SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

WEI-AN ZHENG
PAUL-ANDRÉ MEYER

Intégrales stochastiques non monotones

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 154-171
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__154_0>

Séminaire de Probabilités XVIII

INTEGRALES STOCHASTIQUES NON MONOTONES

par Wei-An ZHENG (et P.A. MEYER)

Dans son livre << Mécanique Aléatoire >>, J.M. Bismut introduit des intégrales stochastiques du type

$$\int_0^a f(t_u, \varphi_{t_u}(\omega,x_u))dW_{t_u}$$

où W_u est un mouvement brownien, t_u est un changement de temps déterministe <u>non nécessairement croissant</u>, de classe C^1, $\varphi_t(\omega,x)$ est le flot d'une équation différentielle stochastique, $f(t,x)$ est une fonction de classe C^3, et x_u est une fonction de classe C^1. Ces intégrales sont importantes en géométrie différentielle et en mécanique. On peut les définir soit au sens d'Ito, soit au sens de Stratonovitch. En supposant que $t_.$ satisfait à la condition << de type π >> (Bismut, p. 147) on peut ramener ces intégrales à des intégrales stochastiques ordinaires.

Nous allons étudier ici les intégrales non monotones par une méthode différente de celle de Bismut : nous chercherons à définir des intégrales d'Ito et de Stratonovitch de la forme

$$\int_0^a Y_{t_u}(\omega,x_u)dX_{t_u}$$

où X est une semimartingale continue convenable, $Y_t(\omega,x)$ un processus continu adapté dépendant d'un paramètre $x\in\mathbb{R}^d$, et $t_.$, $x_.$ sont des fonctions continues à variation bornée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^d$.

Une première rédaction de ce travail, généralisant les résultats de Bismut, a été préparée par W.A. Zheng. Les hypothèses ont été rendues invariantes par changement de loi grâce à des discussions avec P.A. Meyer, c'est pourquoi il y a maintenant deux signataires.

I. INTEGRALES NON MONOTONES D'ITO

1. Les notations étant assez lourdes, nous traiterons le cas où Y ne contient pas de paramètre x ; nous indiquerons en fin de paragraphe les modifications nécessaires pour l'introduction du paramètre (importante en pratique).

Sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles, nous considérons une semimartingale continue (X_t), nulle en 0, dont la décomposition canonique X=M+A possède la propriété

(1) $d\langle M,M\rangle_t = \mu_t dt$, $dA_t=\alpha_t dt$, avec μ_t localement borné, $\int_0^{\cdot} \alpha_s^2 ds < \infty$ p.s.

Cette condition vient d'être étudiée par Stricker [1], qui a montré que si X y satisfait relativement à P, il y satisfait aussi relativement à toute loi Q absolument continue par rapport à P. Nous utiliserons surtout la conséquence suivante de (1) - en fait, Stricker a montré qu'elle équivaut à (1)

(1') Soit (H^n) une suite de processus prévisibles localement bornés, telle que $\int_0^t (H_s^n)^2 ds$ tende vers 0 en probabilité pour tout $t<\infty$. Alors $(H^n \cdot X)_t \to 0$ en probabilité pour tout $t<\infty$.

Nous désignons par $t_.$ une fonction continue à variation bornée de l'intervalle $[0,1]$ (pour fixer les idées) dans $\mathbb{R}_+$, et par (Y_t) un processus continu adapté, sur lequel nous ferons plus bas des hypothèses supplémentaires. Nous allons travailler sur une suite (σ^m) de subdivisions de plus en plus fines de $[0,1]$, dont le pas tend vers 0 (les subdivisions dyadiques par exemple). Nous écrirons

$$\sigma^m = (u_n^m)_{0\leq n\leq M} \quad , \; 0 = u_0^m < u_1^m \ldots < u_M^m = 1 \; .$$

<u>Notre but est d'établir la convergence en probabilité de sommes de Riemann du type suivant</u>

$$(2) \qquad \boxed{I^m = \Sigma_n \, Y(t(u_n^m) \wedge t(u_{n+1}^m))(X_{t(u_{n+1}^m)} - X_{t(u_n^m)})}$$

(on a écrit $t(u)$, $Y(t)$ au lieu de t_u, Y_t pour la clarté typographique)

Nous introduirons des notations abrégées :

$$(3) \qquad \begin{gathered} t(u_n^m) \wedge t(u_{n+1}^m) = t_n^m \quad , \quad t(u_n^m) \vee t(u_{n+1}^m) = \hat{t}_n^m \\ Y(t(u_n^m) \wedge t(u_{n+1}^m)) = Y_n^m \\ \varepsilon_n^m = +1 \text{ si } t(u_n^m) \leq t(u_{n+1}^m) \; , \; = -1 \text{ sinon} \; . \end{gathered}$$

On peut alors écrire :

$$(4) \qquad I^m = \Sigma_n \, Y_n^m \varepsilon_n^m (X_{\hat{t}_n^m} - X_{t_n^m}) \; .$$

2. Nous considérons maintenant une seconde subdivision $\sigma^{m'} = (u_{n'}^{m'})_{n'\leq M'}$ avec $m' \geq m$. Nous écrivons de manière abrégée $n' \subset n$ pour exprimer que l'intervalle $J_{n'} =]u_{n'}^{m'}, u_{n'+1}^{m'}]$ de $\sigma^{m'}$ est contenu dans $J^n =]u_n^m, u_{n+1}^m]$. Nous rangeons par ordre croissant les valeurs $t(u_{n'}^{m'})$ en une suite

$$\beta_0 < \beta_1 \ldots < \beta_L = \beta_{L+1} \ldots = \beta_{M'} , \quad \text{avec } L \leq M' \; ^{(1)}$$

et pour un $k \leq M'$ donné nous désignons par $H(k)$ l'ensemble des entiers n tels que

$$(5) \qquad t_n^m \leq \beta_k < \hat{t}_n^m \quad (\text{ ce qui équivaut à } t_n^m \leq \beta_k < \beta_{k+1} \leq \hat{t}_n^m \quad)$$

et l'on a $X_{\hat{t}_n^m} - X_{t_n^m} = \Sigma_k \, I_{\{n \in H(k)\}} (X_{\beta_{k+1}} - X_{\beta_k})$. Par conséquent

1. Les indices entre L et M' sont inutiles ici, mais servent dans le cas où $t(u)$ est aléatoire (cf. 6 plus bas).

$$(6) \qquad I^m = \Sigma_k \Phi_k(X_{\beta_{k+1}} - X_{\beta_k}) \quad \text{avec} \quad \Phi_k = \Sigma_{n\in H(k)} Y_n^m \varepsilon_n^m$$

De la même manière, nous écrirons

$$(7) \qquad I^{m'} = \Sigma_k \Phi_k'(X_{\beta_{k+1}} - X_{\beta_k}) \quad , \; \Phi_k' = \Sigma_{n'\in H'(k)} Y_{n'}^{m'} \varepsilon_{n'}^{m'}$$

Pour tout $n\in H(k)$ on a $t_n^m \leq \beta_k$, donc les sommes (6) et (7) sont des intégrales stochastiques élémentaires par rapport à X . Etudier la convergence en probabilité de I^m revient à démontrer que lorsque $m\to\infty$, $m'>m$, $I^{m'}-I^m$ tend vers 0 . D'après la propriété (1') de la semimartingale X , nous obtenons le lemme suivant :

