JUAN RUIZ DE CHAVEZ

Le théorème de Paul Lévy pour des mesures signées

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 245-255
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__245_0>

LE THEOREME DE PAUL LEVY POUR DES MESURES SIGNEES

par J. Ruiz de Chavez

INTRODUCTION

Soit Ω l'ensemble des applications $t \mapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et nulles pour $t=0$. On munit Ω de sa filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$. Le célèbre théorème de Paul Lévy caractérise la loi brownienne comme la seule loi P sous laquelle X_t et X_t^2-t sont des martingales locales.

Rappelons comment Dellacherie (Sém. Prob. VIII) en déduit la propriété de représentation prévisible du mouvement brownien dans L^2. Soit I le sous-espace fermé de L^2 formé des intégrales $\int_0^\infty H_s \cdot dX_s$, avec $E[\int H_s^2 ds] < \infty$. Tout revient à montrer que l'orthogonal $I^\perp$ est réduit aux v.a. constantes.

Soit d'abord M un élément positif de $I^\perp$. On peut supposer que $E[M]=1$ et introduire la loi $Q=MP$. L'orthogonalité entraîne que, sous la loi Q , toute i.s. $H \cdot X$ est encore une martingale locale ; c'est donc le cas pour X_t . Comme $Q \ll P$, on a $[X,X]_t=t$ sous la loi Q . D'après le th. de Paul Lévy, on a Q=P, donc M=1 p.s.. On passe de là sans peine au cas où M est bornée, en remplaçant M par M+c où c est une constante assez grande.

Pour passer au cas général, on remarque que $I^\perp$ est stable par les opérateurs $E[\cdot|\underline{\underline{F}}_T]$ où T est un temps d'arrêt. Or la martingale $M_t = E[M|\underline{\underline{F}}_t]$ est continue, donc admet des arrêtées bornées, auxquelles on peut appliquer le résultat précédent, pour montrer finalement que M=Cte.

Malheureusement, dans cette dernière étape, on a perdu la simplicité de l'idée de Dellacherie, car il a fallu établir au préalable que toutes les martingales du mouvement brownien sont continues. Yor est parvenu à supprimer cette difficulté en considérant le sous-espace fermé I dans H^1 et son orthogonal $I^\perp$ dans BMO (donc tout élément de $I^\perp$ est à sauts bornés), mais là aussi, on perd le caractère élémentaire de la démonstration.

C'est pourquoi P.A. Meyer a suggéré d'étendre le théorème de Lévy aux mesures signées, de manière à justifier le raisonnement ci-dessus pour un élément quelconque de $I^\perp$.

Nous présentons dans ce travail un certain nombre de résultats qui se rattachent à cette idée. Tous sont de nature très élémentaire, mais certains sont vraiment inattendus. Cet exposé a été présenté au Séminaire de Berne en Juin 1983.

MARTINGALES PAR RAPPORT A UNE MESURE SIGNEE

Nous considérons un espace mesuré $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,Q)$, où Q est une mesure bornée, mais non nécessairement positive. Nous nous donnons aussi une loi de probabilité P sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$, telle que $Q<<P$, et une filtration $(\underline{\underline{F}}_t^\circ)$. Comme $Q<<P$, on ne perd pas grand chose en travaillant sur la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ associée à $(\underline{\underline{F}}_t^\circ)$ par le procédé « habituel » d'augmentation . On désigne par M_t la P-martingale càdlàg. $\frac{dQ}{dP}|_{\underline{\underline{F}}_t}$.

DEFINITION. <u>Un processus</u> (X_t) <u>adapté à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est une</u> (Q,P)-<u>martingale</u> (<u>martingale locale</u>) <u>si</u>

1) X <u>est une</u> P-<u>semimartingale</u>
2) XM <u>est une</u> P-<u>martingale</u> (P-<u>martingale locale</u>).

