DOMINIQUE BAKRY

Étude probabiliste des transformées de Riesz et de l'espace H^1 sur les sphères

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 197-218

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__197_0>

Séminaire de Probabilités XVIII

ETUDE PROBABILISTE DES TRANSFORMEES DE RIESZ ET DE L'ESPACE H^1 SUR LES SPHERES

par D. Bakry

I. INTRODUCTION

Le théorème de Fefferman-Stein, qui établit l'équivalence entre les définitions usuelles de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ et montre que le dual de cet espace est $BMO(\mathbb{R}^n)$, peut être établi par une méthode probabiliste (cf. Meyer [M1]) qui fait un usage modéré de la géométrie de $\mathbb{R}^n$. Nous avons essayé d'aborder par une méthode analogue l'étude de l'espace H^1 sur l'espace de Wiener, relativement au semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. [M3]), mais une étape essentielle (l'inégalité de sous-harmonicité pour le système de Riesz) semble faire défaut en dimension infinie, et pour l'instant on ne voit pas comment la remplacer. McKean a souligné il y a longtemps l'analogie entre l'espace de Wiener en dimension infinie, et les sphères en dimension finie. Nous avons donc pensé qu'une présentation complète de la méthode probabiliste pour l'étude des espaces $H^1(S^{n-1})$ serait une bonne préparation à l'étude en dimension infinie, en permettant au moins de voir où résident les difficultés.

Le système de Riesz que nous introduisons est le même que celui qui a été introduit par Stein pour les groupes de Lie compacts, et dont l'étude a été poussée plus loin par Coifman-Weiss (pour plus de détails, voir la section VIII) : nous sommes simplement passés du groupe orthogonal à la sphère. Cependant, Stein n'aborde pas la théorie de H^1, Coifman-Weiss ne la mentionnent qu'en passant, et la relation avec H^1 probabiliste n'est pas abordée par ces auteurs.

Les quelques résultats sur les développements en harmoniques sphériques, etc., dont nous aurons besoin seront empruntés au " Lecture Note" [CW1] de Coifman -Weiss, ou au livre [SW].

II. RAPPELS : TRANSFORMATIONS DE RIESZ GENERALES

Avant de nous restreindre au cas des sphères, nous allons résumer rapidement (sans prétendre à la rigueur) les méthodes introduites par Stein [S1] et utilisées par Meyer ([M1],[M2]) pour l'étude de certains opérateurs intégraux singuliers liés aux semi-groupes symétriques.

On désigne par E un bon espace topologique (une variété dans tous les cas traités ici) muni d'une mesure μ et d'un semi-groupe (P_t) markovien ($P_t 1=1$) et μ-symétrique ($<f,P_t g>_\mu = <P_t f,g>_\mu$), admettant une réalisation par de " bons " processus de Markov (Y_t) . Les noyaux P_t opèrent sur tous les espaces L^p ($1\leq p\leq\infty$) ; nous désignerons toujours par A le générateur, par $D_p(A)$ son domaine au sens de L^p. On désigne par (Q_t) le " semi-groupe de Cauchy" associé à (P_t)

(2.1) $$Q_t = \int P_s \mu_t(ds)$$

où (μ_t) est le semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}_+$ stable d'ordre 1/2 ($\int\mu_t(ds)e^{-\lambda s}= e^{-t\sqrt{\lambda}}$) ; C et V seront respectivement le générateur et le potentiel de (Q_t), définis sur des domaines convenables : sur L^2 on a par exemple $C=-\sqrt{-A}$, au sens de la théorie des opérateurs autoadjoints non bornés.

Soit $\tilde{E}=E\times\mathbb{R}_+$. Comme chez Meyer (Sém. X, p. 126) le facteur $\mathbb{R}_+$ est "horizontal" et affecté d'une flèche $\rightarrow$, le facteur E est " vertical" et affecté d'une $\uparrow$. Une fonction f sur E , bornée par exemple, admet un " <u>prolongement harmonique</u>" à $\tilde{E}$, noté $\tilde{f}(x,t)$ - mais le $\sim$ sera omis s'il n'y a pas danger de confusion - donné par

(2.2) $$\tilde{f}(x,t) = \int Q_t(x,dy)f(y) \text{ si } t>0 \ , \quad f(x) \text{ si } t=0 \ .$$

On a l'interprétation probabiliste suivante : soit (B_t) un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ (de générateur D^2, non $D^2/2$ comme d'habitude), avec une loi initiale portée par $\mathbb{R}_+$, arrêté au premier instant T_0 où il rencontre 0 . Alors le processus $(B_{t\wedge T_0})$ est sur $\mathbb{R}_+$, et le processus

(2.3) $$Z_t = (Y_{t\wedge T_0}, B_{t\wedge T_0})$$

est sur $E\times\mathbb{R}_+$. Nous désignerons par $M_t(f)$ la <u>martingale</u>

(2.4) $$M_t(f) = \tilde{f}(Z_t) = \tilde{f}(Y_{t\wedge T_0}, B_{t\wedge T_0})$$

(qui est en fait càdlàg. ; pour tout cela, voir Sém. Prob. X, p. 152-159 et Sém. Prob. XV, p. 156). La projection de cette martingale sur le mouvement brownien (B_t) est une intégrale stochastique

(2.5) $$M_t^{\rightarrow}(f) = \int_0^{t\wedge T_0} D_{\rightarrow}f(Z_s)dB_s \qquad (D_{\rightarrow}f \text{ désigne } \tfrac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(x,t))$$

Soit $a\in\mathbb{R}_+$ (que l'on fera tendre vers $+\infty$ ensuite) ; on désigne par E_a une espérance relative au processus (Z_t) et à la loi initiale $\mu_a = \mu\otimes\varepsilon_a$. On a

(2.6) $$\begin{aligned} <f,g>_\mu &= E_a[M_\infty(f)M_\infty(g)] = <Q_a f,Q_a g>_\mu + E_a[\langle M(f),M(g)\rangle_\infty] \\ &= <Q_a f,Q_a g>_\mu + 2E_a[\langle M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(g)\rangle_\infty] \end{aligned}$$

Ainsi, les " martingales horizontales" seules permettent de calculer $< f,g >_\mu$: la symétrie du semi-groupe (P_t) joue ici un rôle essentiel.

Pour calculer les processus $\langle M(f),M(g)\rangle$, il faut supposer que (P_t) admet un opérateur carré du champ. Dans les situations que nous rencontrerons, nous disposerons d'une algèbre $\mathcal{A}$ contenue dans tous les L^p ($1\leq p<\infty$) et dense dans chacun d'eux, stable par les opérateurs P_t, Q_t, A ... ; pour $f,g \in \mathcal{A}$, nous poserons

(2.7) $$\Gamma(f,g) = A(fg)-fAg-gAf$$

On peut alors (Sém. Prob. X, p. 146 et p. 162) montrer que les crochets obliques < , > de toutes les martingales locales sont absolument continus, et prolonger Γ en un opérateur bilinéaire de $D_2(A)\times D_2(A)$ dans L^1. Nous ne cherchons pas ici à donner des détails. On a dans ces conditions

(2.8) $$\langle M(f),M(f)\rangle_\infty = \int_0^{T_0} h(Z_s)ds \qquad h = 2(D_\rightarrow f)^2 + \Gamma^\dagger(f,f)$$

($D_\rightarrow f = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(x,t)$, $\Gamma^\dagger(f,f) = \Gamma(\tilde{f}(.,t),\tilde{f}(.,t))$).

On dit que le semi-groupe (P_t) satisfait aux inégalités de Riesz dans L^p si l'on a

(2.9) $$\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{L^p} \leqq c_p\|Cf\|_{L^p} \qquad \text{pour } f\in D_p(C)$$

ou encore, remplaçant f par Vf sous des conditions convenables (de sorte que $CVf=-f$)

(2.10) $$\|\sqrt{\Gamma(Vf,Vf)}\|_p \leqq c_p\|f\|_p \qquad \text{pour } f \text{ appartenant au domaine de } V$$

Dans les cas usuels, on peut écrire au moins pour $f\in\mathcal{A}$

(2.11) $$\Gamma(f,f) = \Sigma_n(T_nf)^2$$

où les T_n sont des opérateurs linéaires. Alors (2.10) entraîne (au moins formellement, en laissant de côté les questions de domaine) que les opérateurs linéaires T_nV sont bornés sur L^p : on les appelle les transformations de Riesz . La théorie se développe bien lorsque les opérateurs T_n commutent au semi-groupe (semi-groupes de convolution sur $\mathbb{R}^n$, et en particulier cas du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^n$), ou du moins ont un commutateur très simple (cas du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck). Dans le cas des sphères, nous aurons commutation.

Lorsque p=1, la condition $\|\sqrt{\Gamma(Vf,Vf)}\|_{L^1} < \infty$ n'est pas, en général, une conséquence de $\|f\|_{L^1} < \infty$; elle constitue l'une des définitions possibles de l'espace H^1 associé au semi-groupe (P_t). Mais la théorie générale, déjà peu développée pour $p>1$, est inexistante pour p=1 .