LEMME 1. <u>Pour montrer que les sommes de Riemann</u> I^m <u>convergent en probabilité, il suffit de montrer que</u> (<u>lorsque</u> $m\to\infty$, $m'>m$)

$$(8) \qquad \Sigma_k (\Phi_k' - \Phi_k)^2 (\beta_{k+1} - \beta_k) \to 0 \quad \underline{\text{en probabilité}} \; .$$

3. Maintenant nous allons étudier de plus près $\Phi_k' - \Phi_k$, qui s'écrit ainsi

$$(9) \qquad \Sigma_n \left(\Sigma_{\substack{n'\in H'(k) \\ n'\subset n}} Y_{n'}^{m'} \varepsilon_{n'}^{m'} - I_{\{n\in H(k)\}} Y_n^m \varepsilon_n^m \right)$$

Soit $H'(k,n)$ l'ensemble des indices $n'\subset n$ appartenant à $H'(k)$, autrement dit, tels que $t(u)$ traverse $[\beta_k,\beta_{k+1}]$ lorsque u saute de $u_{n'}^{m'}$ à $u_{n'+1}^{m'}$. Il est clair qu'il le traverse alternativement en montant et en descendant . Nous énumérons les indices $n'\in H(k,n)$ de la gauche vers la droite, par couples de termes consécutifs, avec aussi un dernier terme isolé si $H'(k,n)$ a un nombre impair d'éléments :

$$n_1', \; n_1'' \; ; \; n_2' \ldots \; ; \; n_p', \; n_p'' \; ; (\nu')$$

et nous remarquons que l'on ne traverse pas $[\beta_k,\beta_{k+1}]$ avant $u_{n_1'}^{m'}$, ni après $u_{n_p''+1}^{m'}$ ou $u_{\nu'+1}^{m'}$ suivant le cas. Donc si le nombre est pair on se trouve en u_n^m et u_{n+1}^m du même côté de l'intervalle ($n\notin H(k)$), et s'il est impair on l'a traversé ($n\in H(k)$), et de plus $\varepsilon_{\nu'}^{m'}=\varepsilon_n^m$. On peut alors écrire la parenthèse de (9)

$$\Sigma_{i\leq p} (Y_{n_i'}^{m'} - Y_{n_i''}^{m'})\varepsilon_{n_i'}^{m'} + I_{\{n\in H(k)\}}(Y_{\nu'}^{m'} - Y_n^m)\,\varepsilon_n^m$$

Nous écrirons encore (9) de la manière suivante, avec des notations plus légères et moins formelles

$$(10) \qquad \Phi_k' - \Phi_k = \Sigma_{n'\in G(k)} (Y_{n'}^{m'} - Y_{n''}^{m'})\varepsilon_{n'}^{m'} + \Sigma_{n\in H(k)} (Y_{\nu'(n)}^{m'} - Y_n^m)\varepsilon_n^m \; .$$

Pour évaluer alors (8), nous utilisons l'inégalité $(\Sigma_1^N x_i)^2 \leq N\Sigma_1^N x_i^2$, de sorte que

$$(\Phi_k' - \Phi_k)^2 \leq N_k\left(\Sigma_{n'\in G(k)} (Y_{n'}^{m'} - Y_{n''}^{m'})^2 + \Sigma_{n\in H(k)} (Y_n^m - Y_{\nu'(n)}^{m'})^2\right)$$

N_k désignant le nombre total des termes. Soit $f(u)$ la fonction $t(u)$ tronquée à β_k et β_{k+1} ; comme chaque $n'\in G(k)$ correspond à une traversée de l'intervalle $[\beta_k,\beta_{k+1}]$ par la fonction f , on a

$$\mathrm{Card}(G(k)) \leq \frac{\mathrm{Var}(f)}{\beta_{k+1}-\beta_k} \quad \text{(de même pour Card(H(k)))}$$

et d'autre part $\mathrm{Var}(f) = \int_{\{\beta_k<t_u\leq\beta_{k+1}\}} |dt_u|$. Revenant alors à (8), il suffit de voir que l'expression suivante tend vers 0 en probabilité

(11) $D_{m,m'} = \Sigma_k \left(\Sigma_{n'\in G(k)} (Y^{m'}_{n'}-Y^{m'}_{n''})^2 + \Sigma_{n\in H(k)} (Y^m_n-Y^{m'}_{\nu'(n)})^2\right)(A_{\beta_{k+1}}-A_{\beta_k})$

avec $A_t = \int_{\{t_u\leq t\}} |dt_u|$. Remarquer que A est une fonction déterministe.

4. Maintenant, il faut introduire les hypothèses sur Y . Pour faire comprendre le raisonnement, nous commencerons par l'hypothèse suivante, qui n'est pas satisfaisante, car elle dépend très fortement de la loi P , et n'est pas de nature " locale" :

(12) $$E[|Y_t-Y_s|^2] \leq C|t-s|$$

lorsque s,t varient dans un intervalle compact $[0,a]$ (C dépendant de a) Prenant $a= \sup_u t_u$, nous aurons alors

$$\frac{1}{C}E[D_{m,m'}] \leq \Sigma_k \left(\Sigma_{n'\in G(k)}|t^{m'}_{n'}-t^{m'}_{n''}| + \Sigma_{n\in H(k)}|t^m_n-t^{m'}_{\nu'}|\right)(A_{\beta_{k+1}}-A_{\beta_k})$$

Soit $h = h(m) = \sup_n \sup_{u,v\in[u^m_n,u^m_{n+1}]} |t_u-t_v|$, qui est très petit pour m grand. La relation $n'\in G(k)$ entraîne que les intervalles $[t^{m'}_{n'},\hat{t}^{m'}_{n'}]$ et $[t^{m'}_{n''},\hat{t}^{m'}_{n''}]$ contiennent β_k , et sont donc contenus dans $[\beta_k-h,\beta_k+h]$. Soit $f(u)$ la fonction $t(u)$, tronquée à β_k-h et β_k+h ; on a

$$\Sigma_{n'\in G(k)} |t^{m'}_{n'}-t^{m'}_{n''}| \leq \mathrm{Var}(f) = \int_{\{\beta_k-h\leq t_u\leq\beta_k+h\}} |dt_u| = \int_{\beta_k-h}^{\beta_k+h} dA_u$$

et de même pour le second terme. Il reste donc à montrer que

(13) $$\Sigma_k (A_{\beta_k+h}-A_{\beta_k-h})(A_{\beta_{k+1}}-A_{\beta_k}) \to 0$$

Or si r appartient à $[\beta_k,\beta_{k+1}]$, intervalle de longueur $\leq h$, l'intervalle $[r-2h,r+2h]$ contient $[\beta_k-h,\beta_k+h]$. Donc l'expression ci-dessus est majorée par

$$\int_0^a dA_r \int_{r-2h}^{r+2h} dA_s$$

qui s'interprète comme la mesure d'une bande autour de la diagonale dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. La mesure dA étant diffuse, la diagonale est de mesure nulle, et l'intégrale tend bien vers 0 .

