PAUL-ANDRÉ MEYER

Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 179-193

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__179_0>

Séminaire de Probabilités XVIII

TRANSFORMATIONS DE RIESZ POUR LES LOIS GAUSSIENNES

par P.A. Meyer

Cet exposé est la rédaction définitive des résultats sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck présentés dans le Séminaire XVI ([1]). Il reprend des notes diffusées au Séminaire P. Malliavin (E.N.S., printemps 1982). Par rapport au texte du Séminaire XVI, il y a de sérieux progrès mathématiques (addition des théorèmes 2 et 3) et une présentation bien moins obscure. Par rapport à l'exposé [2], paru dans les Proceedings du Congrès de Bangalore,- la nouveauté est l'équivalence dans le th. 2.

Le théorème 2 n'aurait jamais été établi sans l'insistance de P. Malliavin, que je tiens à remercier ici pour l'intérêt qu'il a porté à ces résultats.

I. INTRODUCTION ET ENONCÉ DES RESULTATS

1. LES TRANSFORMATIONS DE RIESZ CLASSIQUES

Jusqu'au n°3 , notre présentation reste formelle, et il est inutile de chercher à trop en préciser les détails.

Les transformations de Riesz sur $\mathbb{R}^n$ sont les opérateurs de convolution $\mathcal{R}_k$ ($1 \leq k \leq n$) définis par le procédé suivant

$$f(x) \underset{\text{Fourier}}{\longrightarrow} \hat{f}(u) \underset{\text{multiplicateur}}{\longrightarrow} \frac{iu_k}{|u|}\hat{f}(u) \underset{\text{Fourier}^{-1}}{\longrightarrow} \mathcal{R}_k f(x)$$

Le multiplicateur étant borné, ce sont des opérateurs bornés sur L^2. Le théorème fondamental de la << vieille >> théorie des intégrales singulières dit que

(1) $\qquad \mathcal{R}_k$ est borné de L^p dans L^p pour $1<p<\infty$.

Nous nous proposons d'abord d'exprimer cela en oubliant une grande partie de la structure. Voici un tableau d'opérateurs de convolution sur $\mathbb{R}^n$, et des multiplicateurs de Fourier correspondants

P_t	semi-groupe brownien (normalisation des analystes)	$e^{-t\|u\|^2}$
A	son générateur (le laplacien)	$-\|u\|^2$
Q_t	semi-groupe de Cauchy (ou noyau de Poisson du demi-espace)	$e^{-t\|u\|}$
C	générateur de Cauchy	$-\|u\|$

R	potentiel newtonien	$1/\lvert u\rvert^2$
V	potentiel de Cauchy	$1/\lvert u\rvert$
D_k	k-ième dérivée partielle	iu_k

L'opérateur de Riesz $\mathcal{R}_k$ s'interprète donc comme $D_k V$. Donc on peut exprimer (1) pour tous les k à la fois en l'écrivant

(2) $$\|\sqrt{\mathrm{grad}^2 Vf}\|_p \leqq c_p\|f\|_p \qquad 1<p<\infty$$

ou en remplaçant f par Cf

(2') $$\|\sqrt{\mathrm{grad}^2 f}\ \|_p \leqq c_p\|Cf\|_p \qquad 1<p<\infty \ .$$

2. PASSAGE AUX SEMI-GROUPES

Considérons un espace mesurable E, une mesure σ-finie ξ , un semi-groupe (P_t) de noyaux markoviens (sousmarkoviens ne suffirait pas ici) tel que $\xi P_t=\xi$; A et R s'interpréteront respectivement comme le générateur et le potentiel de (P_t) .

Il existe un procédé universel pour définir le semi-groupe de Cauchy associé à (P_t) :

$$Q_t = \int_0^\infty \mu_t(ds)P_s$$

où (μ_t) est le semi-groupe de convolution stable d'ordre 1/2 sur $\mathbb{R}_+$, caractérisé par $\int e^{-ps}\mu_t(ds) = e^{-t\sqrt{p}}$; C et V s'interprètent alors comme le générateur et le potentiel de (P_t).

Reste à interpréter $\mathrm{grad}^2 f$, ou plutôt l'opérateur bilinéaire $\mathrm{grad}f.\,\mathrm{grad}g$. Ce sera ici

$$\Gamma(f,g) = A(fg) - fAg - gAf \quad ,$$

lorsqu'il existe, i.e. lorsque le domaine de A contient une algèbre suffisamment riche. Le problème général des transformations de Riesz consiste à se demander si (sur un espace assez riche)

(3) $$\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p \leqq c_p\|Cf\|_p \quad , \ 1<p<\infty \quad .$$

Dans presque tous les cas (une exception notable : celle du processus de la chaleur) on suppose le semi-groupe (P_t) <u>symétrique</u> par rapport à la mesure ξ , ce qui permet de retrouver un peu de la structure décrite au n°1 . Considérons la représentation spectrale de P_t dans L^2

(4) $$P_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dE_\lambda$$

et soit $\varphi(\lambda)$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+$. Nous dirons que l'opérateur (non borné en général)

(5) $$T_\varphi = \int_0^\infty \varphi(\lambda)dE_\lambda$$

est associé au <u>multiplicateur spectral</u> φ . Nous pouvons faire un tableau de multiplicateurs spectraux utiles :

$$(5)\qquad \begin{array}{lll} P_t : e^{-t\lambda} & A : -\lambda & R : 1/\lambda\, I_{\{\lambda>0\}} \\ Q_t : e^{-t\sqrt{\lambda}} & C : -\sqrt{\lambda} & V : 1/\sqrt{\lambda}\, I_{\{\lambda>0\}} \end{array}$$

Pour ces deux derniers opérateurs, remarquer le facteur $I_{\{\lambda>0\}}$, qui évite une divergence triviale ; CV et AR ne sont pas égaux à -I, mais à E_0-I (formellement).