III. LE SEMI-GROUPE DU MOUVEMENT BROWNIEN SPHERIQUE

Nous désignons par x^i ($1 \leq i \leq n$) les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, par D_i les opérateurs de dérivation correspondants, par $r=(\Sigma_i x^{i2})^{1/2}$ la distance euclidienne à l'origine, par $S_t = \{r=t\}$ la sphère de rayon t, et S^{n-1} est plus particulièrement la sphère S_1. L'opérateur différentiel $\frac{1}{r}\Sigma_i x^i D_i$ est noté $\frac{\partial}{\partial r}$. Pour $x \neq 0$, on pose $x=r\theta$ avec $\theta \in S^{n-1}$. Il est bien connu que le laplacien usuel Δ peut s'écrire hors de l'origine

$$(3.1) \qquad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}A$$

où A est un opérateur du 2^e ordre, invariant par rotation, possédant la propriété suivante : si $x=r\theta$, $Af(x)$ ne dépend que de la restriction de f à la sphère S_r. En particulier, nous pouvons restreindre A à la sphère S^{n-1}. Nous désignerons par A aussi bien l'opérateur sur $\mathbb{R}^n$ que sa restriction à S^{n-1}, et l'un comme l'autre seront appelés <u>laplacien sphérique</u>.

Nous désignerons par μ la loi uniforme sur la sphère. Il est bien connu que $L^2(\mu)$ (aussi désigné par $L^2(S^{n-1})$, ou simplement L^2 si tout est clair) est somme directe hilbertienne

$$L^2 = \oplus_k \mathcal{H}_k$$

où $\mathcal{H}_k$ est l'espace des <u>restrictions à</u> S^{n-1} <u>des polynômes harmoniques, homogènes de degré</u> k. Autrement dit, toute fonction $f \in \mathcal{H}_k$ est telle que la fonction sur $\mathbb{R}^n$

$$(3.2) \qquad f'(r\theta) = r^k f(\theta)$$

soit un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, harmonique au sens usuel. Ecrivant que $\Delta f'=0$, on voit que

$$(3.3) \qquad \text{Pour } f \in \mathcal{H}_k\,, \quad Af = -k(k+n-2)f$$

(pour abréger, nous poserons $n-2=\chi$). Nous exprimerons cela de la manière suivante : désignant systématiquement par $f=\Sigma_k f_k$ le développement de $f \in L^2(S^{n-1})$ en harmoniques sphériques, nous dirons que A est l'opérateur de <u>multiplicateur</u> $-k(k+\chi)$. Si (P_t) est le semi-groupe admettant pour générateur l'opérateur elliptique A, P_t correspond au multiplicateur $e^{-tk(k+\chi)}$, de même Q_t à $e^{-t\sqrt{k(k+\chi)}}$, C à $-\sqrt{k(k+\chi)}$... Nous conviendrons de désigner par $\hat{V}$ l'opérateur de multiplicateur $1/\sqrt{k(k+\chi)}$ pour $k \geq 1$, et 0 pour $k=0$: il est borné sur L^2, et coïncide avec V sur l'espace L^2_0 des fonctions de L^2 d'intégrale nulle.

La somme directe (non complétée) des espaces $\mathcal{H}_k$ coïncide avec l'espace des restrictions à S^{n-1} de <u>tous</u> les polynômes sur $\mathbb{R}^{n-1}$; c'est donc une <u>algèbre</u> de fonctions C^∞, dense dans tous les L^p $1<p<\infty$), et stable par tous les P_t, Q_t, A ... et plus généralement tous les opérateurs associés à un multiplicateur. Elle jouera pour nous le rôle de l'algèbre $\mathcal{D}$ du §2 , et nous la noterons donc $\mathcal{D}$.

Système de Riesz sphérique. Nous utiliserons une autre représentation de l'opérateur A . Considérons les champs de vecteurs suivants, sur $\mathbb{R}^n$ ou sur S^{n-1}

(3.4) $$T^i_j = x^i D_j - x^j D_i$$

Pour $i=j$, on a $T^i_j=0$; pour $i\neq j$, on a $T^i_j=-T^j_i$, et il s'agit des générateurs infinitésimaux des groupes de rotations associés aux couples de coordonnées x^i, x^j. Comme A commute aux rotations, il commute aussi aux T^i_j . On a aussi

(3.5) $$< f,T^i_j g >_\mu = - < T^i_j f,g >_\mu \quad \text{pour } f,g \in \mathcal{D}$$

On a $T^i_j r=0$, donc $T^i_j(r^k f)=r^k T^i_j f$, et comme T^i_j commute avec Δ , donc préserve l'harmonicité, on voit que T^i_j préserve $\mathcal{H}_k$. Un calcul simple montre que

(3.6) $$T^i_j T^k_\ell = x^i x^k D_{j\ell} - x^i x^\ell D_{jk} - x^j x^k D_{i\ell} + x^j x^\ell D_{ik} +(x^i \delta^k_j - x^j \delta^k_i) D_\ell - (x^i \delta^\ell_j - x^j \delta^\ell_i) D_k$$

d'où l'on tire

$$\Sigma_{i,j} T^i_j T^i_j = -2(n-1)\Sigma_i x^i D_i + 2\Sigma_{i,j} x^{i2} D_{jj} - 2\Sigma_{i,j} x^i x^j D_{ij}$$

Compte tenu de $r\frac{\partial}{\partial r} = \Sigma_i x^i D_i$, $r^2(\frac{\partial}{\partial r})^2 = \Sigma_{ij} x^i x^j D_{ij}$, on a

(3.7) $$\Sigma_{i<j} (T^i_j)^2 = r^2\Delta - (n-1)r\frac{\partial}{\partial r} - r^2(\frac{\partial}{\partial r})^2 = A \quad (\text{cf. } (3.1))$$

d'où l'opérateur carré du champ pour A

(3.8) $$\Gamma(f,g) = 2\Sigma_{i<j} (T^i_j f)(T^i_j g)$$

et ceci nous conduit à poser, conformément à (2.11), et en négligeant un facteur 2

(3.9) $$R^i_j = VT^i_j = T^i_j \hat{V} \quad \text{pour } f\in\mathcal{D} .$$

Le système des opérateurs R^i_j $(i<j)$, au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, est appelé le système des transformations de Riesz sphériques. On notera que d'après (3.7), on a

(3.10) $$\Sigma_{i<j} (R^i_j)^2 = \Sigma_{i<j} (T^i_j)^2 V^2 = AV^2 = -I$$

sur les éléments de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle. Notons pour nos futures références le commutateur des T^i_j , conséquence de (3.6)

(3.11) $$[T^i_j, T^k_\ell] = 0 \text{ si } i,j,k,\ell \text{ sont tous distincts ; } [T^i_j, T^j_\ell] = T^i_\ell .$$

Remarquons que pour $f\in\mathcal{D}$, on a $2\int(T^i_j f)^2 \leq \int\Gamma(f,f) = \int(A(f^2)-2fAf\ ) =$

$-2\int fAf = 2\int (Cf)^2$. Remplaçant f par Vf, on voit que les R^i_j sont des opérateurs de norme-$L^2 \leqq 1$, sur l'espace $\mathcal{A} \subset L^2$. On peut donc les prolonger par continuité à L^2 entier. La théorie L^p ($p>1$) des transformations de Riesz ne présente aucune difficulté par les méthodes de martingales, comme dans Sém. Prob. XV, p. 159-162. Notre but ici est le cas $p=1$.

Sur $\mathcal{H}_k$ ($k \geqq 1$) on a $Cf = -\sqrt{k(k+\chi)}f$, donc

$$(3.12) \qquad \|T^i_j f\|_2^2 \leqq k(k+\chi)\|f\|_2^2 \quad \text{si } f\in\mathcal{H}_k .$$

<u>Utilisation du noyau de Poisson</u>. A côté du semi-groupe (Q_t), de multiplicateur $e^{-t\sqrt{k(k+\chi)}}$, introduisons le semi-groupe très voisin

$$(3.13) \qquad Q'_t f = \Sigma_k \, e^{-kt} f_k$$

On peut écrire $Q_t = Q'_t J_t = J_t Q'_t$, où J_t admet un multiplicateur borné supérieurement et inférieurement, donc est un isomorphisme de L^2. D'autre part, on a $Q'_t = \Pi_{e^{-t}}$, où Π_r est le <u>noyau de Poisson</u> de la boule unité :

$$(3.14) \qquad \Pi_r f = \Sigma_k \, r^k f_k$$

$$(3.15) \qquad \Pi_r f(\theta) = \int \frac{1-r^2}{(1-2r\theta.\eta+r^2)^{n/2}} f(\eta)\mu(d\eta)$$

Remarquons que pour r fixé, $-1 \leqq t \leqq 1$, on a $1-2rt+r^2 \geqq (1-r)^2$, donc $|\Pi_r f| \leqq 2\|f\|_1/(1-r)^{n-1}$. Si $f\in\mathcal{H}_k$, on a $\Pi_r f = r^k f$, donc

$$\|f_k\|_\infty \leqq \frac{2r^k}{(1-r)^{n-1}}\|f\|_1$$

et comme r est arbitraire, en minimisant en $r\in[0,1]$ nous trouvons

$$(3.16) \qquad \|f\|_\infty \leqq ck^{n-1}\|f\|_1 \quad \text{pour } f\in\mathcal{H}_k .$$

Cela permet de retrouver " à la main " un certain nombre de résultats sur (Q_t) ou (P_t), sans utiliser ni le groupe orthogonal, ni les résultats sur les équations elliptiques. Par exemple, si $f\in L^2$, on a $\|f_k\|_1 \leqq \|f_k\|_2$, donc la suite $(\|f_k\|_1)$ appartient à ℓ^2, et il en résulte que les séries $\Sigma_k \|Q_t f_k\|_\infty$, $\Sigma_k \|P_t f_k\|_\infty$ convergent, donc $Q_t f$, $P_t f$ sont continues. Comme Q_t, P_t appliquent L^2 dans L^∞, ils appliquent L^1 dans L^2 par dualité, et en composant Q_{2t}, P_{2t} appliquent L^1 dans les fonctions continues.