L'hypothèse 1) est gênante, mais indispensable, car nous aurons besoin d'appliquer à X le calcul stochastique. Notre premier travail va consister à démontrer que cette notion dépend assez peu du choix de la loi de référence P .

PROPOSITION 1 . <u>Supposons que</u> X <u>soit une</u> (Q,P)-<u>martingale</u> (<u>martingale locale</u>). <u>Alors</u> X <u>est une</u> (Q,P')-<u>martingale</u> (<u>martingale locale</u>) <u>pour toute loi</u> P' <u>telle que</u> $Q<<P'<<P$.

En particulier, la notion ne change pas si l'on remplace P par une loi équivalente.

<u>Démonstration</u>. Tout d'abord, une P-semimartingale est aussi une P'-semimartingale . Ensuite, introduisons les martingales $M'_t=\frac{dQ}{dP'}|_{\underline{\underline{F}}^\circ_{t+}}$, $N = \frac{dP'}{dP}|_{\underline{\underline{F}}^\circ_{t+}}$; $XM = XM'N$ étant une P-martingale locale, XM' est une P'-martingale locale, donc X est une (Q,P')-martingale locale. Le cas des martingales se traite de même. $\square$

REMARQUES. a) Dans le cas des martingales, la condition 2) peut s'exprimer ainsi, sans référence à aucune mesure autre que Q :

- $|X_t|$ est intégrable par rapport à la mesure $|\,Q|\underline{\underline{F}}^\circ_{t+}|$,
- Pour tout couple (s,t) avec $s<t$ et toute fonction f bornée $\underline{\underline{F}}^\circ_{s+}$-mesurable, on a $E_Q[fX_s]=E_Q[fX_t]$.

Dans le cas des martingales locales, il reste encore à exprimer qu'il existe des t. d'a. $T_n\uparrow+\infty$ p.s. pour la loi P , et tels que les processus

$(X^{T_n})I_{\{T_n>0\}}$ soient des (Q,P)-martingales. Notons que, si X est continue, ou plus généralement à sauts bornés, on peut faire le choix canonique

$$T_n = \inf\{\ t\ :\ |X_t|>n\ \}$$

et l'on voit dans ce cas que la condition 2) s'exprime au moyen de la mesure signée Q seule. Autrement dit, si X est une (Q,P)-martingale (martingale locale), X est une $(Q,P")$-martingale (locale) pour toute loi $P"$ telle que X soit une $P"$ -semimartingale, et que $Q<<P"$. []

b) Si l'on considère P comme la donnée de base, l'étude des (Q,P) martingales locales est l'étude de l'espace des semimartingales X <u>orthogonales</u> à la martingale locale M, au sens de Yoeurp et Yor, i.e. telles que XM soit une martingale locale. []

Puisque X est une P-semimartingale, nous pouvons définir l'intégrale stochastique $H.X$ pour tout processus prévisible localement borné H . La proposition suivante ne fait que traduire un résultat simple dû à Yoeurp.

PROPOSITION 2. <u>Si</u> X <u>est une</u> (Q,P)-<u>martingale locale</u>, <u>il en est de même de</u> $H\cdot X$ <u>pour</u> H <u>prévisible localement borné</u>.

<u>Démonstration</u>. Dire que XM est une P-martingale locale revient à dire que $MdX+d[X,M]$ est une différentielle de P-martingale locale. Cette propriété est préservée quand on remplace dX par HdX.

La proposition suivante traduit dans le langage des martingales locales pour une mesure signée l'introduction de notre exposé. On suppose que $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfait aux conditions habituelles pour P , et que $\underline{\underline{F}}_\infty=\underline{\underline{F}}$.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> P <u>une loi de probabilité sous laquelle</u> $\underline{\underline{F}}_0$ <u>est dégénérée</u>, <u>et soit</u> X <u>une</u> P-<u>martingale locale nulle en</u> 0. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) X <u>possède la propriété de représentation prévisible</u> (PRP) <u>dans la filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$.