Pour passer de l'hypothèse (12) à une hypothèse beaucoup plus satisfaisante, invariante par changement de probabilité dans la classe d'équivalence de P , il suffit de remarquer que nous raisonnons <u>en probabilité</u>. L'hypothèse suivante (plus faible que (12) et aussi que (1)) suffit donc

(14) <u>Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble</u> U <u>de probabilité</u> $\geq 1-\varepsilon$, <u>et une constante</u> C (dépendant de U et de a) <u>tels que l'on ait</u>

$$E[|Y_t-Y_s|^2 I_U] \leqq C|t-s| \text{ pour } s,t\leqq a \quad .$$

Supposons par exemple que Y soit elle aussi une semimartingale satisfaisant à l'hypothèse (1) : $Y=Y_0+M+A$, avec $d\langle M,M\rangle_t = \mu_t dt$ ($\mu_.$ localement borné) et $dA_t=\alpha_t dt$ ($\alpha_.$ localement dans L^2). Posons

$$T = \inf\{t : |\mu_t|>K \text{ ou } \int_0^t \alpha_s^2 ds > K \}$$

et prenons K assez grand pour que $U=\{T>a\}$ ait une probabilité $\geqq 1-\varepsilon$. Nous avons

$$E[|Y_t-Y_s|^2 I_U] \leqq E[|Y_{t\wedge T}-Y_{s\wedge T}|^2] \leqq 2E[|M_{t\wedge T}-M_{s\wedge T}|^2+|A_{t\wedge T}-A_{s\wedge T}|^2]$$
$$\leqq 2K|t-s| + 2E[(\int_{s\wedge T}^{t\wedge T}\alpha_s ds)^2]$$

Dans le dernier terme, nous appliquons l'inégalité de Schwarz, qui fait apparaître $E[\int_{s\wedge T}^{t\wedge T}ds \int_{s\wedge T}^{t\wedge T}\alpha_s^2 ds] \leqq |t-s|E[\int_0^T \alpha_s^2 ds] \leqq K|t-s|$.

5. Décrivons maintenant comment on traite le cas d'un processus $Y(t,x)$ contenant un paramètre $x\in\mathbb{R}^d$. Dans l'expression de I^m (4), on remplace Y_n^m (3) par l'expression suivante :

(15) $$Y_n^m = Y(t(u_n^m)\wedge t(u_{n+1}^m),\ x(\tilde{u}_n^m)) \quad \text{avec} \quad \tilde{u}_n^m\in[u_n^m,u_{n+1}^m]$$

où $x(.)$ est une application à variation bornée, continue, à valeurs dans dans $\mathbb{R}^d$. Après quoi il n'y a plus aucun changement jusqu'à (11). Pour majorer l'expression (11), nous faisons une hypothèse du type de (12)

(16) $$E[|Y(t,x)-Y(s,x')|^2] \leqq C(|t-s|+\|x-x'\|^{1+\eta}) \quad , \eta>0$$

lorsque s,t varient dans [0,a] et x,x' varient dans un compact K . Nous voyons alors apparaître des termes supplémentaires du type

$$\Sigma_{n'\in G(k)}\|x(\tilde{u}_{n'}^{m'})-x(\tilde{u}_{n''}^{m'})\|^{1+\eta} \leqq S^\eta \mathrm{Var}(x)$$

où $S = \sup_n \sup_{s,t\in[u_n^m,u_{n+1}^m]} \|x(u)-x(v)\|$ tend vers 0 lorsque $m\to\infty$.

Multipliant alors par $A_{\beta_{k+1}}-A_{\beta_k}$ et sommant sur k , il nous reste une quantité $S^\eta\mathrm{Var}(x)\mathrm{Var}(t)$ qui tend encore vers 0 . Le remplacement de (16) par une condition locale analogue à (14)

(16') $$E[|Y(t,x)-Y(s,x')|^2 I_U] \leqq C(|t-s|+\|x-x'\|^{1+\eta})$$

ne crée pas de difficulté.

6. REMARQUE. Nous avons essayé (malheureusement sans succès) de traiter le cas où le changement de temps (t_u) est aléatoire. Nous voudrions montrer où se trouve la difficulté. Nous faisons l'hypothèse raisonnable que pour tout u , t_u est un temps d'arrêt. Alors les β_k sont aussi des temps d'arrêt (le nombre $L+1$ des β_k distincts est aléatoire, mais cela n'a aucune importance), t_n^m et $\hat{t}_n^m$ sont des temps d'arrêt, et l'événement (5) $\{t_n^m \leq \beta_k < \hat{t}_n^m\}$ est $\underline{\underline{F}}_{\beta_k}$-mesurable ; sur cet événement $Y_n^m = Y(t_n^m)$ est $\underline{\underline{F}}_{\beta_k}$-mesurable, donc Φ_k, Φ_k' sont $\underline{\underline{F}}_{\beta_k}$-mesurables, et le lemme 1 reste vrai.

Le point où le raisonnement se trouve en défaut est l'application de (12) : nous ne savons par quel argument le remplacer à cette étape.

7. Récapitulons les résultats obtenus, sous forme de théorème :

THEOREME 1. Supposons que la fonction $t(u)$ soit déterministe, continue à variation bornée, que X soit une semimartingale continue satisfaisant à (1) , que Y soit un processus prévisible satisfaisant à (14).

Alors les sommes de Riemann I^m relatives aux subdivisions dyadiques de $[0,1]$ convergent en probabilité vers une limite, appelée intégrale non monotone d'Ito, et désignée par la notation $\int_0^1 Y(t_u,.)dX_{t_u}$.

Si Y dépend du paramètre x , on définit de même (pour $x(u)$ fonction continue à variation bornée) une intégrale non monotone d'Ito du type $\int_0^1 Y(t_u,x_u,.)dX_{t_u}$, sous la condition (16) ou (16') sur Y .

En réalité, la démonstration précédente montre que si σ est une subdivision suffisamment fine de $[0,1]$, σ' une subdivision plus fine, la distance en probabilité entre les sommes de Riemann (2) ou (15) relatives à σ et σ' est petite. L'intégrale non monotone est donc indépendante du choix particulier des subdivisions dyadiques.

8. EXEMPLES. Lorsque la fonction t est croissante, l'intégrale est une i.s. ordinaire, et il en est de même lorsque t est décroissante . Supposons ensuite que l'intervalle $[0,1]$ soit partagé en un nombre fini d'intervalles (u_i,u_{i+1}) dans chacun desquels la fonction est monotone. Posons $\varepsilon_u=+1$ dans $]u_i,u_{i+1}[$ si t y est croissante au sens large, $\varepsilon_u=-1$ si t y est décroissante, et $\varepsilon_u=0$ aux points u_i . Alors on a

$$(17)\qquad \int_0^1 Y(t_u,x_u,.)dX_{t_u} = \int_0^\infty \Sigma_s\, dX_s \quad \text{(intégrale d'Ito usuelle)}$$

$$\Sigma_s = \Sigma_{\{u:t(u)=s\}}\, Y(t_u,x_u,.)\varepsilon_u$$

Nous tenterons plus loin d'étendre cette formule à des situations plus générales.