Cela permet de définir formellement $h=R^i_j f$ pour $f\in L^1$: remarquons que $Q_t f$ appartient à L^∞, donc $h_t = R^i_j Q_t f$ est bien définie et appartient à tout L^p, $p<\infty$. On a $h_{s+t} = Q_s h_t$, et nous considérerons h comme la "valeur au bord" formelle de la fonction $h(x,t) = h_t(x)$, harmonique dans $E\times]0,\infty[$ ouvert. En particulier, $\|h_t\|_1$ est fonction décroissante de t, et nous poserons

$$(3.17) \qquad \|h\|_1 = \|R_j^i f\|_1 = \lim_{t\to 0} \|h_t\|_1$$

La transformée de Riesz peut alors s'interpréter comme une mesure bornée h , limite vague des $h_t\cdot\mu$, mais il est inutile d'insister sur ce point. Il est plus important de remarquer que la martingale $M_t(h)$ est définie sur l'intervalle stochastique ouvert $[0,T_0[$, et en particulier que $M_{t\wedge T_\varepsilon}(h)$ est une vraie martingale si $T_\varepsilon=\inf\{t : B_t=\varepsilon\}$, avec $\varepsilon>0$. De même pour sa partie horizontale $\vec{M}_{t\wedge T_\varepsilon}$.

IV. LES DIFFERENTS TYPES D'ESPACES H^1

Nous allons indiquer deux types de définitions possibles de l'espace H^1, et de l'espace BMO qui est le candidat naturel à en être le dual : ce sont l'espace H^1 des probabilistes, et l'espace H^1 défini au moyen des transformations de Riesz. Le résultat principal de ce travail sera l'équivalence de ces deux définitions, et la vérification de la dualité avec les espaces BMO indiqués. A la fin de l'exposé, nous introduirons encore un troisième type : l'espace H^1 atomique.

<u>Les espaces probabilistes</u>. Rappelons que nos lois initiales sont du type $\mu_a=\mu\otimes\varepsilon_a$. Si l'on a $a<b$, et si $T_a=\inf\{t : B_t=a\}$, le processus Z_{T_a+t} sous la loi P_b a même loi que Z_t sous P_a .

Soit $f\in L^1$; nous dirons que f appartient à H^1_{pr} (<u>espace H^1 des probabilistes</u>) si, pour tout a , la martingale associée $M_t(f)$ appartient à l'espace H^1 usuel, soit

$$(4.1) \qquad E_a[\ \sup_t |M_t(f)|\ ] < \infty \quad \text{ou} \quad E_a[\ <M(f),M(f)>_\infty^{1/2}] < \infty$$

et si de plus ces quantités (qui croissent avec a : si $a<b$, $M_t(f)$ sous P_a a même loi que $M_{T_a+t}(f)$ sous P_b) sont <u>bornées en</u> a . Pour fixer les idées, nous définirons la norme par

$$(4.2) \qquad \|f\|^1_{pr} = \|f\|_{L^1} + \sup_a E_a[\ <M(f),M(f)>_\infty^{1/2}]$$

Une variante importante consiste à remplacer $M(f)$ par sa <u>partie horizontale</u> $\vec{M}(f)$. Comme $<\vec{M}(f),\vec{M}(f)> \leq <M(f),M(f)>$, on obtient alors une norme plus petite, donc un espace a priori plus grand. Nous parlerons alors de l'espace $H^{1\to}_{pr}$ et de la norme $\|f\|^{1\to}_{pr}$

Nous dirons que f appartient à l'espace BMO_{pr} (<u>espace BMO des probabilistes</u>) si $M(f)$ appartient à l'espace BMO usuel sous P_a , avec une norme bornée en a . Une manière d'écrire cela, comme il s'agit de martingales continues, consiste à dire que

$$E_a[|M_\infty(f)- M_t(f)|\,|\underline{\underline{F}}_t] \leq c \quad \text{p.s.},$$

c ne dépendant ni de t, ni de a . Mais un calcul simple montre que cette espérance conditionnelle vaut p.s. $j(Z_t)$, où j est la fonction sur $E\times\mathbb{R}_+$ donnée par

(4.3) $$j(x,t) = \int Q_t(x,dy)|f(y)-Q_t(x,f)| \quad (j(x,0)=0)$$

et tout revient à écrire que $j(x,t) \leqq c$ $d\mu(x)\otimes dt$-p.p.. Mais en fait on peut voir que j est continue sur $E\times\mathbb{R}_+^*$, donc cela revient à $j\leqq c$ partout, et en fait ne dépend pas de la loi initiale utilisée.

On aurait pu aussi bien utiliser une norme BMO quadratique, calculée au moyen de $\langle M(f),M(f)\rangle$: cette norme quadratique est particulièrement avantageuse dans le cas de l'<u>espace BMO (probabiliste) horizontal</u>, qui est la variante de BMO associée à $M^{\rightarrow}(f)$. On a

(4.4) $$E_a[\langle M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(f)\rangle_\infty - \langle M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(f)\rangle_t|\underline{\underline{F}}_t] = v(Z_t)$$

où v est le potentiel de Green dans $E\times\mathbb{R}_+$ de la fonction $2(D_{\rightarrow}f)^2$

(4.5) $$v(x,t) = E_{x,t}[\int_0^{T_0} 2(D_{\rightarrow}f(Z_s))^2 ds]$$

et il s'agit d'écrire que v est borné. Ici encore, la norme BMO horizontale est plus petite que la norme BMO.

<u>Les espaces définis au moyen des</u> R^i_j. Soit $f\in L^1$. Nous dirons que f appartient à l'espace H^1_R (R pour Riesz) si la norme

(4.6) $$\|f\|^1_R = \|f\|_{L^1} + \Sigma_{i<j} \|R^i_jf\|_1$$

est finie. On rappelle que $\|R^i_jf\|_1$ représente ici $\sup_t \|R^i_jQ_tf\|_1$.

De même, nous dirons que $f\in BMO_R$ si f admet une représentation de la forme

(4.7) $$f = u + \Sigma_{i<j} R^i_j(u^i_j)$$

où les fonctions u, u^i_j appartiennent à L^∞, et $\|f\|_{BMO,R}$ est la borne inférieure, sur toutes les représentations (4.7), des constantes $\|u\|_\infty \vee (\sup_{i,j}\|u^i_j\|_\infty)$.

V. PREMIERE ETAPE : $H^{1\rightarrow}_{pr} \subset H^1_{Riesz}$

Dans cette partie, nous allons montrer que $\|R^i_jf\|_1 \leqq c\|f\|^{1\rightarrow}_{pr}$.

Remarquons que sous la loi P_a, pour $0<\varepsilon<a$, la martingale $M_t(Q_\varepsilon f)$ ou $M^{\rightarrow}_t(Q_\varepsilon f)$ a même loi que $M_{t\wedge T_\varepsilon}(f)$ ou $M^{\rightarrow}_{t\wedge T_\varepsilon}(f)$ sous $P_{a+\varepsilon}$. Donc

(5.1) $$\|Q_\varepsilon f\|^1_{pr} \leqq \|f\|^1_{pr} \quad , \quad \|Q_\varepsilon f\|^{1\rightarrow}_{pr} \leqq \|f\|^{1\rightarrow}_{pr}$$

et il nous suffit de démontrer l'inégalité désirée, avec $Q_\varepsilon f$ au lieu de f - autrement dit, nous pouvons supposer $f\in L^2$ (ou même L^∞ !) et alors R^i_jf appartient à L^2. Tout revient donc à montrer ceci :

LEMME 1. <u>Soient</u> $f\in L^2$, $g\in L^2_0$; <u>alors</u> $|< R^i_j f, g >_\mu| \leq c\|f\|^{1\to}_{pr} \|g\|_\infty$.

En effet, $R^i_j f$ est d'intégrale nulle, donc $\|R^i_j f\|_1$ peut s'estimer au moyen de la boule unité de L^∞_0 .