2) <u>Si</u> X <u>est une</u> (Q,P)-<u>martingale locale</u>, <u>où</u> Q <u>est une mesure signée telle que</u> $Q<<P$, <u>alors il existe une constante</u> c <u>telle que</u> $Q=cP$.

<u>Démonstration</u>. 1) => 2) : Supposons que X soit une (Q,P)-martingale locale. D'après la PRP, la martingale-densité M_t peut s'écrire $c+H\cdot X$. Comme XM est une martingale locale, $[X,M] = H\cdot[X,X]$ en est une aussi. $\mathrm{sgn}(H)$ étant prévisible borné, $|H|\cdot[X,X]$ est à la fois un processus croissant nul en 0 et une martingale locale, donc il est nul, et finalement $H\cdot X=0$, $M=c$.

Non 1) => non 2) : si X ne possède pas la PRP, il existe au moins

une martingale locale M nulle en 0, orthogonale à X et non nulle. Par arrêt, on peut se ramener au cas où M appartient à H^1. Alors la mesure signée $Q=M_\infty P$ contredit 2) .

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition des (Q,P)-martingales. Il peut s'étendre aux temps d'arrêt.

PROPOSITION 4. Soit X une (Q,P)-martingale (locale). Soient $s\geq 0$, $A\in\underline{\underline{F}}_s$ tel que $P(A)>0$; on pose

$$X'_t = X_{s+t} \text{ (ou } X_{s+t}-X_s \text{)} , \quad \underline{\underline{F}}'_t = \underline{\underline{F}}^\circ_{s+t} ,$$

$$P'(B)=P(A\cap B)/P(A) , \quad Q'(B) = Q(A\cap B) \text{ pour } B\in\underline{\underline{F}}^\circ .$$

Alors X' est une (Q',P')-martingale (locale).

Nous ne donnerons pas tout de suite d'exemples de martingales locales pour une mesure signée, mais on en trouvera plus loin.

LE THEOREME DE PAUL LEVY POUR UNE MESURE SIGNEE

Compte tenu de la proposition 3, le théorème suivant exprime un résultat un peu plus précis que la PRP pour le mouvement brownien, qui équivaudrait au même énoncé avec l'hypothèse supplémentaire que Ω est l'espace canonique, et que P est la loi brownienne.

THEOREME 1. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles. Soit X un processus continu adapté nul en 0 . Soit Q une mesure signée telle que $Q\ll P$. On fait sur X l'une des deux hypothèses suivantes :

a) X_t et X_t^2-t sont des (Q,P)-martingales locales .

b) X_t est une (Q,P)-martingale locale et $[X,X]_t=t$ P-p.s..

Soit $\underline{\underline{G}}$ la tribu engendrée par les v.a. X_t, $t\geq 0$. Alors, ou bien $Q(1)=0$ et alors $Q|_{\underline{\underline{G}}}=0$, ou bien la mesure $\frac{1}{Q(1)}Q|_{\underline{\underline{G}}}$ est une loi de probabilité, sous laquelle X est un mouvement brownien.

Démonstration. Nous allons suivre la démonstration classique pour le cas des lois de probabilité, en justifiant à chaque étape l'extension aux mesures signées.

Tout d'abord, nous écrivons la formule d'Ito sous la loi P, pour la semi-martingale continue X :

$$e^{iuX_t} = 1 + \int_0^t iue^{iuX_s}dX_s - \frac{u^2}{2}\int_0^t e^{iuX_s}\, d[X,X]_s$$

et nous allons en déduire que le processus

$$(1) \qquad Y_t = e^{iuX_t} - 1 + \frac{u^2}{2}\int_0^t e^{iuX_s}ds$$

est une (Q,P)-martingale locale nulle en 0 . Cela revient à démontrer que les deux processus

$$\int_0^t iue^{iuX_s}dX_s \quad , \quad \frac{u^2}{2}\int_0^t e^{iuX_s}(d[X,X]_s-ds)$$

sont des (Q,P)-martingales locales. D'après la prop. 2, cela revient à le montrer pour les processus X_t et $[X,X]_t-t$. Le premier est une martingale locale d'après chacune des hypothèses a),b). Le second est nul sous l'hypothèse b), et sous l'hypothèse a) il s'écrit $(X_t^2-t)-2\int_0^t X_s dX_s$, qui est bien une (Q,P)-martingale locale.