3. LE SEMI-GROUPE D'ORNSTEIN-UHLENBECK

Soit W un espace de Fréchet séparable muni d'une mesure gaussienne ξ, qui n'est portée par aucun sous-espace fermé $\neq$W . Alors la forme bilinéaire sur le dual W' de W

$$(6)\qquad q(\alpha,\beta) = \int_W \{x,\alpha\}\{x,\beta\}\xi(dx)$$

où $\{,\}$ met en dualité W et W', fait de W' un espace préhilbertien séparé, dont le complété sera noté H . L'injection W'$\rightarrowtail$H étant continue, on obtient par transposition une injection continue i : H$\rightarrowtail$W . Remarquer que $H\subset L^2(\xi)$ est séparable.

Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck de la mesure ξ est un semi-groupe de vrais noyaux markoviens sur W, défini par exemple au moyen de la formule de Mehler ([1], p.96, formule (8) ; la normalisation a été changée)

$$P_t f(x) = \int f(xe^{-t}+y\sqrt{1-e^{-2t}})\xi(dy)$$

Ce semi-groupe est symétrique par rapport à ξ . En fait, on ne se sert jamais de cette représentation, mais seulement des résultats suivants :

1) $L^2(\xi)$ est somme directe hilbertienne de sous-espaces C_n , appelés <u>chaos de Wiener</u> ; pour chaque t>0, C_n est le sous-espace propre de P_t correspondant à la valeur propre e^{-nt} . La représentation spectrale de (P_t) est donc purement discrète, et les << multiplicateurs spectraux >> sont simplement des suites $\varphi(n)$. Le chaos C_0 est constitué par les constantes, le chaos C_1 s'identifie à l'espace de Hilbert H (adhérence de W' dans L^2).

Nous désignerons par J_n le projecteur orthogonal sur C_n . Nous appellerons <u>polynômes généralisés</u> de degré $\leq$n les éléments de $\mathcal{P}_n = C_0+..+C_n$, et <u>fonctions d'ordre</u> $\geq$ n les éléments de l'orthogonal $\mathcal{O}_n=\mathcal{P}_n^\perp$. On construit des polynômes généralisés de la manière suivante : soit (α_n) une base orthonormale de H contenue dans W', <u>fixée une fois pour toutes</u> , et soient $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_m}$ des éléments de cette base, non nécessairement distincts, et P un polynôme de degré $\leq$k sur $\mathbb{R}^m$. Alors $P(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_m})$ est un polynôme généralisé de degré $\leq$k . Plus précisément, si les indices $i_1,\dots i_m$ sont distincts et P est un <u>polynôme d'Hermite</u> de degré k sur $\mathbb{R}^m$, $P(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_m})$ appartient au chaos C_k , et les éléments de ce type engendrent un sous-espace dense de C_k.

Les polynômes généralisés simples que nous venons de décrire seront appelés polynômes dans toute la suite - mais on notera que cette définition dépend du choix de la base (α_n), tandis que la notion de polynôme généralisé n'en dépend pas.

Les polynômes forment une algèbre, stable par les opérateurs P_t, Q_t, A[1], C, R, V et plus généralement par tous les T_φ ; comme elle est dense dans tous les L^p ($1<p<\infty$) elle forme un ensemble commode de << fonctions test >> sur lequel travailler.

On désignera par Φ_n le projecteur $\Sigma_{k\geqq n} J_k$ de L^2 sur $\mathfrak{G}_n$.

2) Il nous faut maintenant décrire l'opérateur bilinéaire Γ associé à (P_t). Tout d'abord, étant donné un élément α de H , la translation par $i(\alpha)\in W$ transforme la mesure ξ en une mesure équivalente, et on peut donc la faire opérer sur les classes de fonctions définies p.p.. Nous désignerons par D_α l'opérateur de dérivation suivant $i(\alpha)$; en fait, nous ne ferons varier α que parmi nos vecteurs de base. Si m est un multiindice $(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k})$, nous poserons $D_m=D_{\alpha_{i_1}}\dots D_{\alpha_{i_k}}$. Il est bien clair que les dérivations D_α transforment les polynômes de degré $\leqq k$ en polynômes de degré $\leqq k-1$. La propriété fondamentale sera pour nous la suivante ([1], p. 113 ; médiocre démonstration !)

(7) Sur l'algèbre des polynômes, l'opérateur bilinéaire Γ est donné par : $\Gamma(f,g) = 2\Sigma_n D_{\alpha_n} f D_{\alpha_n} g$.

Cette somme, en réalité, est finie. On a les formules importantes

$$(8) \qquad D_\alpha P_t = e^{-t} P_t D_\alpha \quad , \quad D_\alpha A = A D_\alpha - D_\alpha \ .$$

Nous introduirons plus généralement les gradients itérés d'ordre k

$$(9) \qquad \Gamma_0(f,g) = 2fg \quad , \quad \Gamma_1(f,g)=\Gamma(f,g) \quad , \quad \Gamma_k(f,g) = 2\Sigma_{m\in\mathbb{N}^k} D_m f D_m g$$

Pour $k>1$, ces opérateurs semblent propres au semi-groupe d'O-U, et dépourvus de signification générale en théorie des semi-groupes. Mais il est utile d'en avoir une expression indépendante du choix d'une base, que voici : de manière récurrente

$$(10) \qquad \Gamma_{k+1}(f,f) = \tfrac{1}{2}A\Gamma_k(f,f) - \Gamma_k(f,Af) - k\Gamma_k(f,f) \ ,$$

formule que l'on obtient en sommant sur m les relations $\Gamma(D_m f,D_m f) = A(D_m f)^2 - 2D_m f A D_m f = A(D_m f)^2 - 2D_m f(D_m Af + kD_m f)$.

1. L'opérateur A est noté L dans la plupart des travaux sur ce sujet.

4. ENONCE DES RESULTATS

Les théorèmes suivants sont énoncés pour des <u>polynômes</u> . L'extension aux polynômes généralisés est à peu près triviale, après quoi il reste à faire des prolongements par complétion aux divers domaines considérés.

THEOREME 1. <u>On a une équivalence de norme dans</u> L^p, $1<p<\infty$

$$c_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p \leqq \|Cf\|_p \leqq C_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p \tag{11}$$

Autrement dit, le problème des transformations de Riesz est résolu positivement pour le semi-groupe d'O-U.