Examinons le cas déterministe : une fonction $X(r)$ continue à variation finie satisfait à (1) si

(18) $$X(r) = \int_0^s \xi(r)dr \quad , \quad \xi \in L^2_{loc}$$

Traitons pour simplifier le cas sans paramètres. L'hypothèse (14) se réduit pour une fonction déterministe $Y(t)$ à une condition de Hölder d'exposant 1/2

(18') $$|Y(t)-Y(s)| \leqq C|t-s|^{1/2} \quad (\text{ localement sur } \mathbb{R}_+)$$

Lorsque la fonction $t(u)$ est continue à variation bornée sur $[0,1]$, rien ne permet d'affirmer que la fonction composée $X\circ t$ est à variation bornée (à moins que X ne soit lipschitzienne, condition plus forte que (18)). Donc l'intégrale que nous avons définie n'est pas en général une intégrale de Stieltjes ordinaire. Nous allons voir ce que l'on peut dire si la fonction $t(u)$ est de classe C^1 au lieu d'être simplement à variation finie. Rappelons dans ce cas un lemme classique

LEMME 2. Soit μ la mesure image de la mesure de Lebesgue du par t .
a) L'ensemble des $s \in \mathbb{R}^+$ qui sont des valeurs critiques de t (i.e., il existe u tel que $t(u)=s$, $t'(u)=0$) est de mesure nulle dans $\mathbb{R}_+$.
b) La fonction $c(s) = \text{card}\{u : t(u)=s\}$ est borélienne, et l'on a

(19) $$\int_0^\infty c(s)ds = \text{Var}(t) \ .$$

c) La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, avec pour densité la fonction (finie p.p. d'après a),b))

(20) $$\Sigma_{\{u:t(u)=s\}} 1/|t'(u)|$$

et plus généralement la mesure image de la mesure $f(u)du$ (f borélienne sur $[0,1]$) admet pour densité

(21) $$\Sigma_{\{u:t(u)=s\}} f(u)/|t'(u)|$$

Prenons alors pour $X(r)$ une fonction de classe C^1, pour commencer. Alors $X\circ t$ est de classe C^1, et sa variation totale est

$$\int_0^1 |\tfrac{d}{du}X(t(u))|du = \int_0^1 |X'(t(u))|\,|t'(u)|du =$$
$$= \int_0^\infty |X'(s)|(\Sigma_{\{u:t(u)=s\}} |t'(u)|/|t'(u)|)ds$$
$$= \int_0^\infty |X'(s)|c(s)ds$$

On voit donc que la condition raisonnable permettant d'assurer que $X\circ t$ est à variation bornée pour X de la forme (18) est la condition (π) introduite par Bismut, c'est à dire

(22) $$\int_0^\infty c^2(s)ds < \infty$$

Cette condition est malheureusement difficile à vérifier, mais elle est très naturelle dans ce genre de problèmes.

Dans ce cas, puisque la fonction $X\circ t$ est à variation bornée, l'approximation usuelle par les sommes de Riemann montre que l'intégrale d'Ito non monotone se réduit à l'intégrale de Stieltjes $\int_0^1 Y(t_u,x_u)dX_{t_u}$. Montrons que l'on a aussi

(23) $$\int_0^1 Y(t_u,x_u)dX_{t_u} = \int_0^\infty (\Sigma_{\{u:t(u)=s\}} Y(t_u,x_u)\mathrm{sgn}(t'_u))dX_s$$

Pour cela, nous remarquons que si Y est borné en valeur absolue par une constante M , le terme sous le signe $\int$ à droite est majoré en valeur absolue par $Mc(s)$, et $\int_0^\infty c(s)|dX_s| < \infty$ d'après (18) et (22). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et raisonner par « classes monotones » . Il suffit donc de vérifier (23) lorsque $Y(t,x)$ est de la forme $Y(t)g(x)$. D'autre part, si l'on approche la fonction ξ de (18) par des fonctions continues, au sens de L^2_{loc} , les mesures correspondantes dX_s , dX_{t_u} convergent localement en norme. On peut donc se ramener au cas où $X(s)$ est de classe C^1, et la formule se réduit à

$$\int_0^1 Y(t_u)g(x_u)X'(t_u)t'_u du = \int_0^\infty (\Sigma_{t(u)=s} Y(t_u)g(x_u)\mathrm{sgn}(t'_u))X'_s ds$$

c'est à dire (21) avec $f(u)=Y(t_u)g(x_u)t'_u$.

9. Notre but va être maintenant d'établir la formule (23) dans le cas stochastique. Nous supposons t de classe C^1 (mais <u>nous ne supposons pas la condition π</u>, sauf mention explicite du contraire). Nous supposons que X satisfait à la condition (1). Quant à Y , nous le supposons pour simplifier <u>continu en (t,x)</u> - on pourrait sans doute s'affranchir de cette hypothèse - et satisfaisant à une hypothèse du type (14) avec paramètre :

(24) $$E[|Y(t,x)-Y(s,x')|^2 I_U] \leq C(|t-s|+\|x-x'\|^{1+\eta})$$

avec $P(U)$ arbitrairement voisin de 1, et C dépendant de U.

Rappelons aussi quelques résultats du début. Tout d'abord, nous pouvons écrire (6) sous la forme

(25) $$I^m = \int_0^\infty J^m_s dX_s \quad \text{avec } J^m_s=\Phi_k=\Sigma_{n\in H(k)} Y^m_n\varepsilon^m_n \text{ si } s\in]\beta_k,\beta_{k+1}]$$

et $J^m_s=0$ si s n'appartient à aucun de ces intervalles. Si s n'est pas une valeur critique de $t(.)$, l'ensemble $\{u : t(u)=s\}$ est fini (sinon, il aurait un point d'accumulation où t' s'annulerait), et J^m_s tend vers

(26) $$J_s = \Sigma_{t(u)=s} Y(t_u,x_u,.)\mathrm{sgn}(t'_u)$$

On a utilisé ici la continuité de Y pour avoir convergence p.s. en ω , mais sans continuité de Y on aurait encore convergence en probabilité.

D'après le lemme 2 a), $J_s^m(\omega) \to J_s(\omega)$ p.s. sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ relativement à la mesure $dP(\omega)ds$, et aussi pour la mesure $\Pi(ds,d\omega) = dP(\omega)d\langle X,X\rangle_s(\omega)$, qui est absolument continue par rapport à la précédente.

LEMME 3. Supposons que Y satisfasse à (24) avec $U=\Omega$, et que X soit une martingale locale satisfaisant à (1). Alors l'i.s. $\int_0^\infty J_s dX_s$ existe et vaut $\int_0^1 Y(t_u,x_u,.)dX_{t_u}$.

Démonstration. Par hypothèse, $d\langle X,X\rangle_t = \mu_t dt$, où (μ_t) est un processus localement borné. Remarquons aussi que $J_s=0$ pour $s> \sup_u t(u)$. On peut se ramener par arrêt à des $T_n\uparrow\infty$ au cas où (μ_t) est borné, autrement dit où $d\langle X,X\rangle_t \leqq Cdt$; X est donc une martingale de carré intégrable.