Donc le processus (Y_tM_t) est une P-martingale locale. Comme M est uniformément intégrable et Y borné en module, YM est une vraie martingale nulle en 0, donc d'espérance nulle. Cela signifie que $E_Q[Y_t]=0$ pour tout t .

Soit $h(t) = E_Q[e^{iuX_t}]$. Nous avons $h(0)=Q(1)$, et d'autre part (th. de Fubini)

$$0 = h(t) - h(0) + \frac{u^2}{2}\int_0^t h(s)ds$$

La solution de cette équation différentielle est $h(t)=h(0)e^{-tu^2/2}$. Ainsi

$$E_Q[e^{iuX_t}] = Q(1)e^{-tu^2/2} \ . \tag{2}$$

Considérons ensuite un $s>0$ et un événement $A\in\underline{\underline{F}}_s$. Nous construisons le processus $X_t' = X_{t+s}-X_s$ et les autres objets considérés dans la prop.4 . Les hypothèses sont encore satisfaites pour $X',P',\ldots$ et par conséquent le raisonnement précédent nous donne

$$E_Q[I_A e^{iuX_t'}] = Q(A)e^{-tu^2/2}$$

que l'on peut noter $E_Q[e^{iu(X_{t+s}-X_s)}|\underline{\underline{F}}_s] = e^{-tu^2/2}$ avec des notations plus familières (mais un peu dangereuses pour des mesures signées...). On en déduit par une récurrence immédiate que, si $0<t_1\ldots<t_n$

$$\begin{aligned}(3)\ E_Q[\ \exp(iu_1X_{t_1} + iu_2(X_{t_2}-X_{t_1}) +\ldots+ iu_n(X_{t_n}-X_{t_{n-1}}))] \\ = Q(1)\exp(\ -\tfrac{1}{2}t_1u_1^2 - \tfrac{1}{2}(t_2-t_1)u_2^2 \ldots \ -\tfrac{1}{2}(t_n-t_{n-1})u_n^2\ ) \ .\end{aligned}$$

Soit alors φ l'application de Ω dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ qui à $\omega\in\Omega$ associe sa trajectoire $X_{\bullet}(\omega)$. Soient μ la loi du mouvement brownien issu de 0, ν la mesure signée $Q(1)\mu$, Θ la mesure image $\varphi(P)$. Nous voyons que $\int f\nu = \int f\Theta$ pour tout polynôme trigonométrique f en un nombre fini de coordonnées. Il en résulte que $\nu=\Theta$, en particulier $\Theta=0$ si $Q(1)=0$, $\Theta=\mu$ si $Q(1)=1$. L'énoncé en résulte aussitôt. ▯

REMARQUES . a) Le même raisonnement s'applique, pour démontrer l'extension aux mesures signées du théorème de Paul Lévy n-<u>dimensionnel</u>. Nous utiliserons ce résultat plus tard.

b) Il existe en probabilités plusieurs théorèmes analogues au théorème de Lévy, caractérisant diverses lois comme solutions <u>uniques</u> de problèmes de martingales. Citons le processus de Poisson, la loi exponentielle, le jeu de pile ou face... Dans chacun de ces cas, il existe une extension aux mesures signées analogue au théorème 1 , sans que nous soyons parvenus à vraiment dégager un principe général. Cela a été rédigé dans une thèse de 3^e cycle en préparation, mais nous n'en parlerons pas ici.

c) Nous montrerons en appendice que l'on parviendrait à la même conclusion en affaiblissant la définition des (Q,P)-martingales locales : au lieu de supposer que X est une P-semimartingale, on peut supposer seulement que X est un P-<u>processus de Dirichlet</u> . Nous répondons ainsi affirmativement à une question de M. Yor.

d) Le théorème 1 a une démonstration aussi simple que celle du théorème de Paul Lévy sous sa forme classique, et justifie donc pleinement les remarques de l'introduction.

