CHING SUNG CHOU

Sur certaines généralisations de l'inégalité de Fefferman

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 219-222
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__219_0>

SUR CERTAINES GENERALISATIONS DE L'INEGALITÉ DE FEFFERMAN

par CHOU Ching-Sung

Dans le travail [1], Yor a récemment démontré une généralisation utile de l'inégalité de Fefferman. Nous allons lui donner une forme plus simple et un peu plus générale.

1. QUELQUES RAPPELS

Nous commençons par rappeler le lemme de Lenglart-Lépingle-Pratelli (Sém. XIV, p.29), amélioré par Yor, et un peu généralisé par Meyer (nous remercions P.A. Meyer de nous avoir communiqué un cours sur les inégalités de martingales, dans lequel figure cet énoncé).

LEMME 1. Soient X un processus prévisible nul en 0, B un processus croissant prévisible tel que $B_0 \geqq 0$ (sans hypothèse de continuité à droite ou à gauche). On suppose que pour tout couple (S,T) de t. d'a. bornés tel que $S \leqq T$, on a (q étant une constante >0)

(1) $$E[|X_T - X_S|^q] \leqq P\{S<T\} \|B_T\|^q_{L^\infty} \quad .$$

Alors :

a) On a pour $\lambda>0$, $\delta>0$, $\beta>1$

(2) $$P\{X^*_\infty > \beta\lambda \ , \ B_\infty \leqq \delta\lambda\} \leqq (\beta-1)^q \delta^q P\{X^*_\infty > \lambda\}$$

(3) $$E[G(X^*_\infty)] \leqq cE[G(B_\infty)]$$

pour toute fonction G croissante et modérée (non nécessairement convexe), c dépendant seulement de G et de q .

La démonstration de ce lemme n'est pas vraiment différente de celle du lemme de Lenglart-Lépingle-Pratelli, et on ne la reproduit pas. Mais nous démontrerons le lemme suivant du cours de Meyer :

LEMME 2. Soient X un processus càdlàg adapté , B un processus croissant prévisible positif. On suppose que pour tout couple (S,T) de t. d'a. bornés tel que $S \leqq T$, on a (en convenant que $X_{0-}=0$)

(4) $$E[|X_T - X_{S-}|^q | \underline{\underline{F}}_S] \leqq E[B^q_T | \underline{\underline{F}}_S]$$

Alors pour toute fonction G modérée, on a

(5) $$E[G(|X_T - X_{S-}|) \mid \underline{\underline{F}}_S] \ , \ E[G(|X^*_T - X^*_{S-}|) \mid \underline{\underline{F}}_S] \leqq cE[G(B_T) | \underline{\underline{F}}_S]$$

DEMONSTRATION. Prenons S=T dans (4) ; nous obtenons $|X_T - X_{T-}| \leqq B_T$ p.s.. Puis, comme $|a+b|^q \leqq c_q(|a|^q + |b|^q)$

$$E[|X_{T-} - X_{S-}|^q | \underline{\underline{F}}_S] \leqq cE[B_T^q | \underline{\underline{F}}_S]$$

Appliquant alors le lemme 1, on a

$$E[G(X^*_\infty)] \leqq cE[G(B_\infty)]$$

Soit $A \in \underline{\underline{F}}_S$. Nous appliquons ce résultat à $\Omega' = A$, avec la loi $P' = P(.\cap A)/P(A)$, $\underline{\underline{F}}'_t = \underline{\underline{F}}_{S+t}|_A$, $X'_t = X^T_{S+t} - X^T_{S-}$, $B'_t = B^T_{S+t}$. On obtient l'inégalité suivante, plus forte que les inégalités (5)

(6) $$E[\ G(\ \sup_{S \leqq t \leqq T} |X_t - X_{S-}|)\ |\underline{\underline{F}}_S\ ] \leqq cE[G(B_T)|\underline{\underline{F}}_S]$$

REMARQUE. Comme on peut prendre $G(t)=t^p$, on voit que toutes les relations du type

$$E[|X_T - X_{S-}|^q | \underline{\underline{F}}_S] \leqq c_q E[B_T^q | \underline{\underline{F}}_S] \qquad (q>0)$$

sont équivalentes.

