MARC YOR

Le drap brownien comme limite en loi des temps locaux linéaires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 89-105
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__89_0>

LE DRAP BROWNIEN COMME LIMITE EN LOI DE TEMPS LOCAUX LINEAIRES

Marc YOR

Laboratoire de Calcul des Probabilités - Université P. et M. Curie - Tour 56 - 4, place Jussieu - 75230 PARIS CEDEX.

INTRODUCTION. Ce travail a été largement inspiré par les conférences de K. Itô, faites à Paris en Mars 1981, ainsi que par le calcul stochastique des variations ("Malliavin Calculus") dans lequel le drap Brownien, indexé par $\mathbb{R}_+^2$, joue un rôle fondamental (voir, par exemple, D. Williams [15]) dans des questions relatives à des processus indexés par $\mathbb{R}_+$.

Il était alors naturel de chercher à "construire" le drap Brownien à partir du mouvement Brownien réel. On obtient ici (cf : théorème (1.1) ci-dessous) un résultat de convergence en loi des temps locaux du mouvement Brownien vers le drap Brownien.

De façon plus précise, soit $(\beta_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien réel, issu de 0. D'après Papanicolaou - Stroock - Varadhan [10], si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, bornée, à support compact, on a :

$$(0.a) \qquad \left(\beta_t \; ; \; \lambda^{1/2}\int_0^t \phi(\lambda\beta_s)d\beta_s\right) \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{(d)} \left(\beta_t \; ; \; \|\phi\|_2 \, \tilde{\beta}_{\ell_t^o}\right),$$

où (d) désigne ici la convergence étroite de probabilités sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$, associée à la topologie de la convergence compacte sur cet espace, $(\tilde{\beta}_t)$ est un mouvement Brownien indépendant de β, (ℓ_t^o) est le temps local en 0 de (β_t) et $\|\phi\|_2 = (\int \phi^2(x)dx)^{1/2}$.

Le théorème (1.1) ci-dessous permet d'interpréter $\|\phi\|_2$ comme la variance de l'intégrale de Wiener de ϕ relativement à une mesure Brownienne sur $\mathbb{R}$. On comprend aisément le passage de (0.a) au théorème (1.1) à partir des remarques suivantes :

- soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, bornée, et $F(x) = \int_0^x f(y)dy$. On peut réécrire (cf. [4]) la formule d'Itô sous la forme :

$$(0.b) \qquad F(\beta_t) = \int_0^t f(\beta_s)d\beta_s - \frac{1}{2}\int f(a)\,d_a\ell_t^a,$$

où (ℓ_t^a) désigne une version bicontinue des temps locaux Browniens, et la seconde intégrale est une intégrale stochastique relative à la semi-martingale $(\ell_t^a\ ;\ a\in\mathbb{R})$ (cf. Perkins [11]).

- si l'on remplace maintenant en (0.b) f par $f_\lambda \equiv \lambda^{1/2}\phi(\lambda\cdot)$, on obtient, en combinant (0.a) et (0.b), après avoir remarqué que $F_\lambda(x) \equiv \int_0^x f_\lambda(y)dy \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{} 0$:

$$\text{(0.c)} \qquad \left(\beta_t\ ;\ \frac{\lambda^{1/2}}{2}\int \phi(\lambda x)d_x\ell_t^x\right) \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{(d)} \left(\beta_t\ ;\ \|\phi\|_2\ \tilde{\beta}_{\ell_t^o}\right).$$

L'énoncé du théorème (1.1) est alors suggéré, au moins formellement, par la considération des fonctions $\phi_a(x) = 1_{]0,a]}(x)$ $(a \geq 0)$.

Voici finalement un plan succinct de l'article : le paragraphe 1 est consacré à la discussion du théorème (1.1), le paragraphe 2 à sa démonstration ; on étend, au paragraphe 3, le résultat principal à certaines diffusions réelles, ainsi qu'à la famille des temps locaux unidimensionnels associés au mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$; on y donne également certains résultats d'aproximation - à partir du mouvement Brownien réel - d'un processus gaussien à 2 paramètres, qui est un mouvement Brownien dans la première variable, et un pont Brownien dans la seconde.

Notations.