MOUVEMENT BROWNIEN ET CHANGEMENT DE TEMPS

Soit X une martingale locale continue nulle en 0 (sous une loi P au sens usuel - nous passerons plus bas aux mesures signées) et soit C le processus croissant continu $[X,X]$. Supposons pour simplifier que l'on ait $C_\infty=+\infty$ p.s., et posons

$$\tau_t = \inf\{ s : C_s>t \}$$

Alors il est bien connu (Dubins-Schwartz, Dambis) que le processus $\xi_t = X_{\tau_t}$ est un mouvement brownien de la filtration $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{\tau_t}$. Nous allons examiner l'extension de ce résultat aux mesures signées.

La démonstration traditionnelle commence par établir que X <u>est constant sur les intervalles de constance de</u> $[X,X]$, ce qui entraîne que le processus changé de temps ξ est continu. On applique ensuite à ξ le théorème de Paul Lévy. Nous allons voir que cette méthode est inutilisable pour les mesures signées, sur l'exemple suivant.

EXEMPLE. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P, (\underline{\underline{F}}_t), (B_t))$ un mouvement brownien standard issu de 0, et soit (L_t) son temps local en 0 . La formule de balayage d'Azéma-Yor affirme que, si (K_t) est un processus prévisible localement borné, on a

$$(4) \qquad K_{\ell_t}B_t = \int_0^t K_{\ell_s}dB_s \qquad (\ell_t : \text{dernier zéro de } B_\cdot \text{ avant } t)$$

(cf. par ex. Yor, Sém. Prob. XIII, p. 454). En particulier, si K=L on a $K_{\ell_t} = \ell_t$, et l'on voit que LB est une P-martingale.

Soit alors T un temps d'arrêt tel que la martingale B^T soit uniformément intégrable, et soit Q la mesure signée de masse nulle $B_T P$. La martingale-densité est $M_t = B_{t\wedge T}$, et le processus $X_t = L_{t\wedge T}$ est une (Q,P)-martingale locale continue. Les trajectoires de ce processus sont à variation finie, contrairement à toutes les habitudes pour une martingale locale continue. On a $[X,X]=0$, mais les trajectoires de X sont P-p.s. non constantes au voisinage de 0 . []

Revenons au cas général : X est une (Q,P)-martingale locale continue, $[X,X]=C$, τ est le changement de temps inverse de C . Nous désignons par $\underline{\underline{G}}$ la tribu engendrée par les v.a. $\xi_t = X_{\tau_t}$ (pour simplifier, on ne traitera que le cas où $C_\infty = +\infty$ P-p.s., donc ξ_t est bien défini).).

THEOREME 2. <u>On suppose que</u> $C_\infty = +\infty$ <u>p.s.</u>.

1) <u>Si</u> $Q(1)=0$, <u>la mesure induite par</u> Q <u>sur</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>est nulle</u> .

2) <u>Si</u> $Q(1)\neq 0$, <u>la mesure induite par</u> $Q/Q(1)$ <u>sur</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>est une loi de probabilité, sous laquelle</u> ξ <u>est un mouvement brownien standard</u>.