Reprenant alors la démonstration du théorème 1, on voit après la formule (12) que $E[D_{m,m'}]\to 0$ pour $m\to\infty$, $m'>m$, donc en (8) l'expression tend vers 0, non seulement en probabilité mais dans L^1, et comme $d\langle X,X\rangle_t \leqq Cdt$, les I^m convergent dans $L^2(P)$ vers $\int Y(t_u,x_u)dX_{t_u}$. D'après la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique, les J_s^m convergent dans $L^2(\Pi)$ vers un processus prévisible $\hat{J}_s$ tel que $\int Y(t_u,x_u)dX_{t_u} = \int \hat{J}_s dX_s$. Mais cette limite ne peut être autre que J_s , et le lemme en découle.

LEMME 4. Supposons que Y satisfasse à (24). Alors $E[I_U \int_0^\infty (J_s^m - J_s)^2 ds]\to 0$.

Démonstration. Cet énoncé ne contenant aucune semimartingale, nous pouvons sans aucune difficulté conditionner par U, autrement dit nous ramener au cas où $U=\Omega$. Adjoignons alors à la filtration un mouvement brownien indépendant (X_t), et appliquons le résultat précédent : le lemme exprime simplement le résultat de convergence dans L^2 de I^m vers $\int J_s dX_s$.

THEOREME 2. Supposons que Y soit continu et satisfasse à (24), que X satisfasse à (1), que $t(.)$ soit de classe C^1. Alors on a p.s.

$$\int_0^1 Y(t_u,x_u,.)dX_{t_u} = \int_0^\infty J_s dX_s \ . \tag{27}$$

Démonstration. On applique le lemme 4 et la propriété (1') : les i.s. $\int J_s^m dX_s$ - qui sont les sommes de Riemann I^m - convergent en probabilité vers $\int J_s dX_s$.

COROLLAIRE. Si Y ne dépend que de t , on a $\int_0^1 Y(t_u,.)dX_{t_u} = \varepsilon \int_{t(0)\wedge t(1)}^{t(0)\vee t(1)} Y_s dX_s$ avec $\varepsilon=+1$ si $t(0)\leqq t(1)$, -1 sinon.

Démonstration. Pour toute valeur s non critique, $\Sigma_{t(u)=s}\, \mathrm{sgn}(t'_u) = \varepsilon$.

REMARQUE. Le théorème 2 avec X brownien et Y déterministe donne le théorème suivant : Si $|Y(t,x)-Y(s,x')|^2 \leqq k(|t-s|+\|x-x'\|^{1+\eta})$, on a

$$\int_0^\infty (\Sigma_{t(u)=s}\, Y(t_u,x_u)\mathrm{sgn}(t'_u))^2 ds < \infty \quad (\text{ sans condition } \pi\ ) \ .$$

II. INTEGRALES NON MONOTONES DE STRATONOVITCH

1. Nous suivons toujours le travail de Bismut, en tentant de rechercher des hypothèses naturelles pour la validité des théorèmes. Nous allons maintenant chercher à définir une intégrale stochastique du type de Stratonovitch, symétrique par retournement du temps. Cela revient à étudier la convergence de sommes de Riemann du type suivant (pour le cas sans paramètre d'abord), que l'on comparera à (2)

$$(28) \qquad J^m = \Sigma_n\, Y(t(u_n^m)\vee t(u_{n+1}^m))(X_{t(u_{n+1}^m)}-X_{t(u_n^m)})$$

Si l'on sait établir la convergence de J^m, l'intégrale de Stratonovitch sera la limite de $\frac{1}{2}(I^m+J^m)$.

Dans le cas avec paramètre, il faut écrire $Y(t(u_n^m)\vee t(u_{n+1}^m),\ x(\tilde{u}_n^m))$ dans la formule, avec $\tilde{u}_n^m\in[u_n^m,u_{n+1}^m]$.

La méthode classique pour étudier (28) consiste à étudier J^m-I^m, qui se trouve être dans le cas monotone du type "variation quadratique mixte" et converge donc vers un crochet. Mais ici, cette méthode ne marche pas, car la différence J^m-I^m est égale à

$$(29) \qquad \Sigma_n\, \varepsilon_n^m[Y(t(u_{n+1}^m))-Y(t(u_n^m))](X_{t(u_{n+1}^m)}-X_{t(u_n^m)})$$

et le coefficient ε_n^m (défini en (3)) ne permet pas de ramener immédiatement l'étude de J^m-I^m à celle d'un " crochet non monotone " . Nous donnerons cependant plus loin quelques résultats sur la " variation quadratique non monotone" de Y , car cela présente un intérêt indépendant.

2. Nous allons transformer directement la somme (28). Nous écrirons $T_n = t(u_m^n)$ pour abréger (on n'écrit pas t_n^m parce que cette notation a déjà été utilisée en (3) pour écrire $t(u_n^m)\wedge t(u_{n+1}^m)$). Alors J^m s'écrit

$$\Sigma_n\, Y(T_n\vee T_{n+1})(X_{T_{n+1}}-X_{T_n})$$

<u>Pour l'instant</u>, <u>nous laissons de côté le paramètre</u> (voir n°3 plus bas). Nous regroupons chaque terme de cette somme avec le terme précédent

$$Y(T_{n-1}\vee T_n)(X_{T_n}-X_{T_{n-1}})$$

et nous obtenons ainsi

- un premier terme $-Y(T_0\vee T_1)X_{T_0}$ qui tend vers $-Y(t(0))X_{t(0)}$
- un dernier terme $Y(T_{N-1}\vee T_N)X_{T_N}$ qui tend vers $Y(t(1))X_{t(1)}$
- une somme qui fait intervenir les triplets de points consécutifs. <u>nous la remplaçons ici par son opposée</u> :

(30) $\qquad \Sigma_{0<n<N} \quad X(T_n)[\ Y(T_n \vee T_{n+1}) - Y(T_n \vee T_{n-1})]$

Nous allons examiner le terme général de cette somme, suivant la disposition du triplet. Il y a d'abord les deux triplets pour lesquels T_n est entre T_{n-1} et T_{n+1} , puis deux triplets pour lesquels T_n est hors de l'intervalle : dans chaque cas, nous indiquons la valeur du terme

a) $T_{n-1} \leqq T_n \leqq T_{n+1} \qquad X(T_n)[Y(T_{n+1})-Y(T_n)] = \varepsilon_n^m X(t_n^m)(Y(\hat{t}_n^m)-Y(t_n^m))$

b) $T_{n-1} \geqq T_n \geqq T_{n+1} \qquad X(T_n)[Y(T_n)-Y(T_{n-1})] = \varepsilon_{n-1}^m X(t_{n-1}^m)(Y(\hat{t}_{n-1}^m)-Y(t_{n-1}^m))$

c) $T_n \geqq T_{n-1}, T_{n+1} \qquad X(T_n)[Y(T_n)-Y(T_n)] = 0$

d) $T_n \leqq T_{n-1}, T_{n+1} \qquad X(T_n)[Y(T_{n+1})-Y(T_{n-1})] = \varepsilon_n^m X(t_n^m)(Y(\hat{t}_n^m)-Y(t_n^m)) + \varepsilon_{n+1}^m X(t_{n+1}^m)(Y(\hat{t}_{n+1}^m)-Y(\hat{t}_n^m))$

en rappelant que $t_n^m = T_n \wedge T_{n+1}$, $\hat{t}_n^m = T_n \vee T_{n+1}$. Une inspection des divers cas montre alors que chaque terme non nul de la somme