Nous appliquons ce résultat :

THEOREME 1. Soit (A_t) un processus croissant adapté continu à droite ($A_{0-}=0$) et soit (Z_t) l'unique processus optionnel tel que

(7) $$Z_T^q = E[(A_\infty - A_{T-})^q | \underline{\underline{F}}_T] \quad \text{p.s. pour tout t. d'a. } T \ ;$$

ici $q>0$ est tel que $E[A^q_\infty] < \infty$. Alors le processus croissant

(8) $$C_t = \int_0^t dA_s / Z^*_s$$

engendre un potentiel gauche borné (par une constante dépendant seulement de q).

DEMONSTRATION. Soit $\varepsilon>0$. Posons $U_t = Z^*_t + \varepsilon$, $V_t = \int_0^t dA_s/U_s$. Nous avons d'après (7)

$$U_T \geqq Z_T \geqq E[(A_T - A_{T-})^q | \underline{\underline{F}}_T]^{1/q} = \Delta A_T$$

donc les sauts de V sont bornés par 1 . Ensuite

$$E[(V_\infty - V_S)^q | \underline{\underline{F}}_S] = E[(\int_S^\infty dA_s\ /U_s)^q | \underline{\underline{F}}_S] \leqq \frac{1}{U_S^q} E[(A_\infty - A_S)^q | \underline{\underline{F}}_S]$$
$$\leqq Z_S^q / U_S^q \leqq 1 \ .$$

Comme les sauts de V sont bornés par 1, on a $E[(V_\infty - V_{S-})^q | \underline{\underline{F}}_S] \leqq c_q$, et on peut appliquer le lemme précédent (avec B constant), qui nous montre que $E[V_\infty - V_{S-} | \underline{\underline{F}}_S]$ est borné par une constante dépendant seulement de q . Après cela, on fait tendre ε vers 0 .

Nous arrivons maintenant à l'inégalité de Fefferman-Yor. Elle est simplifiée (car on voit apparaître Z^* lui même et non un processus prévisible majorant Z) et étendue à toutes les semimartingales, continues ou non.

2. AMELIORATION DE L'INEGALITÉ DE FEFFERMAN

THEOREME 2. Soient X et Y deux semimartingales, q une constante >0. On suppose que la v.a. $[Y,Y]_\infty$ est p.s. finie, et l'on désigne par (Z_t) l'unique processus optionnel positif tel que

(9) $$Z_T^q = E[\,([Y,Y]_\infty - [Y,Y]_{T-})^q \,|\, \underline{\underline{F}}_T\,] \text{ pour tout t. d'a. } T\ .$$

Alors on a

(10) $$E[\int_0^\infty |d[X,Y]_s|\,] \leq cE[(\int_0^\infty Z_s^* d[X,X]_s)^{1/2}]$$

où la constante c dépend seulement de q .

DEMONSTRATION. Rappelons l'inégalité qui est à la base de la démonstration de l'inégalité de Fefferman classique, et qui repose uniquement sur l'inégalité de Kunita-Watanabe pour le crochet . Soient (U_t) et (V_t) deux processus optionnels positifs. Posons

$$\alpha_t = \int_0^t U_s d[X,X]_s \quad , \quad \beta_t = \int_0^t V_s d[Y,Y]_s$$

Alors on a (cf. Dellacherie-Meyer n° VII.86 ; les processus désignés ici par U,V sont les processus U^2,V^2 de la référence)

(11) $$E[\int_0^\infty \sqrt{U_s}\sqrt{V_s}\,|d[X,Y]_s|\,] \leq \sqrt{2}\ E[\sqrt{\alpha_\infty}]^{1/2} E[\int_0^\infty (\beta_\infty - \beta_{s-}) d\sqrt{\alpha_s}]^{1/2}\ .$$

Ici nous appliquerons cette inégalité en prenant $U_t = Z_t^* + \varepsilon$ (ε tendra vers 0 à la fin de la démonstration) et $V_t = 1/U_t$. Le côté gauche de (11) est donc le même que le côté gauche de (10). Dans la dernière espérance à droite, on peut remplacer le processus $\beta_\infty - \beta_{s-}$ par sa projection optionnelle, qui d'après le théorème 1 est bornée par une constante dépendant seulement de q . Le côté droit devient donc simplement $c_q E[\sqrt{\alpha_\infty}]$, et le théorème est établi.

