = \Phi(x;\theta_S w)$, en convenant d'écrire $\Phi(x;w')$ pour $\Phi(0;x;w')$; si alors $t \geqslant 0$, et $w \in W_\bullet$:

$$\Phi_{S+t}(x;w) = \Phi_t(\Phi_S(x;w);\theta_S w) \; ;$$

2') Dans l'esprit de (4.3), avec des semi-martingales directrices continues et H indépendant du temps, il existe un choix de $W_\bullet$, dépendant de S, tel que les formules 2) soient vraies. (On aimerait prendre S = s quelconque, et $W_\bullet$ indépendant de s ; ce n'est sans doute pas vrai).

Démonstration : 1) est évident, montrons 2) puis 2'). D'abord 2). Dans le sens de (5.6), on a calculé la solution par un calcul précis :

$$\bar{\Phi}(S;x;w) = x + \overline{\lim_{\substack{x' \in \mathbb{Q}^N \\ x' \to x}}} (\xi(x';w - w^{S(w)}) - x) \, ,$$

avec un $\bar{W}_\bullet$. Mais $w - w^{S(w)}$ est nulle jusqu'au temps S(w), on peut donc appliquer l'additif à (2.4), si $w - w^{S(w)} \in \bar{W}_\bullet$:

$$\theta_S(\bar{\Phi}(S;x;w)) = x + \overline{\lim_{\substack{x' \in \mathbb{Q}^N \\ x' \to x}}} (\theta_{S(w)}(\xi(x';w - w^{S(w)})) - x) =$$

$$= x + \overline{\lim_{\substack{x' \in \mathbb{Q}^N \\ x' \to x}}} (\xi(x';\, \theta_{S(w)}(w - w^{S(w)})) - x)$$

= (on applique 1) de l'additif à (2.4), parce que $\theta_{S(w)}(w - w^{S(w)})$ et $\theta_{S(w)} w$ diffèrent de la constante $w_{S(w)}$) $x + \overline{\lim_{\substack{x' \in \mathbb{Q}_+^N \\ x' \to x}}} (\xi(x';\, \theta_{S(w)} w) - x) = \bar{\Phi}(x;\theta_S(w))$,

ce qui est la première formule .

Pour le calcul précis qui a déterminé $\overline{\Phi}$, la formule est donc vraie pour $w - S(w) \in \overline{W}_\bullet$. Mais toute autre solution, Φ , relative aux temps d'arrêt considérés, coïncide avec $\overline{\Phi}$ sur un borélien porteur de W, soit $\overline{W}'_\bullet$. Alors la formule reste exacte pour w dans $\overline{W}_{\bullet\bullet} = \{ w \in W \; ; \; w - S(w) \in \overline{W}_\bullet , w \in \overline{W}'_\bullet \; , \; \theta_S w \in \overline{W}'_\bullet \}$, dont nous verrons plus loin qu'il est encore borélien porteur.

Si alors on remplace le $W_\bullet$ associé à Φ par $W_\bullet \cap \overline{W}_{\bullet\bullet}$, la même formule restera a fortiori vraie pour les w de ce borélien porteur. La deuxième formule résulte alors de la formule de transitivité, vraie pour $w \in W_\bullet$ (dans (5.6), elle est écrite pour R, S, T temps d'arrêt ; c'est inutile, R et S sont des temps d'arrêt pour lesquels Φ a été calculé, mais T est ensuite un temps quelconque $\geqslant S$).
Prenons $R = 0,S$, $T = S + t$; pour $w \in W_\bullet \cap \overline{W}_{\bullet\bullet}$:

$$\Phi_{S+t}(x;w) = \Phi_{S+t}(S;\Phi_S(x;w);w) \quad \text{(formule de transitivité, vraie pour } w \in W_\bullet)$$

$$= (\theta_S(\Phi(S;\Phi_S(x,w);w))_t = \Phi_t(\Phi_S(x;w);\theta_S(w))$$

(parce que $w \in \overline{W}_{\bullet\bullet}$), ce qui est la deuxième formule de 2).

Alors 2') en résulte immédiatement, car tout flot Φ associé au théorème (4.3) satisfait aussi à (5.6).