(31) $\qquad \Sigma_{0<n<N} \quad \varepsilon_n^m X(t_n^m)(Y(\hat{t}_n^m)-Y(t_n^m))$

apparaît une fois et une seule dans la somme (30), et il est inutile de s'occuper de ce qui se passe pour n=0 ou n=N, les termes correspondants tendant vers 0. Autrement dit, à des termes qui tendent vers 0 près, on a avec des notations faciles à comprendre

(32) $\qquad J^m(X,Y) = X(t(1))Y(t(1)) - X(t(0))Y(t(0)) - I^m(Y,X)$

qui est une formule d'intégration par parties. Cela permet de résoudre complètement le cas sans paramètre :

THEOREME 3. Supposons que le processus Y (sans paramètre) soit une semimartingale satisfaisant à la condition (1) de même que X . Alors les sommes de Riemann J^m (28) convergent en probabilité vers

(33) $\qquad Y(t(1))X_{t(1)} - Y(t(0))X_{t(0)} - \int_0^1 X_{t_u} dY_{t_u}$

en supposant seulement $t_.$ à variation finie. Par conséquent, les sommes de Riemann $\frac{1}{2}(I^m+J^m)$ définissant l'intégrale de Stratonovitch convergent aussi en probabilité.

3. Nous passons au cas avec paramètre. Les transformations formelles que nous avons faites restent entièrement correctes, mais nous aboutissons à des sommes de Riemann du type "Ito" que nous n'avons pas étudiées au paragraphe 1, parce que le paramètre y figure dans la semimartingale directrice, et non dans le processus intégré

(34) $\qquad \Sigma_m \ \varepsilon_n^m X(t_n^m)[Y(\hat{t}_n^m, x(\tau_n^m)) - Y(t_n^m, x(\tau_n^m))]$

Déjà dans le théorème 3, pour avoir une intégrale de Stratonovitch sans paramètre, nous avons supposé que Y était une semimartingale satisfaisant à (1). Pour traiter le cas avec paramètre, nous allons supposer que Y satisfait à une condition du type considéré par Kunita

$$(35) \qquad Y(t,x,.) = \int_0^t h(s,x,.)dZ_s$$

où (Z_t) est une semimartingale satisfaisant à (1), et $h(s,x,.)$ satisfait aux conditions indiquées plus bas. Plus exactement, le type considéré par Kunita, qui apparaît tout à fait naturellement en théorie des équations différentielles stochastiques, est une <u>somme finie</u> de processus (35), à laquelle on ajoute encore un terme $Y_0(x,\omega)$ lipschitzien en x, que nous n'introduirons pas ici.

Nous ferons sur h l'hypothèse suivante : il est adapté en t, continu en (t,x), et pour tout $\varepsilon>0$, tout compact K de $\mathbb{R}^d$, tout $a<\infty$, il existe $U\subset\Omega$ de probabilité $>1-\varepsilon$ tel que (cf. (16), (16'))

$$(36) \qquad E[|h(t,x)-h(s,x')|^2 I_U] \leqq C(|t-s|+\|x-x'\|^{1+\eta}) \qquad \begin{matrix} s,t\leqq a \\ x,x'\in U \end{matrix}$$

C dépendant de ε,a,K. Cela va nous permettre d'affirmer que le processus

$$(37) \qquad V(t,x,.) = X_t(.)h(t,x,.)$$

satisfait à la condition (16') : pour le voir, il suffit de se restreindre à un ensemble U de probabilité $\geqq 1-\varepsilon$ sur lequel on a[1]

$$\sup_{t\leqq a}|X_t| \leqq M \ , \quad \sup_{s\leqq a,\ x\in K} |h(s,x)| \leqq M$$

où M est une constante assez grande. Dans ces conditions, nous allons montrer que <u>les sommes de Riemann</u> (34) <u>convergent vers l'intégrale non monotone</u>

$$(38) \qquad \int_0^1 V(t_u,x_u,.)dZ_u \quad .$$

Pour voir cela, nous écrivons la somme de Riemann I^m relative à (38) sous la forme vue au paragraphe I , formule (6), que nous récrivons

$$(39) \qquad I^m = \int_0^\infty \varphi_s dZ_s \quad , \quad \varphi_s = \Sigma_{n\in H(k)} V_n^m \varepsilon_n^m \quad \text{pour} \quad s\in]\beta_k,\beta_{k+1}]$$

soit explicitement $\varphi_s = \Sigma_{n\in H(k)} \varepsilon_n^m X(t_n^m)h(t_n^m,x(\tilde{u}_n^m))$ pour $s\in]\beta_k,\beta_{k+1}]$.

D'autre part, la somme de Riemann (34) s'écrit

$$\int_0^\infty \psi_s dZ_s \quad , \quad \psi_s = \Sigma_n \ \varepsilon_n^m X(t_n^m)h(s,x(\tilde{u}_n^m))I_{]t_n^m,\hat{t}_n^m]}(s)$$

$$= \Sigma_{n\in H(k)} \ \varepsilon_n^m X(t_n^m)h(s,x(\tilde{u}_n^m)) \quad \text{pour} \quad s\in]\beta_k,\beta_{k+1}]$$

<u>puisque $n\in H(k)$ signifie</u> que $]t_n^m,\hat{t}_n^m] \supset]\beta_k,\beta_{k+1}]$ (cf. (5)). Comme Z

1. Nous laissons les détails au lecteur.

possède la propriété (1), il s'agit maintenant de vérifier que

$$\int_0^{\infty}(\varphi_s-\psi_s)^2 ds \quad \text{est petit en probabilité}$$

si la subdivision (u_n^m) est assez fine. Cela revient (comme $\varepsilon_n^m X(t_n^m)$ reste borné par une v.a. finie fixée) à étudier

(40) $$\Sigma_k \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} \Sigma_{n\in H(k)}(h(t_n^m,x(\tilde{u}_n^m))-h(s,x(\tilde{u}_n^m))^2\, ds$$

Pour simplifier les notations, nous allons supposer que l'ensemble U de (36) est Ω entier. Prenant $a > \sup_u t_u$ et K contenant l'image de la courbe $x(.)$, l'espérance de la v.a. (40) est alors majorée par

$$C\, \Sigma_k \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} \Sigma_{n\in H(k)} |t_n^m-s|\, ds$$

Comme $s\in]\beta_k,\beta_{k+1}]$, $n\in H(k)$ entraîne $t_n^m\leq s\leq \hat{t}_n^m$, on peut borner tous les $|t_n^m-s|$ par une quantité qui tend vers 0, et il reste simplement à montrer que $\Sigma_k \operatorname{card}(H(k))(\beta_{k+1}-\beta_k)$ reste borné . Or nous avons

$$\operatorname{card}(H(k)) \leq \frac{\operatorname{Var}(t(.))}{\beta_{k+1}-\beta_k}$$

majoration d'ailleurs grossière (cf. le § I, juste avant la formule (11)). Nous avons donc établi la convergence désirée.

Donnons un énoncé formel.