DEMONSTRATION. Nous avons $< R^i_j f, g > = - < f, R^i_j g >$. Posons $R^i_j g = h \in L^2_0$. Alors, pour tout $a>0$ nous avons d'après (2.6)

$$< f,h >_\mu = E_a[M_\infty(f)M_\infty(h)] = < Q_a f, Q_a h >_\mu + 2E_a[< M^\to(f), M^\to(h)>_\infty]$$

Le premier terme ne nous intéresse pas : $Q_a h \underset{a\to\infty}{\to} 0$ dans L^2 puisque h est d'intégrale nulle. Au second terme, nous appliquons l'inégalité de Fefferman probabiliste :

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} E_a[|< M^\to(f), M^\to(h) >_\infty|] &\leq c\|M^\to(f)\|_{H^1(P_a)} \|M^\to(h)\|_{BMO(P_a)} \\ &\leq c\|\ldots\ldots\|_{H^1(P_a)} \|M(g)\|_{BMO(P_a)} \end{aligned}$$

En effet - c'est la remarque cruciale - nous avons si $h=R^i_j g$

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} d< M^\to(h), M^\to(h)>_t &= 2(D_\to h(Z_t))^2 dt = 2(T^{i\dagger}_j g(Z_t))^2 \\ &\leq d< M(g), M(g) >_t dt \end{aligned}$$

car si $h=R^i_j g$, on a pour $h_t = Q_t h$: $D_\to h_t = D_\to Q_t T^i_j Vg = CQ_t T^i_j Vg$. Comme tous ces opérateurs commutent et $CV=-I$, il reste $- T^i_j Q_t g = -T^i_j g_t$, dont le carré satisfait à

$$2(T^i_j g_t)^2 \leq \Gamma(g_t, g_t) = \Gamma^\dagger(\tilde{g},\tilde{g}) \quad (\text{ cf. } (3.8))$$

et d'après (2.8), $\Gamma^\dagger(\tilde{g},\tilde{g})(Z_t)dt \leq d< M(g), M(g)>_t$. Ayant établi (5.2) la conclusion est évidente : M(g) est bornée, et tout revient à noter que $L^\infty(P_a) \subset BMO(P_a)$, avec une norme plus forte.

Notons pour nos références la première ligne de (5.2), qui est une " inégalité de Fefferman"

LEMME 2 . <u>Si</u> $f\in L^2$, $h\in L^2_0$, <u>on a</u> $< f,h >_\mu \leq c\|f\|_{H^\to_{pr}} \|h\|_{BMO^\to_{pr}}$

VI. SECONDE ETAPE : $H^1_{Riesz} \subset H^1_{pr}$.

On notera tout de suite que cette seconde étape, combinée avec la première, entraîne que $H^{1\to}_{pr} \subset H^1_{pr}$. L'inclusion inverse étant évidente a priori, l'égalité des trois espaces H^1 considérés en résulte.

D'autre part, nous établirons aussi dans cette section que, si $f\in H^1_R$, les $R^i_j f$ ne sont pas simplement des objets plus ou moins formels (des mesures bornées tout au plus...) mais sont en fait des éléments de L^1. Mieux : des éléments de H^1_{pr} . Autrement dit, en omettant désormais l'indice $_{pr}$ ou $_R$: <u>les</u> R^i_j <u>opèrent dans</u> H^1 .

Nous indexerons les couples (i,j), i<j , par un indice unique α

variant de 1 à $\frac{n(n-1)}{2}$, nous poserons $T^i_j = T^\alpha$, et pour $f \in L^1_0$ (i.e. d'intégrale nulle) nous désignerons par $f^\alpha(x,t)$ la fonction $R^i_j Q_t f(x)$ définie sur $E\times]0,\infty[$, par M^α_t la " martingale " $f^\alpha(Z_t)$ définie pour $t<T_0$ (en réalité, ce sont les processus $M^\alpha_{t\wedge T_c}$, $c>0$, qui sont des martingales, mais nous ne voulons pas alourdir le langage). Nous poserons d'autre part, pour $\alpha=0$

$$T^0 = -C \ , \ f^0(x,t)=Q_t f(x) \ , \ M^0_t = f^0(Z_t) \text{ pour } t<T_0$$

Nous désignons par $F(x,t)$ la fonction $(f^\alpha)_{\alpha=0,..,n(n-1)/2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d=1+\frac{n(n-1)}{2}$. Nous avons alors le <u>lemme de sous-harmonicité</u> suivant, qui imite le lemme de Sém. Prob. XI, p.155 (lui même tiré des travaux de Stein) :

LEMME 3. <u>Soit</u> N_t <u>la martingale vectorielle</u> $F(Z_t)$, <u>définie pour</u> $t<T_0$ <u>et à valeurs dans</u> $\mathbb{R}^d$. <u>Il existe un exposant</u> $q<1$ (dépendant de n) <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>le processus</u> $(\varepsilon+|N_t|^2)^{q/2}$ <u>soit une sousmartingale sur</u> $[0,T_0[$ (i.e. devienne une sousmartingale ordinaire après arrêt à T_c , $c>0$).

Pour établir ce résultat, nous utiliserons un lemme algébrique :

LEMME 4. <u>Pour toute fonction</u> h <u>sur</u> S^{n-1} (assez régulière) <u>on a</u>

$$\Sigma_\gamma \ (T^\alpha T^\gamma h)(T^\gamma h) = \Sigma_\gamma \ (T^\gamma T^\alpha h)(T^\gamma h)$$

DEMONSTRATION. Les opérateurs T^i_j commutent au laplacien, donc à $-C=T^0$. La relation est donc évidente pour $\alpha=0$. Supposons donc α de la forme (i,j), $i<j$. Les opérateurs T^γ , $\gamma=0$ ou bien $\gamma=(k,\ell)$, $k\neq i,j$, $\ell\neq i,j$, commutent à T^i_j . Il reste donc à vérifier que

$$\sum_{\substack{k=i\\ \ell>i}} [T^i_j,T^k_\ell](h)T^k_\ell(h) + \sum_{\substack{\ell=i\\ k<i}} \cdots + \sum_{\substack{k=j\\ \ell>j}} \cdots + \sum_{\substack{\ell=j\\ k<j}} \cdots = 0$$

Compte tenu des relations $T^a_b=-T^b_a$, $[T^a_b,T^b_c]=T^a_c$ (cf. (3.11)), on voit facilement que la somme des deux premiers Σ vaut $\Sigma_m \ T^i_m(h)T^m_j(h)$, et la somme des deux derniers Σ en est l'opposée.

Nous utiliserons ce lemme sous la forme suivante : fixons t , et soit X le vecteur de coordonnées $f^\gamma_t(x)= f^\gamma(x,t)$. Soit U la matrice carrée de coefficients $U^\alpha_\gamma = T^\gamma f^\alpha_t(x)$ [$f^\alpha_t = R^\alpha Q_t f$; $Q_{t/2}$ applique L^1 dans L^2_0, puis $Q_{t/2}$ applique L^2_0 dans le domaine de tous les opérateurs A,T^γ... - en fait, dans C^∞] . On a

(6.1) $\qquad UX = ({}^tU)X$ où ${}^tU$ est la transposée de U .

En effet , $U^\alpha_\gamma = T^\gamma T^\alpha h$ avec $h=VQ_tf$, et $X^\gamma= T^\gamma h$, donc on retombe sur le lemme 4.

Soit V la matrice symétrisée de U : $V= \frac{1}{2}(U+{}^tU)$, de sorte que

$VX=UX$. Remarquons que U est une matrice de trace nulle (d'après (3.7), cela exprime la relation $(D^2_{\rightarrow}+A^{\dagger})f(x,t)=0$), donc V aussi . Recopions dans le séminaire XI, p.155, le petit résultat suivant : si V est une matrice (d,d), symétrique et de trace nulle, de valeurs propres λ_i , on a

$$\sup_i (\lambda_i^2) \leqq \frac{d}{1+d} \Sigma_i \lambda_i^2$$

ou encore : la norme $\|V\|$ de V en tant qu'opérateur de $\mathbb{R}^d$ (hilbertien) dans lui même et la norme de Hilbert-Schmidt $[\![V]\!]$ sont reliées par

$$(6.2) \qquad \|V\| \leqq \mu[\![V]\!] \quad , \quad \mu=\sqrt{d/d+1} < 1$$

et comme $V=\frac{1}{2}(U+{}^tU)$, on a $[\![V]\!]\leqq[\![U]\!]$.

DEMONSTRATION DU LEMME 3 . Nous calculons le processus à variation finie A_t dans la décomposition de $(\varepsilon+|N_t|^2)^{q/2}$ en appliquant la formule d'Ito à la fonction $\varphi(x) = (\varepsilon+|x|^2)^{q/2}$ sur $\mathbb{R}^d$. On veut montrer

$$dA_t = \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}\varphi(N_t)d\langle M^\alpha,M^\beta\rangle_t \geqq 0$$

Le calcul de $D_{\alpha\beta}\varphi(x)$ nous donne

$$H(x)[(q-2)x^\alpha x^\beta+(\varepsilon+|x|^2)\delta^{\alpha\beta}] \quad \text{avec} \quad H(x)\geq 0$$

D'autre part, le calcul de $d\langle M^\alpha,M^\beta\rangle$ nous est donné par l'opérateur carré du champ sur $E\times\mathbb{R}_+$, c'est à dire $2\Sigma_\gamma T^\gamma f^\alpha(Z_t)T^\gamma f^\beta(Z_t)dt$. Remarquons que le coefficient de ε est toujours positif, et nous laissons ce terme de côté. Il nous reste donc à montrer que l'expression

$$(q-2)\Sigma_{\alpha\beta\gamma} f^\alpha f^\beta T^\gamma f^\alpha T^\gamma f^\beta + |F|^2\Sigma_{\alpha\beta\gamma} \delta^{\alpha\beta}T^\gamma f^\alpha T^\gamma f^\beta$$

(rappelons que F est le vecteur des (f^α) est positive pour $q<1$ assez proche de 1. Utilisant les notations X,U introduites plus haut, cela vaut

$$(q-2)|UX|^2 + |X|^2[\![U]\!]^2$$

Comme $q-2<0$, nous obtenons une quantité plus petite en remplaçant $|UX|^2 = |VX|^2$ par la quantité plus grande $|X|^2\|V\|^2$, puis par $|X|^2\mu^2[\![U]\!]^2$, et il nous reste alors comme minorant $((q-2)\mu^2+1)|X|^2[\![U]\!]^2$, positif si

$$(q-2)\frac{d}{d+1} + 1 > 0 \ , \ \text{ou} \quad q>1-\frac{1}{d} \ .$$

Le lemme est établi. Nous arrivons aux résultats essentiels .