Dans tout ce travail, $(\beta_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel, issu de 0, et $(\ell_t^a\ ;\ a\in\mathbb{R},\ t\geq 0)$ une version bicontinue en (a,t) des temps locaux (au point a, et au temps t) du processus β.
On se servira de façon essentielle de la version suivante de la formule de Tanaka :

$$\text{(1.a)} \qquad \beta_t^+ - (\beta_t - a)^+ = \int_0^t 1_{(0\leq\beta_s\leq a)}d\beta_s + \frac{1}{2}(\ell_t^o - \ell_t^a),$$

où $x^+ = x\vee 0$; $a \geq 0$; $t \geq 0$.

1. ENONCE ET DISCUSSION DU RESULTAT PRINCIPAL.

Le résultat principal de cet article est le

Théorème (1.1) : Pour tout $\lambda > 0$, on note P_λ la loi du processus, en $(t,a)\in\mathbb{R}_+^2$, et à valeurs dans R^3 :

$$(1.b) \quad (\beta_t \; ; \; \ell_t^a \; ; \; \frac{\lambda^{1/2}}{2} (\ell_t^{a/\lambda} - \ell_t^o))$$

sur $C(\mathbb{R}_+^2 \; ; \mathbb{R}^3)$ muni de sa tribu borélienne (pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+^2$).

Alors, P_λ converge étroitement, lorsque $\lambda \to \infty$, vers la loi de :

$$(1.c) \quad (\beta_t \; ; \; \ell_t^a \; ; \; B_{(\ell_t^o, a)})$$

où $(B_{(u,a)} \; ; \; (u,a)\in\mathbb{R}_+^2)$ désigne un drap Brownien issu de 0, indépendant de β.

L'énoncé suivant est la version "temporelle" du théorème (1.1), dans lequel ne varie que la variable d'espace des temps locaux de β. On conserve les notations du théorème.

Corollaire (1.1') : La loi du processus :

$$(\frac{1}{\lambda}\beta_{\lambda^2 t} \; ; \; \frac{1}{\lambda} \ell^a_{\lambda^2 t} \; ; \; \frac{1}{2\lambda^{1/2}} (\ell^a_{\lambda^2 t} - \ell^o_{\lambda^2 t}))$$

converge étroitement, lorsque $\lambda \to \infty$, vers celle de :

$$(1.c) \quad (\beta_t \; ; \; \ell_t^a \; ; \; B_{(\ell_t^o, a)}). \;\square$$

Une conséquence du théorème (1.1) est que, pour tout $x > 0$ donné, si $\tau_x \overset{\text{déf}}{=} \inf\{u \; / \; \ell_u^o > x\}$, alors :

$$(1.d) \quad \text{le processus} \quad (\frac{\lambda^{1/2}}{2} (\ell_{\tau_x}^{a/\lambda} - x) \; ; \; a \geq 0)$$

converge en loi, lorsque $\lambda \to \infty$, vers $(\sqrt{x}\; \gamma_a, a \geq 0)$, où $(\gamma_a, a \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel, issu de 0 en $a = 0$.

Ce résultat se déduit bien du théorème (1.1), du fait que $P[\tau_x = \tau_{x-}] = 1$, ce qui entraîne que, en dehors d'un ensemble négligeable pour la mesure de Wiener, l'application : $\omega \to \tau_x(\omega)$ est continue sur $C(\mathbb{R}_t^+, \mathbb{R})$.

Or, le résultat précédent peut se déduire également du théorème suivant, dû à Ray [12] et Knight [8] :

<u>le processus</u> $(Z_a \equiv \ell_{\tau_x}^a, a \geq 0)$ <u>est le carré d'un processus de Bessel de dimension</u> 0, <u>issu de</u> $\sqrt{x}$ <u>en</u> $a = 0$.

Autrement dit, quitte à se placer sur un espace de probabilité élargi (ce qui est nécessaire, car le processus $(Z_a, a \geq 0)$ est absorbé en 0 au "temps" $M_x \equiv \sup_{u \leq \tau_x} \beta_u$), il existe un mouvement Brownien réel $(\tilde{\gamma}_a, a \geq 0)$, issu de 0, tel que : $Z_a = x + 2 \int_0^a \sqrt{Z_u}\, d\tilde{\gamma}_u$.