THEOREME 4. <u>On suppose que</u> t <u>et</u> x <u>sont à variation finie, que</u> X <u>satisfait à la condition</u> (1), <u>que</u> $Y(t,x)$ <u>est de la forme</u>

(41) $$Y(t,x,.) = \int_0^t h(s,x,.)dZ_s$$

<u>où</u> Z <u>satisfait à la condition</u> (1), <u>et</u> h <u>est continu en</u> (t,x) <u>et satisfait à</u> (36). <u>Alors les sommes de Riemann "anticipantes"</u> (28)

(42) $$J^m = \Sigma_n\, Y((t(u_n^m)\vee t(u_{n+1}^m),x(\tilde{u}_n^m))(X_{t(u_{n+1}^m)}-X_{t(u_n^m)})$$

<u>convergent en probabilité vers la v.a.</u>

(43) $$X_{t(1)}Y(t(1),x(1))-X_{t(0)}Y(t(0),x(0))-\int_0^1 X_{t_u}h(t_u,x_u)dZ_{t_u}.$$

<u>En conséquence, les sommes de Riemann du type de Stratonovitch</u> $\frac{1}{2}(I^m+J^m)$ <u>convergent aussi en probabilité.</u>

Comme au paragraphe I, on notera que toutes les hypothèses sont préservées par changement de probabilité absolument continu.

Nous notons $\int_0^1 Y(t_u,x_u,.)*dX_{t_u} = P\text{-}\lim \frac{1}{2}(I^m+J^m)$, et l'appelons <u>intégrale non monotone de Stratonovitch</u>.

COROLLAIRE. <u>Si</u> $h(s,x,.)=1$, <u>alors</u> $Y(t,x,.)=Z(t,.)$ <u>et donc</u>

$$\begin{aligned}\int_0^1 Y(t_u,x_u,.)*dX_{t_u} &= \frac{\varepsilon}{2}\Big(\int_{t(0)\wedge t(1)}^{t(0)\vee t(1)} Y_s dX_s + X_{t(0)\vee t(1)}Y_{t(0)\vee t(1)} - X_{t(0)\wedge t(1)}Y_{t(0)\wedge t(1)} \\ &\qquad - \int_{t(0)\wedge t(1)}^{t(0)\vee t(1)} X_s dZ_s\Big) \\ &= \varepsilon\Big(\int_{t(0)\wedge t(1)}^{t(0)\vee t(1)} Y_s * dX_s\Big)\end{aligned}$$

<u>avec</u> $\varepsilon=1$ <u>si</u> $t(0)\leqq t(1)$, <u>-1 sinon</u>.

Démonstration. Nous la laissons au lecteur.

Dans le cas monotone, nous nous intéressons à la limite des sommes $\Sigma_n(X_{t^m_{n+1}}-X_{t^m_n})^2$, qui est juste égale à $2(\int_0^1 X_t*dX_t-\int_0^1 X_t dX_t)$. Mais dans le cas non monotone, la situation est un peu différente. Nous introduisons d'abord un lemme.

LEMME 5. <u>Soit</u> $\{[s^m_n,t^m_n]_{1\leqq n\leqq N(m)}\}_m$ <u>une suite de recouvrements fermés de l'intervalle</u> $[a,b]$ <u>telle que</u> $\max_n|t^m_n-s^m_n|\to 0$ $(m\to\infty)$. <u>Soit</u> X_t <u>une semimartingale continue. Alors, étant donnés</u> $q,p>0$ <u>quelconques, si</u> m <u>est suffisamment grand, on a</u>

$$P[\Sigma_n(X_{t^m_n}-X_{s^m_n})^2 \leqq \langle X,X\rangle_b-\langle X,X\rangle_a-q] \leqq p \ .$$

<u>Démonstration.</u> Nous pouvons supposer que $s^m_{n+1}\leqq t^m_n\leqq t^m_{n+1}$ et que X soit bornée. Nous écrivons

$$\Sigma_n(X_{t^m_n}-X_{s^m_n})^2=\Sigma_n(X_{t^m_{n+1}}-X_{t^m_n})^2+\Sigma_n(X_{t^m_n}-X_{s^m_n})^2+(X_{t^m_1}-X_{s^m_1})^2+2\Sigma_n(X_{t^m_{n+1}}-X_{t^m_n})(X_{t^m_n}-X_{s^m_{n+1}}) \ .$$

Il est facile de vérifier que

$$\Sigma_n(X_{t^m_{n+1}}-X_{t^m_n})^2+(X_{t^m_1}-X_{s^m_1})^2 \xrightarrow{P} \langle X,X\rangle_b-\langle X,X\rangle_a \ ,$$

et que

$$\Sigma_n(X_{t^m_{n+1}}-X_{t^m_n})(X_{t^m_n}-X_{s^m_{n+1}})=\int_a^b H^m_s dX_s \xrightarrow{P} 0, \quad \text{où } H^m_s \overset{\text{déf}}{=} X_{t^m_n}-X_{s^m_{n+1}} \ (t^m_n<s\leqq t^m_{n+1}); \ \overset{\text{déf}}{=} 0 \ (s\leqq t^m_1).$$

Puisque $\Sigma_n(X_{t^m_n}-X_{s^m_n})^2\geqq 0$, nous arrivons à la conclusion.

Nous donnons un théorème sur l'approximation de la variation quadratique.

THEOREME 5. Soit $\sigma^m=\{0=u_0^m<u_1^m<\ldots<u_{N(m)}^m=1\}$ une suite de subdivisions de plus en plus fines de $[0,1]$, dont le pas tend vers 0, et soit X une martingale continue. Supposons que $t(u)$ soit une fonction à variation finie telle que $\langle X,X\rangle_{t(u)}$ soit un processus continu à variation finie, $E[\operatorname{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}]<\infty$. On a alors

$$\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2 \xrightarrow{P} \operatorname{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}$$

Démonstration. D'abord, étant donnés $p,q>0$ quelconques, nous notons r un réel tel que $r\leqq p/8$ et que

$$(44)\qquad E[\operatorname{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}.I_A]\leqq\tfrac{1}{4}qp\ ,\qquad(\forall A\in\underline{\underline{F}};\ P[A]\leqq 2r\ ).$$

Il est facile de voir qu'il existe un $\underline{m}$ tel que pour $\forall m\geqq\underline{m}$,

$$(45)\qquad P[\,|\Sigma_n|\langle X,X\rangle_{t(u^m_{n+1})}-\langle X,X\rangle_{t(u^m_n)}|-(\operatorname{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)})|\geqq\tfrac{pq}{4}\ ]\leqq r\ .$$

Pour $m\geqq\underline{m}$, nous écrivons les subdivisions σ^m comme $\{\hat{u}^{m,j}_{n'}\}$ (puisque σ^m est plus fine que $\sigma^{\underline{m}}$):

$$u^{\underline{m}}_{n'}=\hat{u}^{m,0}_{n'}<\ldots<\hat{u}^{m,J}_{n'}=u^{\underline{m}}_{n'+1}\ ,\ \text{(où J est un nombre qui dépend de }(m,n'))\ .$$