<u>Démonstration</u>. Nous utilisons une méthode directe imitée de celle du théorème 1 . Comme alors, le processus

$$Z_t = e^{iuX_t} - 1 + \frac{u^2}{2}\int_0^t e^{iuX_s} dC_s$$

est une (Q,P)-martingale locale d'après la formule d'Ito . Pour t fixé, il en est de même du processus $(Z_{s\wedge\tau_t})$. Comme la variation totale de C sur $[0,\tau_t]$ est égale à t , ce processus est uniformément borné en module, donc $(Z_{s\wedge\tau_t} M_s)$ est une vraie P-martingale nulle en 0, et l'on a $E_Q[Z_{\tau_t}]=0$. Cela s'écrit

$$\begin{aligned} E_Q[e^{iu\xi_t}] &= Q(1) - \frac{u^2}{2} E_Q\left[\int_0^{\tau_t} e^{iuX_r} dC_r\right] \\ &= Q(1) - \frac{u^2}{2} E_Q\left[\int_0^t e^{iuX_{\tau_r}} dr\right] \\ &= Q(1) - \frac{u^2}{2}\int_0^t E_Q[e^{iu\xi_r}]\, dr \end{aligned}$$

en utilisant une formule classique sur les intégrales de Stieltjes (Dellacherie-Meyer, chap. VI n°54-55). Comme dans le th. 1, cela entraîne

$$E_Q[e^{iu\xi_t}] = Q(1) e^{-tu^2/2}$$

puis de la même façon, par décalage et conditionnement, pour $s<t$, $A\in\underline{\underline{F}}_{\tau_s}$

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\text{si } Q(1)=0 \ , \ E[I_A e^{iu(\xi_t - \xi_s)}] = 0 \\ &\text{si } Q(1)\neq 0 \ , \ E[I_A e^{iu(\xi_t - \xi_s)}] = Q(A) e^{-(t-s)u^2/2} \end{aligned}$$

d'où l'énoncé se déduit sans peine comme pour le th. 1 . Il faut remarquer que les propriétés (5) sont relatives aux tribus $\underline{\underline{F}}_{T_S}$, donc font sortir un peu de la tribu $\underline{\underline{G}}$: elles sont plus précises que l'énoncé.

REMARQUE. On aimerait en déduire que <u>sur la tribu engendrée par</u> X , la mesure induite par Q est soit nulle, soit proportionnelle à une loi de probabilité. Malheureusement, le retour de ξ à X n'est possible que si les v.a. C_t sont $\underline{\underline{G}}$-mesurables, ce qui est la situation (étudiée par Yor) des martingales « pures » . Ce cas excepté, le théorème 2 est d'un intérêt très limité.

RETOUR SUR L'EXEMPLE DU TEMPS LOCAL

L'exemple de martingale locale pour une mesure signée que nous avons signalé plus haut (le temps local $L_{t\wedge T}$ pour la mesure $Q=B_T P$) ne permet pas l'application du théorème 2, en raison de notre hypothèse simplificatrice $C_\infty=+\infty$, mais il se prête à une extension triviale du théorème 1 . En effet, avec la même démonstration que pour celui-ci, on voit que

<u>Si</u> X <u>est une</u> (Q,P)-<u>martingale locale continue nulle en</u> 0, <u>et si</u> $[X,X]_t = ct$, <u>alors</u>

- <u>Ou bien</u> Q(1)=0, <u>et la mesure induite par</u> Q <u>sur</u> $\underline{\underline{G}}=\sigma(X_t,t\geq 0)$ <u>est nulle</u>,
- <u>ou bien</u> Q(1)$\neq$0 , <u>et la mesure induite sur</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>par</u> Q/Q(1) <u>est une loi de probabilité</u>, <u>sous laquelle</u> X <u>est un mouvement brownien de paramètre</u> c.

Dans le cas où c=0 (comme ici), nous voyons que <u>ou bien</u> Q(1)$\neq$0 , et les trajectoires de X sont p.s. constantes - ce que l'on attendait a priori d'une martingale continue à variation quadratique nulle - <u>ou bien</u> Q(1)=0 , et comme $Q|_{\underline{\underline{G}}}=0$, les trajectoires de X possèdent p.s. toutes les propriétés à la fois, et en particulier celle d'être constantes. En réalité, notre exemple n'est donc pas paradoxal, et les martingales locales par rapport à une mesure signée ne diffèrent pas tant des martingales locales ordinaires.