THEOREME 2. <u>Pour</u> $k>1$, <u>on a</u>

$$c_p\|\sqrt{\Gamma_k(f,f)}\|_p \leqq \|C^kf\|_p \leqq C_p(\|\sqrt{\Gamma_k(f,f)}\|_p+ \|f\|_p) . \tag{12}$$

L'inégalité de gauche figure dans [2], l'inégalité de droite est nouvelle. L'addition du terme $\|f\|_p$ est nécessaire (si f est un polynôme de degré $\leqq k-1$, on a $\Gamma_k(f,f)=0$), mais devient inutile si l'on se restreint aux fonctions d'ordre $\geqq k$.

Enfin, nous tenons à dégager un résultat d'ordre technique, évidemment peu profond, mais très utile, et qui est certainement vrai pour bien d'autres semi-groupes que le semi-groupe d'O-U (développements en harmoniques sphériques ?). Notre démonstration est probabiliste, et <u>il doit en exister</u> une démonstration analytique simple. [1]

THEOREME 3. <u>Soit</u> F <u>une fonction analytique au voisinage de</u> 0 <u>sur</u> $\mathbb{R}$, <u>et soit</u> T_φ <u>l'opérateur de multiplicateur spectral</u> φ , <u>où</u>

$$\varphi(n) = F(\tfrac{1}{n}) \quad \text{pour} \quad n\geqq n_0 \quad \text{suffisamment grand} \tag{13}$$

<u>Alors</u> T_φ <u>est borné de</u> L^p <u>dans</u> L^p, $1<p<\infty$.

En particulier, si $\varphi(0)=F(0)$, $\varphi(n)=F(\frac{1}{n})$ pour $n>0$, l'opérateur T_φ s'interprète formellement comme F(R). Plus généralement, on aurait le même énoncé avec $F(1/n^\alpha)$, $\alpha>0$.

5. LE CAS DE LA MESURE DE WIENER

Jusqu'à maintenant, nous sommes restés dans une situation très générale en apparence. Or en fait, la topologie de W n'a rien à voir avec ces énoncés, et toutes les situations décrites (en dimension infinie) sont <u>isomorphes du point de vue de la théorie de la mesure</u>. Il suffit donc d'établir les théorèmes pour l'une d'elles. Par ailleurs, les situations en dimension finie s'en déduiront aussi par projection. C'est pourquoi l'on va travailler sur <u>la mesure</u> μ <u>du mouvement brownien issu de</u> 0 , utilisant ainsi l'arsenal du calcul stochastique.

1. Il en existe une : voir appendice.

Identifions d'abord les objets qui ont été décrits. W est ici l'espace des applications w de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et nulles en 0, et l'on pose comme d'habitude $w(t)=B_t(w)$. La topologie utilisée est celle de la convergence compacte, de sorte que W' est l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}_+$, ne chargeant pas 0 et à support compact. Identifiant une telle mesure η à sa fonction de répartition $\alpha(t)=\eta(]t,\infty[)$ continue à droite et à support compact, W' s'interprète comme un espace de fonctions à variation bornée et à support compact, mis en dualité avec W par la formule

$$\{w,\alpha\} = -\int_0^\infty w(s)d\alpha(s) = \int_0^\infty \alpha(s)dB_s(w) \quad \text{(intégration par parties formelle)}$$

et la dernière expression fait aussitôt apparaître la covariance

$$q(\alpha,\beta) = \int \alpha(s)\beta(s)ds \qquad \text{donc } H = L^2(\mathbb{R}_+,ds)$$

L'application $i : H \hookrightarrow W$ étant l'intégration. Le k-ième chaos de Wiener C_k est l'espace des intégrales stochastiques multiples d'ordre k (de processus déterministes)

$$(14) \qquad f = \int_{s_1<s_2\dots<s_k} h(s_1,\dots,s_k)dB_{s_1}\dots dB_{s_k}$$
$$\text{avec } \int_{s_1<s_2\dots<s_k} h^2(s_1,\dots,s_k)ds_1\dots ds_k = \|f\|_2^2 < \infty \ .$$

Il est familier aux probabilistes, dans ce contexte, que sur les chaos de Wiener toutes les normes L^p ($1<p<\infty$) sont équivalentes, avec une majoration du type suivant, pour $p>2$

$$(15) \qquad \|f\|_p \leq cp^{k/2}\|f\|_2 \quad , f\in C_k$$

D'où il résulte que les projecteurs J_k sont bornés de L^p dans L^p pour $p>2$, puis (par passage à l'adjoint) pour $p>2$, et de même pour $\Phi_k = I-(J_0+\dots+J_{k-1})$.

Mais surtout , nous disposons maintenant de la théorie de l'intégrale stochastique de processus prévisibles, et de la théorie des martingales. Tout d'abord, une v.a. $f\in H^p$, pour $p\geq 1$, admet une représentation prévisible

$$f = E[f] + \int_0^\infty u_s dB_s \quad , \quad (\int_0^\infty u_s^2 ds)^{1/2} \in L^p$$

La norme L^p étant, pour $p>1$, équivalente à la variante suivante de la norme H^p

$$(16) \qquad \|f\|_{H^p(1)} = |E[f]| + \|(\int_0^\infty u_s^2 ds)^{1/2}\|_{L^p}$$

de plus, le semi-groupe d'O-U opère par la formule ([1], p. 102)

$$(17) \qquad P_t f = E[f] + e^{-t}\int_0^\infty P_t u_s \, dB_s$$

D'où il résulte ([1], p. 101, lemme 1) que si $E[f]=0$, $\|P_t f\| \leq e^{-t}\|f\|$, et que R applique $\mathcal{C}_1 \cap L^p$ dans lui même, en diminuant la norme $H^p(1)$. La démonstration du théorème 3 va consister essentiellement à étendre cette remarque aux ordres supérieurs... Mais nous en avons terminé avec les généralités et les rappels.

II. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1-3

1. NORMES $H^p(n)$, $p>1$, $n>1$.

Rien n'est plus facile que d'expliquer formellement l'idée de ce n°. Il restera ensuite à justifier les détails. Nous raisonnons pour n=2.