Nous considérons la somme $\Sigma_{n',j}(X_{t(\hat{u}^{m,j+1}_{n'})}-X_{t(\hat{u}^{m,j}_{n'})})^2=\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2$. D'après le lemme précédent, il existe $\bar{m}\geqq\underline{m}$ tel que pour $\forall m\geqq\bar{m}$, on ait

$$(46)\qquad P[\Sigma_{n',j}(X_{t(u^{m,j+1}_{n'})}-X_{t(u^{m,j}_{n'})})^2\leqq\Sigma_{n'}|\langle X,X\rangle_{t(u^{\underline{m}}_{n'+1})}-\langle X,X\rangle_{t(u^{\underline{m}}_{n'})}|-\tfrac{pq}{4}\ ]\leqq r\ .$$

Enfin, d'après (45) et (46), pour $m\geqq\bar{m}$,

$$(47)\qquad P[\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2\leqq\operatorname{Var}_{u\in[0,1]}(\langle X,X\rangle_{t(u)})-\tfrac{pq}{2}\ ]\leqq 2r\ .$$

Réciproquement, on a

$$(48)\qquad E[\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2]\leqq\Sigma_n E|\langle X,X\rangle_{t(u^m_{n+1})}-\langle X,X\rangle_{t(u^m_n)}|\to E[\operatorname{Var}_{u\in[0,1]}(\langle X,X\rangle_{t(u)})]\ .$$

Notons

$$A=\{\omega;\ q>\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}(\omega)-X_{t(u^m_n)}(\omega))^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}(\langle X,X\rangle_{t(u)}(\omega))>\frac{pq}{2}\}\ ,$$

$$B=\{\omega;\ \Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}(\omega)-X_{t(u^m_n)}(\omega))^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}(\langle X,X\rangle_{t(u)}(\omega))\leqq\frac{pq}{2}\}\ .$$

Alors, d'après (48), on a

(49) $$0\geqq E[\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}]$$

$$\geqq E[(\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)})I_A]$$

$$+E[(\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)})I_B]$$

$$+q.P[\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}\geqq q]$$

Mais, de (44) et de (48), on déduit

(50) $$E[(\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)})I_B]\geqq-E[\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}I_B]\geqq-\frac{pq}{4}\ ,$$

d'autre part

(51) $$E[(\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)})I_A]\geqq-\frac{pq}{2}\ .$$

Enfin, de (49)-(51), on a

$$P[\Sigma_n(X_{t(u^m_{n+1})}-X_{t(u^m_n)})^2-\operatorname*{Var}_{u\in[0,1]}\langle X,X\rangle_{t(u)}\geqq q]\leqq(\frac{pq}{2}+\frac{pq}{4})q^{-1}\leqq\frac{3}{4}p\ .$$

Cette inégalité et la formule (47) forment la conclusion du théorème.

III. DEUX FORMULES DE BISMUT

Nous introduisons deux formules dues à Bismut[1], qui les a prises comme les définitions des intégrales non monotones.

THEOREME 6. Sous l'hypothèse du théorème 1, s'il existe un processus $Z(t,x)$ tel que $Z(t,x)=\int_0^t Y(s,x)dX_s$ et que $\frac{\partial}{\partial x}Z(t,x)$ existe et soit continu par rapport à (t,x), alors

$$\int_0^1 Y(t_u,x_u)dX_{t_u} = Z(t_1,x_1)-Z(t_0,x_0)-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}Z(t_u,x_u)dx_u \quad .$$

Démonstration. On prend une suite de subdivisions $\sigma^m=(u_n^m)$ de $[0,1]$ comme au paragraphe 1.

$$Z(t_1,x_1)-Z(t_0,x_0)=\Sigma_n(Z(t_{u_{n+1}^m},x_{u_{n+1}^m})-Z(t_{u_n^m},x_{u_n^m}))$$

$$=\Sigma_n(Z(t_{u_{n+1}^m},x_{u_{n+1}^m})-Z(t_{u_n^m},x_{u_{n+1}^m}))+\Sigma_n(Z(t_{u_n^m},x_{u_{n+1}^m})-Z(t_{u_n^m},x_{u_n^m})) \; .$$

On regarde d'abord le second terme du côté droit de cette équation,

$$\Sigma_n(Z(t_{u_n^m},x_{u_{n+1}^m})-Z(t_{u_n^m},x_{u_n^m}))=\Sigma_n \frac{\partial}{\partial x}Z(t_{u_n^m},x_{T_n^m})(x_{u_{n+1}^m}-x_{u_n^m}) \longrightarrow \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} Z(t_u,x_u)dx_u$$

où T_n^m est une variable aléatoire telle que $T_n^m\in[u_n^m,u_{n+1}^m]$. On montre ensuite que le premier terme du coté droit de (52) tend vers $\int_0^1 Y(t_u,x_u)dX_{t_u}$. En effet, on peut ajouter quelques points entre u_n^m et u_{n+1}^m de la manière suivante (on suppose $u_n^m \leqq u_{n+1}^m$):

$$v_{0,k}^{m,n}=u_n^m \;, \quad v_{i+1,k}^{m,n}=\inf\{u;\; u\geqq v_{i,k}^{m,n} \text{ et } t_u=t_{u_n^m}+(i+1)2^{-k}(t_{u_{n+1}^m}-t_{u_n^m})\} \;;$$

(ou l'on suppose $u_n^m \geqq u_{n+1}^m$),

$$v_{0,k}^{m,n}=u_{n+1}^m, \quad v_{i+1,k}^{m,n}=\inf\{u;\; u\geqq v_{i,k}^{m,n} \text{ et } t_u=t_{u_{n+1}^m}+(i+1)2^{-k}(t_{u_n^m}-t_{u_{n+1}^m})\} \, .$$

D'après le théorème 1, il est facile de vérifier que pour deux nombres positifs fixés δ et ε, si k est suffisamment grand, on a

$$P[\,|\Sigma_{n,i}\{Y(t_{v_{i,k}^{m,n}},x_{u_{n+1}^m})(X(t_{v_{i+1,k}^{m,n}})-X(t_{v_{i,k}^{m,n}}))\mathrm{sgn}(u_{n+1}^m-u_n^m)\}$$

$$-\Sigma_n(Z(t_{u_{n+1}^m},x_{u_{n+1}^m})-Z(t_{u_n^m},x_{u_{n+1}^m}))| > \delta] \leqq \varepsilon \; .$$

D'après le théorème 1 encore, on sait que les sommes $\Sigma_{n,i}\{\ldots\}$ convergent vers l'intégrale non monotone $\int_0^1 Y(t_u,x_u)dX_{t_u}$.

Pour l'intégrale non monotone de Statonovitch, nous avons un théorème semblable dont la démonstration est analogue à celle du théorème 6.

THEOREME 7. Sous l'hypothèse du théorème 4, s'il existe un processus $Z^*(t,x)$ tel que $Z^*(t,x)=\int_0^t Y(s,x)*dX_s$ et que $\frac{\partial}{\partial x}Z^*(t,x)$ existe et soit continu par rapport à (t,x), alors

$$\int_0^1 Y(t_u,x_u)*dX_{t_u}=Z^*(t_1,x_1)-Z^*(t_0,x_0)-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}Z^*(t_u,x_u)dx_u \quad .$$

REFERENCE

Bismut, J.M.[1], Mécanique Aléatoire. Lecture Notes in Math. n°866 (1981)

Kunita, H.[1], On the decomposition of solutions of stochastic differential equations, Proceedings of the Durham Conference on Probability. Lecture Notes in Math. n°851 (1980)