Le résultat (1.d) découle alors de ce que, pour tout $A > 0$:

$$E\left[\sup_{0 \leq a \leq A} (\lambda^{1/2} \int_0^{a/\lambda} \sqrt{Z_u}\, d\tilde{\gamma}_u - \sqrt{x}\{\lambda^{1/2} \tilde{\gamma}_{a/\lambda}\})^2\right] \xrightarrow[(\lambda \to \infty)]{} 0,$$

et du fait que $(\lambda^{1/2} \tilde{\gamma}_{a/\lambda}, a \geq 0)$ est un mouvement Brownien réel issu de 0.

Le théorème de Ray - Knight rappelé plus haut donne donc une explication du comportement asymptotique "de type Brownien", en a, des temps locaux dans l'énoncé du théorème (1.1).

<u>Remarque</u> : On pourrait de même interpréter le résultat donné par le théorème (1.1), en ce qui concerne le processus :

$$(\frac{\lambda^{1/2}}{2} (\ell_{T_1}^{a/\lambda} - \ell_{T_1}^{o}) \; ; \; a \geq 0),$$

où $T_1 = \inf\{t \,/\, \beta_t > 1\}$, à l'aide d'un second théorème dû à Ray et Knight ([12], [8]) :

<u>le processus</u> $(\ell_{T_1}^{1-a}, 0 \leq a \leq 1)$ <u>est le carré d'un processus de Bessel de dimension</u> 2 <u>issu de 0 en</u> $a = 0$. □

2. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME (1.1), ET CRITERES DE RELATIVE ETROITE COMPACITE POUR UNE FAMILLE DE PROBABILITES SUR</u> $C([0,1]^2 ; \mathbb{R})$.

2.1) On s'intéresse maintenant aux différents points de la démonstration du théorème (1.1) :

- on commence par remplacer la troisième composante du processus figurant en (1.b),

soit : $\frac{\lambda^{1/2}}{2}(\ell_t^{a/\lambda} - \ell_t^o)$ par : $\lambda^{1/2}\int_0^t 1_{(0\leq\lambda\beta_s\leq a)}d\beta_s$.

[On notera la distribution - sur $C(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R}^3)$ - ainsi obtenue, P'_λ].

Cette substitution de processus est licite, car les deux processus en question ne diffèrent, d'après (1.a), que par : $\lambda^{1/2}[\beta_t^+ - (\beta_t - \frac{a}{\lambda})^+]$, processus qui est majoré en valeur absolue par $\frac{|a|}{\lambda^{1/2}}$, et qui converge donc vers 0, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+^2$, lorsque $\lambda \to \infty$.

- la démonstration du théorème se compose alors de deux étapes :

(2.(i)) montrer que les marginales de rang fini des probabilités P'_λ convergent étroitement vers les marginales correspondantes de la loi du processus (1.c).

(2.(ii))montrer que la famille (P'_λ) est étroitement relativement compacte.

L'étape (i) est franchie à l'aide de la proposition suivante, dûe à Papanicolaou - Stroock - Varadhan ([10]).

<u>Proposition (2.1)</u> : <u>Soient</u> $(f_1,\ldots,f_d)$ <u>une suite finie de fonctions, de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$, <u>boréliennes, bornées, dont les supports sont compacts et disjoints deux à deux. Les lois, sur</u> $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^{d+2})$ <u>des processus</u> :

(2.a) $$(\beta_t ; \ell_t^o ; \lambda^{1/2}\int_0^t f_1(\lambda\beta_s)d\beta_s ;\ldots; \lambda^{1/2}\int_0^t f_d(\lambda\beta_s)d\beta_s)$$

<u>convergent étroitement, lorsque</u> $\lambda \to \infty$, <u>vers celle de</u> :

(2.b) $$(\beta_t ; \ell_t^o ; |f_1|_2 \Gamma^1_{\ell_t^o} ;\ldots; |f_d|_2 \Gamma^d_{\ell_t^o}),$$

<u>où</u> $(\Gamma_t^1,\ldots,\Gamma_t^d ; t \geq 0)$ <u>désigne un mouvement brownien à valeurs dans</u> $\mathbb{R}^d$, <u>issu de</u> 0, <u>indépendant de</u> β, <u>et</u> $|f_i|_2$ <u>est la norme de</u> f_i <u>dans l'espace</u> $L^2(\mathbb{R} ; dx)$.