Nous partons de $f \in L^2$, écrite $E[f] + \int u_s dB_s$, et nous remarquons que $u_s \in L^2$ pour presque tout s . Donc on peut écrire

$$u_s = \int u_{rs} dB_s$$

et comme u_s est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable on peut remplacer u_{rs} par $u_{rs} I_{\{r<s\}}$. D'autre part, on a $\int E[u_s]^2 ds \leq E[\int u_s^2\, ds] < \infty$, et l'on peut écrire

(18) $$f = E[f] + \int E[u_s] dB_s + \int (\int_0^s u_{rs} dB_r) dB_s$$

sans trop nous interroger pour l'instant sur la dernière intégrale. Le premier terme appartient à C_0, le second à C_1 , et l'on a

(19) $$P_t f = E[f] + e^{-t} \int E[u_s] dB_s + e^{-2t} \int (\int_0^s P_t u_{rs}\, dB_r) dB_s$$

d'où l'on déduit sans peine que le troisième terme a une norme en $\mathcal{O}(e^{-2t})$ dans L^2, donc appartient à $\mathcal{C}_2$. Autrement dit, on est en train d'écrire explicitement les projecteurs J_0, J_1 et Φ_2 .

Nous introduisons alors la norme

(20) $$\|f\|_{H^p(2)} = |E[f]| + (\int E[u_s]^2 ds)^{1/2} + \|(\int u_{rs}^2 dr ds)^{1/2}\|_{L^p}$$

Nous allons montrer qu'elle est équivalente à la norme $H^p(1)$ pour $1<p<\infty$. Pour cela, nous considérons l'espace de Hilbert $E = L^2(\mathbb{R}_+, ds)$ et l'application $U : w \mapsto u_.(w)$ de W dans E ; alors le second terme dans la norme $H^p(1)$ (formule (16)) est la norme de U dans $L^p(E)$. D'après les inégalités de Burkholder hilbertiennes, nous obtenons une norme équivalente en remplaçant ce terme par $\|[U,U]_\infty^{1/2}\|_{L^p}$, où $[U,U]$ est le processus croissant scalaire associé à la martingale hilbertienne $U_t = E[U|\underline{\underline{F}}_t]$ (sans oublier le terme initial $U_0 = E[U] = s \mapsto E[u_s]$) . Maintenant, puisque $u_s = E[u_s] + \int u_{rs} dB_r$, $U - U_0$ est une intégrale stochastique $\int H_r\, dB_r$, où (H_r) est le processus prévisible à valeurs dans E $H_r(w) = (s \mapsto u_{rs}(w))$, et $[U,U]_\infty = \|U_0\|_E^2 + \int_0^\infty \|H_r\|_E^2 dr = \int E[u_s]^2 ds + \int(\int u_{rs}^2 dr) ds$, d'où aussitôt l'équivalence cherchée.

On voit comment passe de là à l'ordre 3 : le dernier terme de (20) peut à son tour être interprété comme la norme L^p d'une v.a. U à valeurs dans un espace de Hilbert E , qui sera cette fois $L^2(\mathbb{R}_+^2, drds)$, etc. Justifions plutôt le raisonnement précédent, c'est à dire

- Il existe une version du processus (u_{rs}), mesurable du couple, nulle pour $s \geq r$, adaptée à $\underline{\underline{F}}_{r\wedge s}$, telle que le processus croissant scalaire adapté à la martingale hilbertienne $E[U|\underline{\underline{F}}_t]$ soit tel que

$$[U,U]_\infty = \int E[u_s]^2 ds + \int\int u_{rs}^2 drds \ .$$

Nous allons traiter le cas où $f = e^{\int \alpha(u)dB_u - \frac{1}{2}\int \alpha(u)^2 du}$, avec $\alpha \in L^2(\mathbb{R}_+, du)$; alors $f_t = E[f|\underline{\underline{F}}_t]$ est du même type, avec des intégrales étendues de 0 à t , et l'on a

$$f = 1 + \int_0^\infty \alpha_s f_s dB \qquad \text{donc} \quad u_s = \alpha_s f_s \ , \ E[u_s] = \alpha_s$$

$$u_{rs} = \alpha_r \alpha_s f_r I_{\{r<s\}}$$

versions explicites, ne posant aucun problème de mesurabilité. Ensuite $U = (s \mapsto \alpha(s) f_s)$, d'où aussitôt $U_t = E[U|\underline{\underline{F}}_t] = (s \mapsto \alpha(s) f_{s\wedge t})$ et par conséquent

$$E[\|U_\infty - U_t\|_E^2 | \underline{\underline{F}}_t] = E[\int \alpha_s^2 (f_s - f_{s\wedge t})^2 ds | \underline{\underline{F}}_t] = E[\int\int_{\{t<r<s\}} \alpha_s^2 \alpha_r^2 f_r^2 drds | \underline{\underline{F}}_t]$$

d'où $[U,U]_t = \|U_0\|_E^2 + \int\int_{r<s<t} \alpha_r^2 \alpha_s^2 f_r^2 drds$, la valeur désirée. Plus généralement, si on a deux martingales du même type (les éléments de la seconde comportant des ') on a $[U,U']_t = U_0 \cdot U_0' + \int_{r<s<t} \alpha_r \alpha_r' \alpha_s \alpha_s' f_r f_r' drds$. A partir de là, sachant que l'espace vectoriel engendré par les v.a. f du type ci-dessus est dense dans tous les L^p, il n'y a pas de difficulté à faire l'extension.

2. DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Soit ρ le rayon de convergence de la série définissant la fonction analytique F autour de 0. Nous pouvons supposer que l'entier n_0 est assez grand pour que $1/n_0 < \rho$. Nous écrivons alors

$$T_\varphi = T_\varphi(I - \Phi_{n_0}) + T_\varphi \Phi_{n_0} = T_\varphi(I - \Phi_{n_0}) + F(R)\Phi_{n_0}$$

Le premier terme correspond à une combinaison linéaire finie des J_k , et ne pose aucun problème. Pour le second, nous remplaçons la norme L^p sur $\mathfrak{S}_{n_0} \cap L^p$ par la norme équivalente $H^p(n_0)$, pour laquelle la norme de R est $\leq 1/n_0 < \rho$, et l'opérateur F(R) est donc bien défini et borné. En combinant ces deux résultats, on obtient le théorème 3.