En suivant Yor, nous obtenons le corollaire suivant :

THEOREME 3. On a pour toute fonction modérée G

(12) $$E[G(\int_0^\infty |d[X,Y]_s|)] \leq c(q,G) E[G((\int_0^\infty Z_s^* d[X,X]_s)^{1/2})]\ .$$

DEMONSTRATION. Nous considérons les deux processus croissants

$$A_t = \int_0^t |d[X,Y]_s| \quad , \quad B_t = (\int_0^t Z_s^* d[X,X]_s)^{1/2}$$

et nous appliquons le lemme de Lenglart-Lepingle-Pratelli (lemme 1) aux processus prévisibles (A_{t-}) et (B_{t-}), avec $q=1$. L'inégalité (1) revient au théorème 2, appliqué aux semimartingales $X'_t = X^{T-}_{t+S} - X_{S-}$, $Y'_t = Y^{T-}_{t+S} - Y_{S-}$ pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_{S+t})$.

REMARQUE. Plus généralement, si (H_t) est un processus optionnel. on peut majorer $E[\int_0^\infty |H_s||d[X,Y]_s|]$ au moyen de $E[(\int_0^\infty H_s^2 Z_s^* d[X,X]_s)^{1/2}]$. La démonstration est la même, et le théorème 3 se généralise de même. Lorsque H est prévisible, ce résultat découle directement du th.2 ou 3 en remplaçant X par $H\cdot X$.

3. UNE VARIANTE PREVISIBLE

Pratelli (Sém. Prob. X) a établi une inégalité de Fefferman faisant intervenir les crochets obliques de deux martingales. Nous allons généraliser ici cette inégalité. Ici nous devrons prendre $q=1$.

THEOREME 4. Soient X et Y deux semimartingales admettant des crochets obliques. On suppose que la v.a. $\langle Y,Y\rangle_\infty$ est p.s. finie, et l'on désigne par (Z_t) l'unique processus prévisible tel que

(13) $$Z_T = E[\langle Y,Y\rangle_\infty - \langle Y,Y\rangle_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] \quad \text{pour tout temps prévisible } T$$

Alors on a

(14) $$E[\int_0^\infty |d\langle X,Y\rangle_s|] \leqq cE[(\int_0^\infty Z_{s-}^* d\langle X,X\rangle_s)^{1/2}] .$$

DEMONSTRATION. Le même raisonnement que pour (11) nous donne - avec la possibilité de choisir U et V optionnels

(15) $$E[\int_0^\infty \sqrt{U_s}\sqrt{V_s}|d\langle X,Y\rangle_s|] \leqq \sqrt{2}\, E[\sqrt{\alpha_\infty}]^{1/2} E[\int_0^\infty (\beta_\infty - \beta_{s-}) d\sqrt{\alpha}_s]^{1/2}$$

avec $\alpha_t = \int_0^t U_s d\langle X,X\rangle_s$, $\beta_t = \int_0^t V_s d\langle Y,Y\rangle_s$. En effet, ce calcul repose seulement sur l'inégalité de Kunita-Watanabe. Nous prendrons ici $U_t = Z_{t-}^* + \varepsilon$, $V_t = 1/U_t$. Alors α, $\sqrt{\alpha}$ sont des processus prévisibles, et il nous suffit de vérifier que la projection prévisible du processus $(\beta_\infty - \beta_{s-})$ est uniformément bornée, autrement dit que $E[\beta_\infty - \beta_{T-}|\underline{\underline{F}}_{T-}] \leqq c$ pour tout temps prévisible T . Utilisant une suite annonçant T , il suffit de vérifier que $E[\beta_\infty - \beta_T | \underline{\underline{F}}_T] \leqq c$. Or ceci vaut

$$E[\int_{]T,\infty]} d[Y,Y]_s / Z_{s-}^* + \varepsilon \;|\underline{\underline{F}}_T] \leqq \frac{1}{Z_T^* + \varepsilon} E[\langle Y,Y\rangle_\infty - \langle Y,Y\rangle_T | F_T] \leqq 1 .$$

et le théorème est établi.

Il est ensuite facile de démontrer le théorème analogue au th. 3 .

REMARQUE. Si l'on définit Z optionnel par

$$Z_T^q = E[(\langle Y,Y\rangle_\infty - \langle Y,Y\rangle_{T-})^q | \underline{\underline{F}}_T] \quad \text{pour tout t. d'a. } T$$

on a un résultat exactement analogue au théorème 2 (avec Z_s^* et non Z_{s-}^* au second membre) et la même démonstration que pour le th. 2 .

Ref.[1] M. Yor: Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque. Preprint (1983). A paraître dans un volume consacré au grossissement de filtrations.