THEOREME 1. <u>Soit</u> $f\in H^1_{Riesz}$. <u>Alors on a</u> $f\in H^1_{pr}$; <u>de plus</u>, <u>les fonctions</u> $R^i_jQ_tf$ <u>convergent dans</u> L^1, <u>lorsque</u> $t\to 0$, <u>vers des fonctions que l'on notera</u> R^i_jf (<u>et qui coïncident en effet avec</u> R^i_jf <u>pour</u> $f\in L^2$).

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer f d'intégrale nulle. Soit q l'exposant du lemme 3, et soit $p=1/q>1$. Appliquant l'inégalité de Doob aux sousmartingales positives $(\varepsilon+|N_{t\wedge T_c}|^2)^{q/2}$ avec la loi initiale μ_a , on voit que

$$\sup_a E_a[\ \sup_{t\leqq T_c} f^{\alpha}(Z_t)] \leqq \mathrm{Cte}.\|f\|_{H^1_R}$$

Pour $\alpha=0$, cela montre que $f\in H^1_{pr}$, avec norme majorée par Cte.$\|f\|_{H^1_R}$.
Pour $\alpha=(i,j)$, laissant a fixe, on voit que les v.a. $f^{\alpha}(Y_{T_c},c)$ forment une martingale dont la v.a. maximale est dans L^1, donc qui converge dans $L^1(c\to 0)$. Les espérances conditionnelles de ces v.a. par rapport à Y_{T_0} convergent donc dans L^1. Autrement dit $Q_cR^i_jQ_cf = R^i_jQ_{2c}f$ converge dans L^1 . Soit $h_t = R^i_jQ_tf$, $h = \lim_{t\to 0} h_t$; la relation $h_{t+s}=Q_sh_t$ nous donne $h_s=Q_sh$ lorsque $t\to 0$, donc f^{α} est le prolongement harmonique de la fonction h , et la martingale M^{α} (dont le sup est intégrable) coïncide avec $M(h)$. Donc h appartient à H^1_{pr} par définition de cet espace. Posant $h=R^i_jf$, on a

$$(6.3)\qquad h_t=R^i_jQ_tf = Q_tR^i_jf \quad , \quad \|R^i_jf\|_{H^1_{pr}} \leqq c\|f\|_{H^1_R}$$

THEOREME 2. <u>Les espaces</u> H^1_{pr} , $H^{1\to}_{pr}$, H^1_R <u>sont identiques</u> (avec des normes équivalentes : nous les désignerons tous trois par H^1 s'il est inutile de préciser la norme).

<u>Les opérateurs</u> R^i_j <u>sont bornés de</u> H^1 <u>dans lui-même</u>, <u>et commutent aux</u> Q_t .

<u>Si</u> f <u>appartient à</u> H^1, <u>on a</u> $\lim_{t\to 0} Q_tf=f$ <u>en norme</u>.

<u>L'espace</u> $\mathcal{P}$ <u>des polynômes est dense dans</u> H^1.

DEMONSTRATION. L'identité des trois espaces et l'équivalence de leurs normes résulte de la première étape (§ V) et du théorème 1, comme on l'a dit au début de ce paragraphe. La seconde affirmation résulte de (6.3), compte tenu de l'identité de H^1_{pr} et H^1_R . La troisième se voit mieux sous la forme de Riesz : cela revient à dire que

$$\|Q_tf-f\|_1 + \Sigma_{i<j} \|R^i_j(Q_tf-f)\|_1 \to 0$$

qui est évident. Enfin, pour la dernière, il suffit de remarquer que tous les Q_tf ($f\in L^1$) appartiennent à L^2, donc L^2 est dense dans H^1, et $\mathcal{P}$ est dense dans L^2 pour une norme plus forte que celle de H^1.

VII. DETERMINATION DU DUAL DE H^1

La démonstration du théorème suivant en dit un peu plus que l'énoncé : elle explique par exemple comment les espaces BMO sont mis en dualité avec les espaces H^1 correspondants. Mais il est inutile de détailler : la situation est tout à fait semblable à celle de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

THEOREME 3. <u>Les espaces</u> BMO_{pr}, $BMO_{pr}^{\rightarrow}$, BMO_R <u>sont identiques</u> (avec des normes équivalentes, et on les désignera simplement par BMO s'il est inutile de préciser la norme utilisée), <u>et</u> BMO <u>s'identifie au dual de</u> H^1 . <u>Les transformations de Riesz</u> R_j^i <u>définissent des opérateurs bornés sur</u> BMO.

DEMONSTRATION. 1.Comme L^2 est dense dans H^1 avec une norme plus forte, toute forme linéaire continue λ sur H^1 est le prolongement à H^1 d'une forme linéaire $f \mapsto \langle f,g \rangle$, $f \in L^2$, $g \in L^2$, la fonction g étant uniquement déterminée. Déterminer le dual de H^1 revient à trouver les conditions sur g assurant que cette forme sur L^2 est continue pour l'une des normes $\|f\|_{pr}^1$, $\|f\|_{pr}^{1\rightarrow}$, $\|f\|_R^1$.

Le cas le plus simple est celui de $\|f\|_R^1$. Il s'agit d'écrire que pour $f \in L^2$

$$\lambda(f) \leqq c(\|f\|_{L^1} + \Sigma_{i<j} \|R_j^i f\|_{L^1})$$

et un raisonnement simple au moyen du théorème de Hahn-Banach montre qu'alors on peut écrire (les signes - sont là pour la commodité)

$$\lambda(f) = < f,u >_\mu - \Sigma_{i<j} < R_j^i f, u_j^i >_\mu \quad u,u_j^i \in L^\infty$$

d'où en faisant passer les R_j^i de l'autre côté

$$g = u + \Sigma_{i<j} R_j^i u_j^i \tag{7.1}$$

donc $g \in BMO_R$, et inversement si $g \in BMO_R$, il est évident que $f \mapsto \langle f,g \rangle_\mu$ est continue pour la norme de H_R^1 .

2. Montrons que $BMO_R \subset BMO_{pr}^{\rightarrow}$. Tout d'abord, $u \in L^\infty$ appartient non seulement à $BMO_{pr}^{\rightarrow}$, mais à BMO_{pr} . Il reste donc à montrer que si $u \in L^\infty$, $R_j^i u$ appartient à $BMO_{pr}^{\rightarrow}$. Or on a ($\hat{V}u$ désignant $V(u-\mu(u))$)

$$D_{\rightarrow} Q_t R_j^i u = C T_j^i \hat{V} Q_t u = -T_j^i Q_t u$$

donc

$$< M^{\rightarrow}(R_j^i u), M^{\rightarrow}(R_j^i u) > \leqq < M(u),M(u) >$$

d'après (2.5) qui donne le côté gauche, (2.8) qui donne le côté droit, et le fait que $2(T_j^i Q_t u)^2$ est une partie de l'opérateur carré du champ $\Gamma^{\dagger}(Q_t u, Q_t u)$. Comme $M(u)$ appartient à $BMO(P_a)$ avec une norme bornée en a, il en est de même de $M^{\rightarrow}(R_j^i u)$.

Mais inversement, si $g \in BMO_{pr}^{\rightarrow}$, la forme linéaire $f \mapsto \langle f,g \rangle$ sur L_0^2 est continue pour la norme $\|f\|_{pr}^{1\rightarrow}$ (lemme 2), et l'extension à L^2 par addition des constantes est évidentes. Il en résulte qu'en fait les espaces BMO_R et $BMO_{pr}^{\rightarrow}$ sont identiques, et leurs normes équivalentes.

3. Puisque les R_j^i opèrent dans H^1, leurs transposées opèrent dans le dual BMO_R ou $BMO_{pr}^{\rightarrow}$. Mais ces transposées sont les $-R_j^i$. Donc les R_j^i préservent ces espaces BMO.

Il est alors facile de montrer que $BMO_{pr}^{\rightarrow} \subset BMO_{\overrightarrow{pr}}$ (l'inclusion inverse étant d'ailleurs évidente). En effet si $u \in BMO_{pr}^{\rightarrow}$

$$T_j^i Q_t u = D_{\rightarrow} Q_t (R_j^i u)$$

en élevant au carré et sommant sur (i,j), il vient

$$< M(u),M(u) > \leqq < M^{\rightarrow}(u),M^{\rightarrow}(u) > + \Sigma_{i<j} < M^{\rightarrow}(R_j^i u),M^{\rightarrow}(R_j^i u) >$$

et comme u et tous les $R_j^i u$ appartiennent à $BMO_{pr}^{\rightarrow}$, la démonstration est achevée.

VIII. EXTENSION AUX GROUPES DE LIE COMPACTS

Comme on a pu le constater, tous les raisonnements ci-dessus reposent sur trois propriétés :

- La représentation de l'opérateur carré du champ comme somme de carrés d'opérateurs linéaires T_i commutant avec le semi-groupe.
- Le lemme de sous-harmonicité (lemme 3), reposant lui-même sur le lemme 4.
- Les propriétés fortement régularisantes des noyaux Q_t .