Le reste de la démonstration va procéder ainsi : nous allons montrer (à l'aide du th. 3) que le théorème 1 entraîne la moitié gauche des inégalités du th.2, puis que celle-ci entraîne la moitié droite . Enfin, nous établirons en tout dernier lieu le théorème 1.

3. PASSAGE DU TH.1 AU TH.2 (MOITIE GAUCHE)

On va faire une récurrence, reposant sur l'<u>inégalité de Khintchine</u> hilbertienne (conséquence facile des inégalités de Burkholder hilbertiennes). Elle s'énonce ainsi : soit H un espace de Hilbert, soit $(r_m(t))$ un système de fonctions de Rademacher indexé par un ensemble dénombrable I, et soit (a_m) un système de v.a. à valeurs dans H , tel que $a_m=0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Alors on a pour $1\leq p<\infty$ une équivalence de normes

(21) $$E[\int \|\Sigma_m\, r_m(t)a_m\|_H^p dt\ ] \sim E[(\Sigma_m\, \|a_m\|_H^2)^{p/2}]\ .$$

<u>Principe de la récurrence</u> : H sera ℓ^2, I sera $\mathbb{N}^k$; pour $m\in I$ on pose $f_m = D_m f$, et $a_m = Gf_m$, où G est l'opérateur qui à une fonction h associe la suite $(D_{\alpha_n} h)$, considérée comme v.a. à valeurs dans H . Noter que $f_m\neq 0$ pour un nombre fini d'indices m seulement, et que a_m a un nombre fini de composantes non nulles .

On pose $h_t = \Sigma_m\, r_m(t)f_m$, on écrit le théorème 1 (inégalité de transformées de Riesz)

$$\|\sqrt{\Gamma(h_t,h_t)}\,\|_p^p \leq c_p\|Ch_t\|_p^p$$

et on intègre en t , et en w .

<u>Côté gauche</u> . $\frac{1}{2}\Gamma(h_t,h_t) = \Sigma_n\, (D_{\alpha_n} h_t)^2 = \|Gh_t\|_{\ell^2}^2 = \|\Sigma_m\, r_m(t)Gf_m\|_{\ell^2}^2$ $= \|\Sigma_m\, r_m(t)a_m\|_{\ell^2}^2$. Par conséquent en intégrant

$c_p\int dt\ \|\sqrt{\Gamma}\|_p^p = E[\int dt \|\Sigma_m\, r_m(t)a_m\|_{\ell^2}^p]$ qui équivaut d'après (21) à $E[\ (\ \Sigma_m\, \|Gf_m\|_{\ell^2}^2)^{p/2}] = E[(\Sigma_{m,n}(D_{\alpha_n} D_m f)^2)^{p/2}]\ =$ cte $\|\sqrt{\Gamma_{k+1}(f,f)}\|_{L^p}^p$.

<u>Côté droit.</u> $E[\int dt\|Ch_t\|_p^p = E[\int dt \|\Sigma_m\, r_m(t)Cf_m\|_p^p$ qui équivaut d'après (21), appliqué avec $H=\mathbb{R}$, à $\|(\ \Sigma_m\, (Cf_m)^2)^{1/2}\|_p^p$; or $f_m=D_m f$; si nous avions $D_m Cf$ au lieu de $CD_m f$, nous retrouverions ici $\|\sqrt{\Gamma_k(Cf,Cf)}\|_p^p$, et l'hypothèse de récurrence au rang k nous permettrait de remplacer cela par $\|C^k(Cf)\|_p^p = \|C^{k+1}f\|_p^p$, et l'on serait bien monté au rang k+1. On voit donc qu'il s'agit d'évaluer un commutateur.
Nous allons prouver :

LEMME. <u>Si</u> m <u>est un multiindice d'ordre</u> k , <u>et</u> f <u>est d'ordre</u> $\geq k$, <u>on a</u> $CD_m f = D_m CT_k f$, <u>où</u> T_k <u>est l'opérateur de multiplicateur spectral</u> $\sqrt{1-k/n}\ I_{\{n\geq k\}}$ (T_k commute donc à C, etc.).

Ce lemme nous permettra de conclure. Partant en effet d'un polynôme f , écrivons le f=g+h , avec $h=\Phi_k f$; alors les termes du développement de f suivant les chaos de Wiener sont des polynômes d'Hermite, donc h est un <u>polynôme</u> d'ordre $\geq k$, auquel s'applique tout ce qui précède. On a de plus $D_mf = D_mg+D_mh$, donc (le premier terme étant une constante) $CD_mf = CD_mh = D_mCT_kh$ d'après le lemme, et le raisonnement précédent fait apparaître $C^{k+1}T_kh = T_k\Phi_kC^{k+1}f$ au lieu de $C^{k+1}f$. Il ne reste plus qu'à appliquer le th. 3 : $T_k\Phi_k$ est borné dans L^p, et on peut conclure.

Reste donc à prouver le lemme. Comme f est un polynôme d'ordre $\geqq k$, f est une somme finie de polynômes appartenant aux chaos de Wiener C_{k+j} , et il suffit de regarder ce qui arrive lorsque $f \in C_n$, $n=k+j$. Nous appliquons d'abord (8)

$$P_sD_mf = e^{ks}D_mP_sf = e^{ks}e^{-(k+j)s}D_mf$$

Pour former Q_tD_mf , nous intégrons par rapport à $\mu_t(ds)$, et nous obtenons

$$Q_tD_mf = (\int\mu_t(ds)e^{-js}ds)D_mf = e^{-t\sqrt{j}}\,D_mf = e^{-t\sqrt{n-k}}D_mf$$

Dérivant en t et faisant t=0

$$CD_mf = -\sqrt{n-k}\;D_mf$$

Mais $Cf = -\sqrt{n}f$, donc on peut aussi écrire cela $D_m(\sqrt{1-k/n}\;Cf)$, et le lemme est prouvé.