La nullité de la mesure $Q=B_T P$ sur la tribu engendrée par L^T n'est pas difficile à établir directement. En effet, soit $S=\ell_T$, v.a. qui n'est pas un temps d'arrêt. Toutes les v.a. $L_{r\wedge T}$ sont $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurables, car on a $L_{r\wedge T}=K_S$,(K_t) désignant le processus prévisible $(L_{r\wedge t})_t$. D'autre part, on a pour tout processus prévisible borné K $E[K_{\ell_T}B_T]=0$ d'après la formule d'Azéma-Yor (4), ce qui signifie précisément que la mesure induite par Q sur $\underline{\underline{F}}_{S-}$ est nulle.

APPENDICE : LE CAS DES PROCESSUS DE DIRICHLET

H. Föllmer a défini les processus de Dirichlet (continus) dans la filtration ($\underline{\underline{F}}_t$) comme les processus continus adaptés X_t admettant une décomposition $X=U_t+H_t$, où

- U est une martingale locale continue,
- H est un processus continu adapté, nul en 0, et à variation quadratique nulle : pour tout t et toute suite (τ^n) de subdivisions de $[0,t]$ de plus en plus fines et dont le pas tend vers 0, les sommes

$$S_n(H) = \Sigma\, (H_{t^n_{i+1}} - H_{t^n_i})^2$$

tendent vers 0 en probabilité. Dans ces conditions, les sommes analogues $S_n(X)$ convergent en probabilité vers $[U,U]_t$, que l'on note simplement $[X,X]_t$. Une martingale locale à variation quadratique nulle étant constante, la décomposition X=U+H est unique. La classe des processus de Dirichlet est un espace vectoriel qui contient la classe des semimartingales.

Si X est un processus de Dirichlet, et si f est une fonction de classe C^2 , on peut définir l'intégrale stochastique $\int_0^t f'(X_s)dX_s$ par la formule d'Ito

(6) $$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d[X,X]_s$$

et vérifier que l'on a, comme pour les semimartingales

(7) $$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \lim_n \Sigma_n\, f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) \quad .$$

Nous nous proposons ici d'étendre le théorème 1 (ou la variante[1] relative à $[X,X]_t=ct$ au lieu de t) au cas où X n'est pas nécessairement une semimartingale sous la loi P , mais est seulement un P-processus de Dirichlet continu. Le lecteur est prié de se reporter à la démonstration du théorème 1, que nous allons suivre pas à pas.

Tout d'abord, nous pouvons écrire la formule d'Ito pour X , et définir le processus Y (1), qui est borné en module. Tout revient à démontrer que YM est une P-martingale locale, ou encore que les deux processus

$$\int_0^t iue^{iuX_s}\,dX_s \quad , \quad \frac{u^2}{2}\int_0^t e^{iuX_s}(d[X,X]_s-ds)$$

sont des (Q,P)-martingales locales. Occupons nous d'abord du premier : posant $f(x)= e^{iux}$, cela revient à démontrer ceci :

---

1. Toutefois, cette variante sera laissée au lecteur .

Si X est un processus de Dirichlet, M une martingale locale, si $Z_t = \int_0^t f'(X_s)dX_s$ (f de classe C^2) , alors l'hypothèse

$\Phi = XM$ est une martingale locale

entraîne $\Psi = ZM$ est une martingale locale .

Ce résultat suffira aussi à traiter aussi le second processus. En effet, si X_tM_t est une martingale locale, le résultat avec $f(x)=x^2$ va entraîner que $(X_t^2-[X,X]_t)M_t$ est une martingale locale. D'autre part, on sait par hypothèse que $(X_t^2-t)M_t$ est une martingale locale. Par différence, $([X,X]_t-t)M_t$ en est une, et comme $[X,X]_t-t$ est à variation finie, on passe à l'intégrale stochastique sans nouvelle difficulté.