Ces trois propriétés se retrouvent dans le cas du semi-groupe du mouvement brownien sur un groupe de Lie compact, comme nous l'avons découvert dans l'article [CW2] (1972) après avoir fait " à la main" tout le travail précédent. Nous renverrons à cet article le lecteur intéressé, en soulignant qu'il donne son véritable sens au lemme 4 (qui perd son caractère mystérieux, pour devenir essentiellement le fait que les T^α forment une base orthonormale de l'algèbre de Lie pour le produit scalaire naturel de celle-ci). Mais nous voulons faire quelques remarques sur les rapports entre [CW2] et notre travail.

Coifman et Weiss mentionnent très rapidement le fait que l'inégalité de sous-harmonicité permet de faire sur les espaces H^p ($0<p<\infty$) " tout" ce que l'on sait faire dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Mais l'article est de 1972, et la référence fondamentale Fefferman-Stein (1972) n'y est pas mentionnée, ni la dualité H^1-BMO, ni l'identité des espaces H^1 analytique et probabiliste (Burkholder-Gundy-Silverstein 1971), ni le fait que les transformations de Riesz opèrent dans H^1. Notre travail achève donc celui de Coifman-Weiss sur ces divers points.

Nous voudrions encore mentionner l'existence d'un article de Ricci-Weiss [RC] (1979), qui concerne $H^1(S^{n-1})$, mais il s'agit de l'espace H^1 de la sphère considérée comme frontière de la boule unité, et non pas en elle même. C'est pourquoi leur système de transformées de Riesz est différent, et ne comporte que n fonctions. Il s'avère au bout du compte que les espaces H^1 sont cependant les mêmes, avec des normes équivalentes.

IX. L'ESPACE H^1 ATOMIQUE ET SON DUAL

Dans ce long paragraphe, qui ne contient plus de probabilités, nous allons montrer que l'espace H^1_R (resp. son dual BMO_R) coïncide avec l'espace H^1 atomique (resp. BMO classique) au sens de Coifman et Weiss [CW3]. Pour distinguer ces espaces des espaces que nous avons introduits plus haut, nous les noterons H^1_a , BMO_a (en revanche, nous désignerons par H^1, BMO sans indice les espaces relatifs aux transformées de Riesz).

Si x,y sont deux points de la sphere, $d(x,y)$ désigne leur distance euclidienne $|x-y|$, $B_r(x)$ la boule de centre x et de rayon r . Nous nous permettrons de noter $|B_r(x)|$ également la mesure $\mu(B_r(x))$, ce qui ne créera pas de confusion avec la norme des vecteurs... r ne variera qu'entre 0 et 2, et le rapport $|B_r(x)|/r^{n-1}$ est borné dans les deux sens. La sphère possède la propriété fondamentale des <u>espaces de type homogène</u> au sens de [CW1], [CW3], c'est à dire la relation $|B_{2r}(x)| \leqq c|B_r(x)|$ pour tout x et tout r .

Comme sur tout espace de type homogène, on appelle <u>atome</u> ($(1,\infty)$-atome s'il faut être précis) un élément a de L^∞ qui est, soit la fonction 1 , soit une fonction d'intégrale nulle, à support dans une boule B et majorée en valeur absolue par $1/|B|$. On a toujours $\|a\|_1 \leqq 1$.

Une fonction f <u>appartient à</u> H^1_a si elle admet une décomposition

$$f = \Sigma_1^\infty \lambda_i a_i \tag{9.1}$$

où les a_i sont des atomes et $\Sigma_i |\lambda_i| < +\infty$. La borne inférieure de $\Sigma_i |\lambda_i|$ sur toutes les décompositions possibles est notée $\|f\|_{H^1_a}$. On a $\|f\|_1 \leqq \|f\|_{H^1_a} \leqq c_p\|f\|_p$ $(p>1)$. On obtient ainsi un espace de Banach : <u>l'espace H^1 atomique</u> .

Une fonction $g \in L^1$ appartient à BMO_a s'il existe une constante α telle que l'on ait, pour toute boule B

$$\frac{1}{|B|}\int |g-g_B|d\mu \leqq \alpha \qquad \text{avec } g_B = \frac{1}{|B|}\int_B g d\mu . \tag{9.2}$$

Si α_0 désigne la plus petite constante possible, on pose $\|g\|_{BMO_a} = |\int g| + \alpha_0$. Dire que $g \in BMO_a$ revient à dire que $|\int agd\mu|$ est borné lorsque a parcourt l'ensemble des atomes. On a $c_p\|g\|_p \leqq \|g\|_{BMO_a} \leqq \|g\|_\infty$.

On peut mettre H^1_a et BMO_a en dualité par la forme bilinéaire

$$\{f,g\} = \Sigma_i \lambda_i \int a_i g d\mu \quad \text{si } f = \Sigma_i \lambda_i a_i \ (9.1) . \tag{9.3}$$

qui se réduit à $\langle f,g\rangle = \int fgd\mu$ si $f \in L^p$ $(p>1)$ ou $g \in L^\infty$. On peut montrer que cette dualité <u>fait de BMO_a le dual de</u> H^1_a . Nous aurons besoin du résultat suivant emprunté à [CW3]

(9.4) $\qquad \|f\|_{H^1_a} \leqq c \sup_{\|g\|_{BMO_a} \leqq 1\ ,\ g\in L^\infty} < f,g >$

De plus nous utiliserons le lemme suivant de [CW3]

LEMME 5. <u>Soit</u> K <u>un opérateur borné sur</u> L^2, <u>de la forme</u>

$$Kf(x) = \int k(x,y)f(y)d\mu(y) \ .$$

<u>Si l'on a pour tout couple</u> (y,y')

(9.5) $\qquad \int_{|x-y'|\geqq 2|y-y'|} |k(x,y)-k(x,y')|d\mu(x) \leqq B$,

<u>alors</u> K <u>est borné de</u> H^1_a <u>dans</u> L^1 , <u>avec une norme que l'on peut majorer en fonction de la norme de</u> K <u>dans</u> L^2 , <u>et de</u> B .

Pour établir l'identité des deux espaces H^1 et H^1_a , nous allons établir successivement

<u>première étape</u>. $\|f\|_{H^1} \leqq c\|f\|_{H^1_a}$. Pour cela, nous appliquerons le lemme 5, la difficulté consistant à vérifier (9.5) pour un noyau qui n'est pas explicitement calculable.

<u>seconde étape</u>. Si $g\in L^\infty$, $\|g\|_{BMO} \leqq c\|g\|_{BMO_a}$.

On en déduira la propriété désirée en utilisant (9.4). Cette seconde étape utilisera l'équivalence entre deux définitions de BMO obtenue dans la première partie de l'exposé : nous démontrerons en fait que

(9.6) $\qquad Q_t(|g-Q_tg|) \leqq c\|g\|_{BMO_a}$ pour tout t (cf. (4.3)) .

<u>Première étape</u> . Nous voulons démontrer que les transformations de Riesz $R^i_j = T^i_jV$ sont bornées de H^1_a dans L^1 , V étant l'opérateur de multiplicateur $1/\sqrt{k(k+\chi)}$ pour $k>0$. Nous allons introduire les " pseudo transformées de Riesz " $\bar{R}^i_j=T^i_jU$, où U est l'opérateur plus simple de multiplicateur $1/k$ pour $k>0$, 0 pour $k=0$. <u>Il suffit de démontrer que</u> $\bar{R}^i_j$ applique H^1_a dans L^1 . En effet, on a $R^i_j = W\bar{R}^i_j$, où W est l'opérateur de multiplicateur $(k/k+\chi)^{1/2}$, et tout revient à montrer que W est borné de L^1 dans L^1 . Soit Q'_t le noyau (3.13), de multiplicateur $e^{-\kappa t}$. Il est classique (voir par ex. Sém. Prob. XVI, LN n°920, p. 144) qu'il existe une mesure bornée ν telle que $\int e^{-kt}d\nu(t) = (k/k+\chi)^{1/2}$; donc on a $W = \int Q'_t d\nu(t)$, qui est borné sur L^1.

Remarquons aussi que l'opérateur de multiplicateur $((k+\chi)/k)^{1/2}$ pour $k>0$, 0 pour $k=0$, est borné sur L^2. Nous pouvons alors déduire du fait que R^i_j est borné sur L^2 la même propriété pour $\bar{R}^i_j$

En fait, nous n'allons pas travailler sur $\bar{R}^i_j$, qui n'est pas un opérateur intégral, mais sur $Q'_t\bar{R}^i_j=\bar{R}^i_jQ'_t$, ou (autre notation pour le même opérateur : (3.14)) $\Pi_r\bar{R}^i_j = K_r$, avec $0<r<1$. La norme de cet opérateur dans L^2 est bornée uniformément en r , nous allons vérifier que (9.5) est satisfaite uniformément en $r \geqq 1/2$.