Il reste à montrer que, si S est un temps d'arrêt, $\overline{W}_{\bullet\bullet}$ est un borélien porteur. Qu'il soit borélien est évident, parce que θ_S est borélienne de W dans W . Soit $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P},Z)$, Z semi-martingale. Alors $S \circ Z : \omega \to S(Z(\omega))$ est un temps d'arrêt sur $(\Omega,\mathcal{C})$. Alors $t \mapsto Z^{S(Z)+t}$ est une semi-martingale pour $(\Omega,\mathcal{O},(\mathcal{C}_{S(Z)+t})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+},\mathbb{P})$. Or cette semi-martingale n'est autre que $\omega \mapsto Z(\omega) \mapsto \theta_{S(Z(\omega))}(Z(\omega)) = \theta_{S(w)}(w)$ pour $w = Z(\omega)$. D'après la définition du mot porteur, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω , $\theta_{S(w)}(w) \in \overline{W}'_\bullet$ pour $w \in Z(\omega)$, donc $\{w \in W \; ; \; w \in \overline{W}'_\bullet \; , \; \theta_S w \in \overline{W}'_\bullet\}$ est bien porteur. De même $Z - Z^S$ est une semi-martingale pour $(\Omega,\mathcal{O},\mathcal{C},\mathbb{P})$, donc, pour $\mathbb{P}$- presque tout ω , $(Z - Z^S)(\omega) \in \overline{W}_\bullet$, donc $\{w \in W \, ; \, w - S(w) \in \overline{W}_\bullet\}$ est porteur, et finalement $\overline{W}_{\bullet\bullet}$ est porteur.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir des résultats analogues pour (5.1) et (5.5), et le § 6.

La deuxième formule que nous venons d'écrire, pour les w d'un borélien porteur, peut prendre une autre forme. Pour w choisi, ainsi que t, $\Phi_t(w) : x \mapsto \Phi_t(x;w)$ est une application continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, ou de $\hat{V}$ dans $\hat{V}$, variété C^2 complétée par un point à l'infini. La deuxième formule s'écrit alors, pour les w d'un borélien porteur dépendant du temps d'arrêt S :

$$\Phi_{S+t}(w) = \Phi_t(\theta_S w) \circ \Phi_S(w) ,$$

au sens de la composition des applications continues de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Mais $\theta_S w$ et $\theta_S w - w_S$ diffèrent d'une constante, donc $\Phi(\theta_S w) = \Phi(\theta_S w - w_S)$, et on a aussi $\Phi_{S+t}(w) = \Phi_t(\theta_S w - w_S) \circ \Phi_S(w)$, pour $w \in W_\bullet$, borélien porteur (dépendant de S). Pour une probabilité $\mathbb{P}$ sur W rendant le processus canonique π brownien, $\theta_S \pi - \pi_S$ est indépendant de la tribu $\mathcal{W}_S$, $\theta_S \pi - \pi_S$ et π_S sont indépendantes, $t \mapsto \Phi_t$ est un processus à valeurs dans $C(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, à accroissements indépendants.

<u>Additif II) au théorème (4.3)</u>

On a défini $\xi(s';x';w) = \xi(x';w - w^{s'})$, pour un double passage à la limite en vue d'obtenir Φ . Dans quel cas est-il vrai que $\Phi(s;x;w) = \Phi(x;w - w^s)$? Tout ce qu'on peut dire, semble-t-il, est qu'il existe un choix, <u>dépendant de s</u>, du borélien porteur $W_\bullet$ associé à Φ , tel que ce soit vrai pour $w \in W_\bullet$. Mais alors on peut remplacer s par un temps d'arrêt S sur W, le choix de $W_\bullet$ dépendant de S.

En effet, plaçons-nous dans la situation de (5.6), et utilisons le calcul précis $\bar{\Phi}(S;x;w) = x + \overline{\lim}_{\substack{x' \in \mathbb{Q}^N \\ x' \to x}} (\xi(x' ; w - w^S) - x) = \bar{\Phi}(x ; w - w^S)$. Donc, pour ce calcul précis $\bar{\Phi}$, la relation est vraie pour tout w. Si Φ est un autre calcul pour (5.6) Φ et $\bar{\Phi}$ diffèrent sur un borélien porteur $\overline{W}'_\bullet$, et la relation est vraie pour Φ sur $\{w \in W ; w \in \overline{W}'_\bullet , w - w^{S(w)} \in \overline{W}'_\bullet\}$, borélien porteur .

<u>Additif III) au théorème (4.3)</u>

Sur $W_\bullet$, $\Phi(S;x;w)$ ne dépend que des valeurs de w <u>au delà du temps s</u>. Soient en effet $w_1, w_2 \in W_\bullet$, $w_1 = w_2$ sur $[s,+\infty]$. Alors, puisqu'on est dans $W_\bullet$, $\Phi(s;x;w_i)$, i = 1,2, sont les limites <u>vraies</u> de $\xi(x';w_i - w_i^{s'})$, lorsque s', x', rationnels tendent vers s,x. En particulier, ce sont les limites pour $s' \geq s$; mais alors $w_1 - w_1^{s'} = w_2 - w_2^{s'}$ pour tous les temps, donc $\Phi(s;x;w_1) = \Phi(s;x;w_2)$.

TABLE DES MATIERES