4. TRANSFORMATION DES INEGALITÉS EN EQUIVALENCES

Dans ce n°, nous allons montrer comment la moitié gauche du th. 1 ou du th.2 , i.e. $\|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p \leqq c_p\|C^nf\|_p$, permet d'établir la moitié droite. Plus précisément, nous allons montrer que, si f est un polynôme <u>d'ordre</u> $\geqq n$, on a (avec une autre constante c_p , bien sûr !)

$$(22)\qquad \|C^nf\|_p \leqq c_p\|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p$$

ce qui est le résultat désiré pour le théorème 1 (car l'addition d'une constante à f ne change aucun des deux membres). Pour $n>1$, on écrit $f=g+h$, avec $h=\Phi_nf$; on a $\Gamma_n(g,.)=0$ puisque toutes les dérivées d'ordre k de g sont nulles, donc $\Gamma_n(h,h)=\Gamma_n(f,f)$, et l'inégalité (22) nous permet de contrôler $\|C^nh\|_p$. Quant à $\|C^ng\|_p$, on passe de f à C^ng par un multiplicateur n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, donc borné dans tous les L^p, et c'est fini.

Passons à la démonstration de (22). Nous partons de la formule (10), que nous intégrons sur W en remarquant que $\int Af=0$ pour tout f . Il reste donc

$$\int\Gamma_{n+1}(f,f) = -\int\Gamma_n(f,Af) - \int\Gamma_n(f,f)$$

Un peu d'expérimentation pour les basses valeurs de n montrera que l'on a une formule du genre

$$(23)\qquad \int\Gamma_n(f,g) = \Sigma_{k=0}^n\; a_{kn}\langle C^kf,C^kg\rangle \qquad \text{avec } a_{nn}=1,\; a_{0n}=0$$

et l'on vérifie par récurrence que

(24) $$\Sigma_0^n a_{kn}x^k = P_n(x) = (x-n+1)(x-n+2)\ldots x$$

Introduisons aussi la notation $Q_n(x)$ pour $(-1)^nP_n(-x)=x(x+1)..(x+n-1)$. Alors la formule précédente s'écrit (on rappelle que $C^kV^kf=(-1)^kf$)

(25) $$\int\Gamma_n(f,g) = < C^nf,\ V^nQ_n(A)g >$$

Soit h un polynôme, et soit $k=\Phi_nh$, polynôme d'ordre $\geqq n$; comme f est supposé d'ordre $\geqq n$, on a $<C^nf,h> = <C^nf,k>$. D'autre part, on peut trouver un polynôme g d'ordre $\geqq$ n tel que $V^nQ_n(A)g = k$; il est donné par le multiplicateur

$$\varphi(i)=0\ ,\ i<n\quad ,\quad \varphi(i)= (-1)^n\sqrt{i}^n/i(i-1)..(i-n+1)\quad \text{si } i\geqq n$$

Alors la formule (25) nous donne

$$|<C^nf,h >| = |<C^nf,\ V^nQ_n(A)g >| = \int|\Gamma_n(f,g)| \leqq \int\sqrt{\Gamma_n(f,f)\Gamma_n(g,g)}$$
$$\leqq \|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p\|\sqrt{\Gamma_n(g,g)}\|_q \quad (\text{ Hölder})$$

Nous appliquons maintenant la moitié gauche du théorème 1 ou 2 pour remplacer le dernier terme par $c_q\|C^ng\|_q$, et cette fois on passe de h à C^ng par le multiplicateur

$$\frac{i^n}{i(i-1)\ldots(i-n+1)}I_{\{i\geqq n\}} = (1-\tfrac{1}{i})^{-1}\ldots(1-\tfrac{n-1}{i})^{-1}$$

et comme la fonction $1/(1-x)\ldots(1-(n-1)x)$ est analytique au voisinage de 0, le théorème 3 s'applique pour donner

$$|< C^nf,h >| \leqq c_p\|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p\|h\|_q$$

Faisant varier h dans la boule unité de L^q et passant au sup, on obtient l'inégalité cherchée.

5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Cette partie est vraiment l'essentiel de la démonstration, mais elle ne comporte aucun progrès véritable par rapport à [1]. Nous la présentons donc rapidement (le théorème 3 permet d'améliorer un peu la pédagogie).

Nos deux outils sont des inégalités de Littlewood-Paley-Stein, valables pour des semi-groupes bien plus généraux que le semi-groupe d'O-U.

(26) Si $f\in L^2$ est telle que $P_tf\to 0$ pour $t\to\infty$, on a pour $1<p<\infty$

$$\|f\|_p \leqq c_p\|G_f\|_p \quad \text{ou}\quad G_f^2 = \int_0^\infty t(\tfrac{d}{dt}Q_tf)^2dt\ .$$

(27) On a pour $1<p<\infty$ $\|M_f\|_p\leqq c_p\|f\|_p$, avec $M_t^2 = \int_0^\infty(P_t\sqrt{\Gamma(P_tf,P_tf)})^2dt$.

Ces inégalités (contrairement à l'inégalité générale de Littlewood-Paley-Stein) ne sont pas profondes : elles ne font que traduire les inégalités de Burkholder pour des martingales convenables.

D'autre part, ces inégalités sont valables, non seulement pour des fonctions scalaires, mais pour des fonctions f à valeurs dans un espace de Hilbert . Nous ne nous servirons que de la première dans le cas vectoriel, et il faut dans ce cas remplacer $(\frac{d}{dt}Q_t f)^2$ par $\|\frac{d}{dt}Q_t f\|^2$.