Nous avons sur les fonctions d'intégrale nulle $U=\int_0^{\infty} Q_t' dt = \int_0^1 \Pi_u \frac{du}{u}$, puis $\Pi_r U = \int_0^r \Pi_u \frac{du}{u}$, et comme le noyau de Π_u est égal à $\frac{1-u^2}{(1-2ux.y+u^2)^{n/2}}$, il est facile de voir que

$$k_r(x,y) = (x_i y_j - x_j y_i) \int_0^r \frac{(1-u^2)du}{(1-2ux.y+u^2)^{n/2+1}}$$

Alors (9.5) sera une conséquence immédiate du lemme suivant : si $r \geqq 1/2$

LEMME 6. $|k_r(x,y)-k_r(x,y')| \leqq c\left(\frac{|y-y'|}{|x-y'|^{n+1}}\right)$ <u>si</u> $|x-y| > 2|y-y'|$.

<u>Démonstration</u> . Nous avons $|k_{1/2}(x,y)-k_{1/2}(x,y')| \leqq c$. Donc nous pouvons remplacer l'intégrale de 0 à r par une intégrale de $1/2$ à r . Désignons par $j_u(x.y)$ le noyau sous le signe $\int^r$. Nous séparons en deux

$$[x_i(y_j-y_j')-x_j(y_i-y_i')] \int_{1/2}^r j_u(x.y)du$$

$$[x_i y_j' - x_j y_i'] \int_{1/2}^r [j_u(x.y)-j_u(x.y')]du$$

Dans le premier terme, le crochet $[\ldots]$ est majoré en valeur absolue par $2|y-y'| \leqq |x-y'|$. Dans l'intégrale, nous posons $v=1-x.y=|x-y|^2/2$

Alors $$(1-u^2)\, j_u^{-1}(x.y) = v^{n/2+1}\left[2u+\frac{(1-u)^2}{v}\right]^{n/2+1} \geqq v^{n/2+1}\left[1+\frac{(1-u)^2}{v}\right]^{n/2+1}$$

et donc l'intégrale est majorée par

$$c|x-y|^{-n-2} \int_{1/2}^r \frac{(1-u)du}{\left[1+\frac{(1-u)^2}{v}\right]^{n/2+1}}$$

dette dernière intégrale est majorée par cv, il reste donc une majoration par $c|y-y'|/|x-y|^n \leqq c'|y-y'|/|x-y'|^n$ puisque $|x-y| \geqq \frac{1}{2}|x-y'|$.

Dans le second terme, on remarque que $1-x.y \geqq \frac{1}{4}(1-x.y')$ et, si t est compris entre $x.y$ et $x.y'$

$$|j_u'(t)| \leqq \frac{c(1-u)}{[(1-u)^2+\frac{u}{2}(1-x.y')]^{n/2+2}} \leqq \frac{c(1-u)}{[(1-u)^2+\frac{1}{4}(1-x.y')]^{n/2+2}}$$

On majore alors $\int_{1/2}^r |j_u(x.y)-j_u(x.y')|du$ par $c|x.y-x.y'|/|x-y'|^{n+2}$.

Il reste à majorer $|x.(y-y')|$ par $c|x-y'||y-y'|$, en écrivant

$$|x.(y-y')| \leqq |(x-y).(y-y')| + 1-y.y' \leqq |y-y'|\left[|x-y|+\frac{1}{2}|y-y'|\right]$$
$$\leqq |y-y'||x-y'|\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right) .$$

Cela achève la démonstration du lemme, et celle de la première étape. En fait, le lemme 5 ne nous a pas beaucoup aidé : on aurait pu travailler directement sur les atomes, sans plus de difficulté.

Seconde étape. Comme précédemment, nous allons utiliser le semi-groupe de Poisson comme intermédiaire, en démontrant :

LEMME 7. On a $\Pi_r(|g-\Pi_r g|) \leqq c\|g\|_{BMO_a}$.

Démonstration. Soit $p_r(x,y)$ le noyau de Poisson, qui s'écrit en posant $|x-y|=\rho$

$$(9.7) \qquad \frac{1-r^2}{(1-2rx.y+y^2)^{n/2}} = \frac{1-r^2}{[(1-r)^2+r\rho^2]^{n/2}} = \overline{p}_r(\rho)$$

Nous laissons x fixé dans la suite de la démonstration. D'après l'inégalité bien connue des probabilistes, où a est une constante

$$E[|X-E[X]|] \leqq E[|X-a|+|E[X]-a|] \leqq 2E[|X-a|]$$

Il nous suffit de trouver pour tout x une constante $a(x)$ telle que

$$\Pi_r(x, |g-a(x)|) \leqq c\|g\|_{BMO_a}$$

Si $r\leqq 1/2$ nous prendrons $a(x)=\int g d\mu$; alors comme $p_r(x,y)\leqq 2^n$, cette expression est majorée par $2^n\int|g-\int g| \leqq 2^n\|g\|_{BMO_a}$. Si $r\geqq 1/2$, posons

$$g_u(x) = \frac{1}{|B_u(x)|}\int_{B_u(x)} g d\mu \quad .$$

Nous prendrons $a(x)=g_{1-r}(x)$. Autrement dit, laissant maintenant x fixé et écrivant g_u pour $g_u(x)$, nous allons montrer

$$(9.8) \qquad \int p_r(x,y)|g(y)-g_u|d\mu(y) \leqq c\|g\|_{BMO_a} . \qquad (u=1-r)$$

Remarquons que, si $u<u'$, toujours au point x fixé

$$|g_u-g_{u'}| \leqq \frac{1}{|B_u|}\int_{B_u} |g-g_{u'}|d\mu \leqq \frac{|B_{u'}|}{|B_u|}\frac{1}{|B_{u'}|}\int_{B_{u'}} |g-g_{u'}|d\mu$$

$$\leqq \frac{|B_{u'}|}{|B_u|}\|g\|_{BMO_a} \leqq c(\frac{u'}{u})^{n-1}\|g\|_{BMO_a}$$

Cette inégalité entraîne (avec une autre constante c)

$$(9.9) \qquad |g_u-g_{u'}| \leqq c[1+\log\frac{u'}{u}]\|g\|_{BMO_a}$$

En effet, soit k l'entier tel que $u\in[2^{-k-1}u', 2^{-k}u]$; si l'on pose $u'_0=u'$, $u'_1=u'2^{-1}$, $\ldots u'_k=u'2^{-k}$, on a $u\geqq u'_k/2$, donc

$$|g_u-g_{u'_k}| \leqq c2^{n-1}\|g\| , \ |g_{u'_k}-g_{u'_{k-1}}| \leqq c2^{n-1}\|g\| , \text{ etc}$$

d'où en sommant $|g_u-g_{u'}| \leqq c2^{n-1}(1+k)\|g\|$, qui est bien de la forme désirée.

Posons ensuite ($F(2)$ est le côté gauche de (9.8))

$$F(\rho) = \int_{B_\rho(x)} p_r(x,y)|g(y)-g_{1-r}| d\mu(y)$$

et soit $\qquad G(\rho) = \int_{B_\rho(x)} |g(y)-g_{1-r}|d\mu(y) \quad .$

comme $p_r(x,y) = \overline{p}_r(|x-y|)$, on a $dF(\rho)=\overline{p}_r(\rho)dG(\rho)$ et on intègre par parties

$$F(2) = \bar{p}_r(2)G(2) - \int_0^2 G(\rho)d\bar{p}_r(\rho) \quad .$$

Le premier terme est facile à étudier : $\bar{p}_r(2) = (1-r^2)/(1+r)^n$ est borné, et $G(2) \leqq |g_2-g_{1-r}| + \int|g-g_2|d\mu$, avec $g_2=\int g$. D'après (9.9) cela est majoré par $\|g\|_{BMO_a}$ $(c+c\log\frac{2}{1-r}+1)$.

Pour traiter le second, nous écrivons de même

$$\frac{1}{|B_\rho|}G(\rho) \leqq \frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho}(|g-g_\rho|+|g_\rho-g_{1-r}|)d\mu \leqq \|g\|(c+c|\log\frac{\rho}{1-r}|+1)$$

et il reste seulement à démontrer que l'intégrale

$$\int_0^2 |B_\rho|(|\log\frac{\rho}{1-r}|+1)d\bar{p}_r(\rho)$$

est bornée par une quantité indépendante de r . On majore $|B_\rho|$ par $c\rho^{n-1}$, $|d\bar{p}_r(\rho)|$ par $c\rho d\rho/\ (1-r)^{n+1}[2+(\frac{\rho}{1-r})^2]^{n/2\ +1}$, et on fait le changement de variable $v=\rho/1-r$ qui amène à l'intégrale

$$\int_0^{2/1-r} v^n(1+|\log v|)dv\ /\ (1+v^2)^{n/2+1}$$

convergente lorsque $r \to 1$.

<u>Seconde étape (suite)</u> . Ayant écrit le lemme 7 pour Π_r , nous pouvons l'écrire pour Q'_t , et il nous faut passer de Q'_t à Q_t . Nous laissons toujours x fixé, et désignons par $a_t(y)$, $a'_t(y)$ les densités des mesures $Q_t(x,dy)$, $Q'_t(x,dy)$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 8 . 1) <u>Si</u> $p\leqq \frac{n-1}{n-2}$, <u>on a</u> $\|a_t\|_{L^p} \leqq c/t$ <u>et</u> $\|a_t-a'_t\|_{L^p} \leqq c$.
2) <u>On a</u> $\|a_t-a'_t\|_1 \leqq ct$.