Pour établir l'énoncé souligné, nous affaiblissons un peu les hypothèses :

PROPOSITION 5. Soient X un processus de Dirichlet continu, Z le processus $\int_0^t f'(X_s)dX_s$, M une semimartingale. On suppose que $\Phi=XM$ est une semimartingale. Alors $\Psi=ZM$ est une semimartingale donnée par

$$(8) \qquad Z_tM_t = \int_0^t Z_s dM_s + f'(X_s)[d\Phi_s - X_s dM_s] .$$

En particulier, si M et Φ sont des martingales locales, Ψ en est une aussi.

Démonstration. Nous fixons t, nous utilisons les subdivisions dyadiques (t_i^n) de $[0,t]$ et omettons l'indice n partout où cela se peut. Le côté gauche est limite en probabilité de

$$\Sigma_i \; Z_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i}) + M_{t_{i+1}}(Z_{t_{i+1}}-Z_{t_i})$$

(rappelons que $Z_0=0$: il n'y a pas de terme initial). Le côté droit est limite de

$$\Sigma_i \; Z_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i}) + f'(X_{t_i})\{\Phi_{t_{i+1}}-\Phi_{t_i}-X_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})\}$$

Prenant une différence et arrangeant un peu le terme $\{\ldots\}$, qui s'écrit aussi $M_{t_{i+1}}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$, nous sommes ramenés à montrer que la somme

$$\Sigma_i \; M_{t_{i+1}}[Z_{t_{i+1}}-Z_{t_i} - f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})]$$

tend vers 0 en probabilité. Il est temps de remplacer Z par sa valeur, ce qui nous donne l'expression

$$(9) \qquad \Sigma_i \; M_{t_{i+1}}\{ f(X_{t_{i+1}})-f(X_{t_i}) - f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) - \tfrac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f''(X_s)d[X,X]_s \}$$

Le dernier terme ne crée pas de difficulté : comme $[X,X]$ est un processus croissant continu, il est facile de voir que

$$(10) \qquad \Sigma_i \tfrac{1}{2} M_{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f''(X_s)d[X,X]_s \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\int_0^t M_s f''(X_s)d[X,X]_s$$

où d'ailleurs nous pouvons remplacer $[X,X]$ par $[U,U]$ (U est la partie martingale dans la décomposition de X). D'autre part, nous avons

$$\Delta_i = f(X_{t_{i+1}})-f(X_{t_i})- f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) = \tfrac{1}{2}f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2 + c_i(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2$$

avec $\sup_i |c_i| \rightarrow 0$. Quitte à remplacer la suite des subdivisions dyadiques par une suite extraite, on peut supposer que l'on a p.s.

$$\Sigma_i (U_{t_{i+1}}-U_{t_i})^2 \rightarrow [U,U]_t \quad , \quad \Sigma_i (H_{t_{i+1}}-H_{t_i})^2 \rightarrow 0$$

d'où il résulte (inégalité de Schwarz) que $\Sigma_i|(U_{t_{i+1}}-U_{t_i})(H_{t_{i+1}}-H_{t_i})| \rightarrow 0$. On peut aussi supposer que $\Sigma_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$ a une limite finie . Dans ces conditions, il est facile de voir que

$$\Sigma_i M_{t_{i+1}}\Delta_i \quad = \quad \Sigma_i \tfrac{1}{2}M_{t_i} f''(X_{t_i})(U_{t_{i+1}}-U_{t_i})^2$$

U étant une martingale locale continue, il est à peu près classique que la seconde somme tend en probabilité vers

$$\frac{1}{2}\int_0^t M_s f''(X_s)d[U,U]_s$$

(se ramener au cas borné et étudier la convergence dans L^2). Cette expression étant la même que (10), la proposition est établie.