Nous voulons établir l'inégalité

$$(28) \qquad \|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p \leqq c_p\|Cf\|_p$$

et il est facile de voir que l'on peut se borner à établir cela lorsque f est d'ordre $\geqq 2$. Nous allons interpréter le côté gauche, à un facteur 2 près, comme la norme dans $L^p(\ell^2)$ de la fonction vectorielle $h=(D_{\alpha_n})$, et l'inégalité (26) nous permet alors de remplacer le côté gauche par

$$\|G_h\|_p \qquad \text{avec} \quad G_h^2 = \Sigma_n \int t(\tfrac{d}{dt}Q_t D_{\alpha_n} f)^2 dt$$

Nous interprétons $\frac{d}{dt}Q_t D_\alpha f$ comme $CQ_t D_\alpha = Q_t CD_\alpha = Q_t D_\alpha CT_1$, où T_1 est l'opérateur borné construit dans le lemme du n°3 . Posant $g=T_1 Cf$ (qui est encore un polynôme d'ordre $\geqq 2$) nous avons

$$\frac{d}{dt}Q_t D_\alpha f \;=\; Q_t D_\alpha g \;=\; \int \mu_t(ds)P_s D_\alpha g = D_\alpha \int \mu_t(ds)e^s P_s g$$

(cf. la démonstration du même lemme). Elevant au carré et sommant sur n , nous retrouvons à un facteur 2 près

$$(29) \qquad \int t\Gamma(u_t,u_t)dt \qquad \text{avec } u_t = \int \mu_t(ds)e^s P_s g$$

(bien remarquer que cette intégrale a un sens parce que g est d'ordre au moins 2 !) Comme $\sqrt{\Gamma}$ se comporte comme une norme , on a

$$\sqrt{\Gamma(u_t,u_t)} \;\leqq \int \mu_t(ds)e^s\sqrt{\Gamma(P_s g,P_s g)}$$

et par conséquent (inégalité de Schwarz) $\Gamma(u_t,u_t) \leqq \int \mu_t(ds)e^{2s}\Gamma(P_s g,P_s g)$. Portant cela dans (29) et remarquant que $\int t\mu_t(ds)dt = ds$, nous sommes ramenés à voir si pour un polynôme g d'ordre 2

$$(30) \qquad \|(\int e^{2s}\Gamma(P_s g,P_s g)ds\,)^{1/2}\|_p \;\leqq c_p\|g\|_p \qquad ??$$

qui conclurait le théorème, puisque l'on passe de Cf à g par l'opérateur borné T_1 .

Pour obtenir cela, nous allons utiliser l'inégalité (27), que nous allons commencer par transformer. Utilisant la relation $P_t D_\alpha = e^t D_\alpha P_t$ et l'expression explicite de Γ , nous avons d'abord

$$P_t(\sqrt{\Gamma(h,h)}\,) \geqq e^t\sqrt{\Gamma(P_t h,P_t h)}$$

donc, remplaçant h par $P_t f$ et portant dans M_f , nous obtenons que M_f majore $(\int e^{2t}\Gamma(P_{2t}f,P_{2t}f)dt\,)^{1/2}$, donc remplaçant 2t par t

$$(31) \qquad \|(\int e^t\Gamma(P_t f,P_t f)dt)^{1/2}\|_p \leqq c_p\|f\|_p$$

Cela ressemble à (30), mais il faut travailler pour améliorer l'exposant.

Ecrivons cela pour $P_u f$ au lieu de f :

$$\|(\int_u^\infty e^s\Gamma(P_sf,P_sf)ds\ )^{1/2}\|_p \leqq c_p e^{u/2}\|f\|_p$$

Nous interprétons le côté gauche comme la norme dans $L^p(L^2(\mathbb{R}_+,ds))$ de la variable aléatoire

$$H_u\ :\ w\mapsto\ (\ s\mapsto I_{]u,\infty[}(s)e^{s/2}\sqrt{\Gamma(P_sf,P_sf)}\ (w)\ )$$

et par conséquent, en multipliant par $e^{u/2}$ et en intégrant

$$\|\int e^{u/2}H_u du\|_{L^p(L^2)} \leqq c_p \int e^u\|P_uf\|_p du$$

Or $\int_0^\infty e^{u/2}H_u du = 2(e^s-e^{s/2})\sqrt{\Gamma(P_sf,P_sf)}$, qui est $\geqq ce^s\sqrt{\Gamma(P_sf,P_sf)}$ pour $s\geqq 1$. L'intégrale sur $[0,1]$ étant trivialement majorable d'après (31), nous obtenons

$$\|(\int_0^\infty e^{2s}\Gamma(P_sf,P_sf)ds\ )^{1/2}\|_p \leqq a_p\|f\|_p + b_p\int_0^\infty e^u\|P_uf\|_p du \tag{32}$$

Considérons l'opérateur $P_t\Phi_2$; sa norme dans L^2 est $\leqq e^{-2t}$, et sa norme dans L^p est uniformément bornée en t . Appliquons le théo - rème de Riesz-Thorin : représentant l'exposant p comme $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{p'}$, avec λ proche de 0 , et interpolant, on voit que $\|P_t\Phi_2\|_p \leqq Ae^{-bt}$ avec b arbitrairement proche de 2, donc si f est d'ordre $\geqq 2$ ($\Phi_2 f=f$) on peut majorer le côté droit de (32) par $c_p\|f\|_p$, et la démonstration est terminée.

6. COMPLEMENTS

Nous ajoutons dans ce paragraphe quelques résultats techniques, qui ont été établis à l'occasion d'exposés sur le calcul de Malliavin, et qui se sont avérés fort utiles. Nous les présentons sous formes de remarques.

a) Soit $f\in L^p$, $p>1$. Stein a remarqué (dans son livre sur la théorie de Littlewood-Paley) que le semi-groupe (P_t) - où les P_t sont considérés comme opérateurs sur L^p - est analytique dans un secteur angulaire contenant l'axe réel, et d'ouverture dépendant de p . Il en résulte que P_tf appartient au domaine $\mathcal{D}_p(A^n)$ pour tout n , et d'autre part $P_tf\to f$ lorsque $t\to 0$, au sens fort.

b) Il en résulte d'abord que, pour vérifier que f appartient à un domaine $\mathcal{D}_p(A)$, $\mathcal{D}_p(C)$... il suffit de vérifier une condition de type faible : pour tout polynôme h $|\langle f,Ah\rangle|$ (ou $|\langle f,Ch\rangle|$) $\leqq c\|h\|_q$. Traitons le cas de A : comme P_th est encore un polynôme, l'inégalité entraîne

$$|\langle AP_tf,h\rangle| = |\langle f,AP_th\rangle| \leqq c\|P_th\|_q \leqq c\|h\|_q$$

On en déduit que $\|AP_tf\|_p$ reste borné. Un argument simple de théorie des martingales montre qu'alors AP_tf converge dans L^p vers une fonction φ , et il est immédiat que $\varphi=Af$. L'argument s'étend à tous les A^n ou C^n .