<u>Démonstration</u>. Nous allons développer a_t et a'_t en harmoniques sphériques. Connaissant les multiplicateurs des opérateurs Q_t, Q'_t , on a

$$a_t(y) = 1+\Sigma_{k\geqq1}\ e^{-t\sqrt{k(k+\chi)}}Z_k^x(y)$$
$$a'_t(y) = 1+\Sigma_{k\geqq1}\ e^{-kt}Z_k^x(y)$$

où Z_k^x est le polynôme zonal d'ordre k et de pôle x , c'est à dire

$$Z_k^x(y) = \frac{n+2(k-1)}{n-2}P_k(x.y)$$

$P_k(t)$ étant le k-ième coefficient de Taylor en 0 de $[1-2zt+z^2]^{-(n-2)/2}$.
Nous utilisons alors la propriété ([CW1], p. 147)

$$\|Z_k^x\|_2^2 = \frac{(k+n-3)!(2k+n-2)!}{k!(n-2)!} \leqq ck^{n-2} \quad (k\geqq1)$$

On en déduit que

$$\|a_t\|_2^2 \leqq c/(1-e^{-2t})^{n-1} \leqq c\ /\ t^{n-1}$$

Utilisant les propriétés de convexité de $\|\ \|_p$, entre les exposants 1 et 2, on obtient

$$\|a_t\|_p \leqq c/t^{(n-1)(1-1/p)} \leqq c/t \quad \text{si} \quad p \leqq \frac{n-1}{n-2} .$$

Le même calcul montre que

(9.10) $$\|a_t - a_t^!\|_2 \leqq c/t^{(n-3)/2} .$$

Pour majorer $\|a_t - a_t^!\|_1$, il suffit de s'intéresser aux petites valeurs de t , $t \leqq 1$ par exemple. On écrit

$$e^{-t\sqrt{k(k+x)}} = e^{-t(n-2)/2} e^{-tk}[1+ \tfrac{1}{k}P_1(t)+\ldots+ \tfrac{1}{k^m} P_m(t)+ \tfrac{1}{k^{m+1}} A(k,t)]$$

$P_1, \ldots P_m$ étant des polynômes en t nuls en 0, avec

$$|A(k,t)| \leqq ct \quad \text{pour} \quad t \leqq 1,\ k \geqq 1 .$$

Considérons la fonction

$$a_{m,t}(y) = 1+e^{-t(n-2)/2} \Sigma_{k\geqq 1}\ e^{-tk}(1+\tfrac{1}{k}P_1(t)..+\tfrac{1}{k^m}P_m(t))Z_k^x(y)$$

Le même calcul que plus haut montre que pour m fixé $\geqq (n-2)/2$

$$\|a_{m,t} - a_t\|_2^2 \leqq ce^{-t(n-2)}t^2 \Sigma_{k\geqq 1}\ e^{-2kt}\|Z_k^x\|_2^2 k^{-2m-2} \leqq ct^2$$

et par conséquent $\|a_{m,t} - a_t\|_1 \leqq ct$. Pour obtenir le 2) de l'énoncé, il reste à montrer que $\|a_{m,t} - a_t^!\|_1 \leqq ct$. Pour cela, nous considérons à nouveau l'opérateur U de la première étape, de multiplicateur 1/k pour k>0. Il est borné sur L^1, puisqu'il est donné par le noyau $\int_0^1 (p_u(x.y)-1)\frac{du}{u}$, avec $|p_u - 1/u| \leqq c$ si $u \leqq 1/2$, $\leqq 2(p_u+1)$ si $u \geqq 1/2$.

On peut écrire

$$a_{m,t} = 1+e^{-t(n-2)/2}(a_t^! - 1) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) U^j a_t^!$$

et comme $|P_j(t)| \leqq ct$, $\|U^j a_t^!\|_1 \leqq c$ pour $1 \leqq j \leqq m$, on en déduit aussitôt que $\|a_{m,t} - a_t^!\|_1 \leqq ct$ pour $t \leqq 1$.

Ayant obtenu que $\|a_t - a_t^!\|_1 \leqq ct$, on obtient le second résultat de 1) par interpolation (convexité logarithmique) entre L^1 et L^2((9.10)).

Fin de la démonstration. L'intégrale $Q_t(|g - Q_t g|)$ de (9.6) s'écrit au point x $\int a_t |g - \langle g, a_t\rangle| d\mu$. Tout d'abord, si $t \geqq 1$ on a $a_t \leqq c$ et on majore cette intégrale par $2c\int |g - \int g| d\mu \leqq 2c\|g\|_{BMO_a}$. Nous supposons donc $t \leqq 1$, et nous écrivons

$$\int a_t |g - \langle g,a_t\rangle| \leqq \int a_t^! |g - \langle g,a_t^!\rangle| + \int |a_t - a_t^!|\,|g - \langle g,a_t^!\rangle| + |\langle g, a_t - a_t^!\rangle|$$

Le premier terme est majoré par $c\|g\|_{BMO_a}$ (lemme 7). Pour étudier les deux autres, choisissons p entre 1 et $(n-1)/n-2$, et désignons par q l'exposant conjugué de p. D'après le lemme 8 on a $\|a_t - a_t^!\|_p \leqq c$, et d'autre part $\|g\|_q \leqq c\|g\|_{BMO_a}$ d'après les propriétés rappelées en (9.2). Le dernier terme se majore donc par $c\|g\|_{BMO_a}$. Quant au terme central, nous le décomposons encore en

$$\int |a_t - a_t^!|\,|g - \int g|\,d\mu \quad + \quad |\int g - \langle g, a_t^! \rangle| \int |a_t - a_t^!|\,d\mu$$

Le premier terme se majore à nouveau par l'inégalité de Hölder . Dans le second, nous avons $\|a_t - a_t^!\|_1 \leqq ct$ (lemme 8), et il reste à démontrer que $|\int g - \langle g, a_t^! \rangle| \leqq c\|g\|_{BMO} / t$. Nous le majorons banalement par $\|g\|_1 + \|g\|_q \|a_t^!\|_p \leqq c\|g\|_{BMO_a}(1+\|a_t^!\|_p)$ et appliquons le lemme 8, 1) au dernier facteur.

La démonstration est achevée.

REMARQUES. Ce paragraphe est le plus pénible de l'exposé. Il est possible que nous ayons été maladroits ici ou là, mais il semble impossible pour l'instant de passer du point de vue des espaces de type homogène (boules et atomes) au point de vue des semi-groupes, par une méthode raisonnablement générale. Une condition telle que le lemme 5 est très difficile à vérifier en pratique.

Tout de même, les calculs que nous avons faits ont quelques sous-produits intéressants, tels que le suivant (les notations sont celles de la « première étape », après (9.6) .

LEMME 8. <u>La norme</u> H^1 <u>est équivalente à la norme</u>

$$\|f\|_1 + \sup_t \Sigma_{i,j} \|\bar{R}_j^i Q_t^! f\|_1 \quad , \quad \bar{R}_j^i = T_j^i U \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Nous avons déjà vérifié que cette norme est majorée par $c\|f\|_{H^1_a}$: c'est la « première étape » de la démonstration. Or nous savons que $H^1_a = H^1$.

En sens inverse, soit $f \in L^1$, et supposons que $\sup_t \|\bar{R}_j^i Q_t^! f\|_1 \leqq a < \infty$. Comme Q_ε est une contraction de L^1, nous avons aussi $\|Q_\varepsilon \bar{R}_j^i Q_t^! f\|_1 \leqq a$, et il n'est pas difficile de transformer cela en $\|Q_t^! \bar{R}_j^i Q_\varepsilon f\|_1 \leqq a$ ($Q_t^! f$ et $Q_\varepsilon f$ sont dans L^2, et alors tout commute) puis, en faisant tendre t vers 0, en $\|\bar{R}_j^i Q_\varepsilon f\|_1 \leqq a$. Appliquant alors l'opérateur W de L^1 dans L^1 , nous en déduisons $\|R_j^i Q_\varepsilon f\|_1 \leqq ca$, indépendamment de ε . Nous retombons donc sur la norme (4.6).

En principe, les opérateurs $\bar{R}_j^i$ sont plus abordables que les R_j^i...

REFERENCES.

[CW1] . R. Coifman et G. Weiss. Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Lecture Notes 242, Springer 1971.

[CW2]. ----- Invariant systems of conjugate harmonic functions associated with compact Lie groups. Studia Math. 44, 1972, p. 301-308 .

[CW3]. ----- Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull.A.M.S. 83, 1977, p. 569-645.

[M1]. P.A. Meyer. Le dual de $H^1(\mathbb{R}^\nu)$: démonstrations probabilistes. Sém. Prob. XI, Lecture Notes 581, Springer 1977.

[M2].----- Démonstrations probabilistes des inégalités de Littlewood-Paley. Sém. Prob. X, Lecture Notes 511, Springer 1976.

[M3].----- Transformations de Riesz pour les mesures gaussiennes. Ce volume (cf. aussi Sém. Prob. XVI).

[RW].Ricci (F.) et Weiss (G.). A characterization of $H^1(S^{n-1})$. Harmonic analysis on Eucl. spaces I. Proc. Symp. Pure M. 35-1, AMS 1979 .

[S1]. Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory. Ann. Math. Study 63, Princeton 1970.

[SW]. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton Math. Series 32, 1971.

I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67084-Strasbourg Cedex .

(Laboratoire associé au CNRS).