c) Pour vérifier que $f\in L^p$ appartient à $\mathcal{D}_p(C)$, il suffit de vérifier : que les $D_{\alpha_n}f$ existent et appartiennent à L^p, et que $(\Sigma_n(D_{\alpha_n}f)^2)^{1/2}$ appartient à L^p [autrement dit, on n'a que du calcul différentiel élémentaire à effectuer...] . En effet, comme on l'a vu à l'instant, il suffit de vérifier que $\|CP_tf\|_p$ reste borné, ou que $\|\sqrt{\Gamma(P_tf,P_tf)}\|_p$ reste borné, ou enfin que $\|(\Sigma_n(D_{\alpha_n}P_tf)^2)^{1/2}\|_p$ reste borné .
Mais on a $D_{\alpha_n}P_tf = e^{-t}P_tD_{\alpha_n}$, et (P_t) est une contraction de $L^p(\ell^2)$, donc tout cela reste borné par $\|(\Sigma_n(D_{\alpha_n}f)^2)^{1/2}\|_p$. De même, la vérification d'appartenance à $\mathcal{D}_p(C^n)$ peut se faire au moyen des gradients itérés.

d) Si l'on a $1<p,q,r<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, la forme bilinéaire Γ (convenablement prolongée) est continue de $\mathcal{D}_p(C)\times\mathcal{D}_q(C)$ dans L^r - conséquence évidente de la représentation de Γ au moyen des dérivées et de l'inégalité de Hölder - mais aussi, ce qui est plus intéressant, de $\mathcal{D}_p(A)\times\mathcal{D}_q(A)$ dans $\mathcal{D}_r(C)$.

Pour voir cela, on peut se borner à établir une inégalité du type $\|C\Gamma(f,g)\|_r \leq c\|f\|_{\mathcal{D}_p(A)}\|g\|_{\mathcal{D}_q(A)}$ lorsque f et g sont des polynômes relatifs à la base (α_n). Utilisant les inégalités de transformées de Riesz, on est ramené à évaluer $\|\ [\Sigma_n\ (D_{\alpha_n}\Sigma_m\ D_{\alpha_m}fD_{\alpha_m}g)^2]^{1/2}\|_r$. Dérivant le produit, utilisant l'inégalité $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$, utilisant l'inégalité de Schwarz puis l'inégalité de Hölder on trouve un majorant

$$2(\|\sqrt{\Gamma_2(f,f)}\|_p\|\sqrt{\Gamma(g,g)}\|_q + \text{terme analogue }) .$$

On a choisi des polynômes f,g pour que toutes les sommes considérées soient en fait finies, et que l'application de l'opérateur D_{α_n} ne crée aucune difficulté. On applique enfin le th.2.

On a des résultats analogues pour les gradients itérés.

Je n'ai pas repris ici les considérations de [2] sur l'espace des << fonctions-test >> , qui joue le rôle sur W de l'espace S de Schwartz pour la définition des distributions (travaux de S. Watanabe). Cet espace peut être défini comme l'intersection des domaines de tous les opérateurs A^k dans tous les L^p, et l'on peut montrer que c'est une algèbre.

APPENDICE : DEMONSTRATION ANALYTIQUE DU THEOREME 3

La propriété cruciale dans la démonstration du théorème 3 est la suivante. Soit $\mathcal{O}'_n$ l'espace des polynômes généralisés d'ordre $\geq n$ (contenu dans tous les L^p) et soit R_n la restriction de R à l'espace invariant $\mathcal{O}'_n$. Alors la norme de l'opérateur R_n , pour la norme L^p ou une norme équivalente , est <1 pour n grand. Dans le texte, nous le montrons pour la norme équivalente $H_p(n)$. Ici nous allons le montrer - suivant une idée de Martin Silverstein - pour la norme L^p elle même, et de manière purement analytique.

Soit $A_n(p)$ la norme considérée. Comme $A_n(2)=1/n$, et comme $A_n(p)$ prend la même valeur pour deux exposants conjugués, nous pouvons supposer p>2. Ensuite, nous écrivons (pour $f\in\mathcal{O}'_n$, $\|f\|_p\leq 1$)

$$Rf = \int_0^{2\varepsilon} P_t f + \int_{2\varepsilon}^{\infty} P_t f$$

et la norme dans L^p du premier terme est au plus 2ε. Il nous faut évaluer le second. Pour cela, nous utilisons le théorème d'hypercontractivité de Nelson : on a $\|P_t f\|_{q_t}\leq 1$, avec $p\leq q_t\leq 1+e^{t/2}(p-1)$. Ecrivant alors

$$\frac{1}{p} = \frac{1-s_t}{q_t} + \frac{s_t}{2} \quad \text{soit} \quad s_t = \frac{1/p - 1/q_t}{1/2 - 1/q_t}$$

on a $\|P_t f\|_p \leq \|P_t f\|_2^{s_t}\|P_t f\|_{q_t}^{1-s_t} \leq e^{-nts_t}$

Une majoration grossière consiste à prendre $q_t = p+\varepsilon(p-1)\leq 1+e^{\varepsilon}(p-1)$ si $t\geq 2\varepsilon$, donc $s_t\geq \varepsilon\frac{p-1}{p/2-1} = c\varepsilon$,

$$A_n(p) \leq 2\varepsilon + \int_{2\varepsilon}^{\infty} e^{-ntc\varepsilon}dt \leq 2\varepsilon + \frac{1}{nc\varepsilon} \text{ , à minimiser en } \varepsilon \text{ ,}$$

qui nous donne un $A_n(p)$ en $c(p)/\sqrt{n}$, donc tendant bien vers 0 lorsque $n\to\infty$.

REFERENCES.

[1]. P.A. MEYER. Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sém. Prob. XVI, 1982, Lecture Notes in M. 920.

[2]. P.A. MEYER. Quelques résultats analytiques sur le semi-groupe d' Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie. Proceedings ISI-IFIP Conference on Random Fields, Bangalore, 1982 (à paraître dans les Lecture Notes in M.).

Voir aussi : M. et P. KREE. Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener. C.R.A.S. t.296, 1983, p. 833.
Pour la théorie L^2 : M. KREE, Bull. SMF, 105, 1977, p. 141-163.