En ce qui concerne l'étape (2.(i)), il reste à appliquer la proposition (2.1) aux suites de fonctions $f_i(x) = 1_{(a_i < x \leq a_{i+1})}$, avec $0 = a_o < a_1 < \ldots < a_d$; $d \in \mathbb{N}$, et on vérifie aisément que le processus :

$$(\beta_t \ ; \ \ell_t^o \ ; \ \sqrt{a_1}\, \Gamma^1_{\ell_t^o} \ ; \ \ldots \ ; \ \sqrt{a_i - a_{i-1}}\, \Gamma^i_{\ell_t^o} \ ; \ \ldots \ ; \ \sqrt{a_d - a_{d-1}}\, \Gamma^d_{\ell_t^o})$$

a même loi que :

$$(\beta_t \ ; \ \ell_t^o \ ; \ B_{(\ell_t^o, a_1)} \ ; \ \ldots \ ; \ B_{(\ell_t^o, a_i)} - B_{(\ell_t^o, a_{i-1})} \ ; \ \ldots \ ; \ B_{(\ell_t^o, a_d)} - B_{(\ell_t^o, a_{d-1})})$$

Pour être complet, nous esquissons très succinctement la démonstration de la proposition (2.1), dans le cas où $d = 1$ (pour simplifier) ; on note alors f pour f_1.

Le résultat annoncé provient de ce que :

$$<\lambda^{1/2} \int_0^\cdot f(\lambda\beta_s)d\beta_s>_t \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{p.s.} |f|_2^2 \cdot \ell_t^o \ ; \ <\lambda^{1/2} \int_0^\cdot f(\lambda\beta_s) \ ; \ \beta>_t \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{p.s.} 0$$

et d'un théorème de Knight ([7]) qui affirme qu'un couple de martingales continues M et N, orthogonales, nulles en 0, peut se représenter comme un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ dont chacune des composantes a été changée de temps avec $<M>$ et $<N>$ respectivement.

Enfin, il peut être intéressant de remarquer que, pour tout $t > 0$, les variables $(\lambda^{1/2} \int_0^t f(\lambda\beta_s)d\beta_s, \ \lambda > 0)$ sont uniformément bornées dans L^p, pour tout $p \in]1,\infty[$, et convergent faiblement dans L^2 vers 0, lorsque $\lambda \to \infty$.

En effet, puisqu'elles sont uniformément bornées dans L^2, il suffit [en ce qui concerne la seconde assertion], d'après un théorème bien connu selon lequel les martingales du mouvement brownien se représentent comme intégrales stochastiques, de montrer que :

$$I_\lambda \equiv E\left[(\lambda^{1/2} \int_0^t f(\lambda\beta_s)d\beta_s) \int_0^t H_s d\beta_s\right] \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{} 0,$$

pour tout processus H prévisible, uniformément borné.

Or, $I_\lambda = E\left[\lambda^{1/2} \int_0^t f(\lambda\beta_s)H_s ds\right] = E\left[\lambda^{1/2} \int da \ f(\lambda a) \int_0^t H_s d_s \ell_s^a\right]$,

et donc : $\quad |I_\lambda| \leq \|H\|_\infty \lambda^{-1/2} \int da \ |f(a)| \ (\sup_a E(\ell_t^a))$.

Comme $\sup_a E(\ell_t^a) \leq c\sqrt{t}$ (avec c, constante universelle), I_λ tend vers 0, lorsque $\lambda \to \infty$.

La convergence en loi énoncée dans la proposition (2.1) ne saurait donc être améliorée en une convergence en probabilité. □

2.2) Il reste à traiter l'étape (ii) de la démonstration. Pour cela, nous rappelons tout d'abord deux critères d'étroite relative compacité pour une famille de probabilités sur $C^{(2)} = C([0,1]^2,\mathbb{R})$, qui étendent de deux façons différentes, le "critère des moments" figurant dans Billingsley ([3], theorem 12.3).

(On suppose ici $C^{(2)}$ muni de sa tribu borélienne, pour la topologie de la convergence uniforme).

On note (s,a), ou (t,b), le point générique de $[0,1]^2$, et x la fonction générique de $C^{(2)}$. En outre, si $s \leq t$, $a \leq b$, on pose :

$$x([s,t] \times [a,b]) \overset{\text{déf}}{=} x(t,b) - x(t,a) - x(s,b) + x(s,a).$$

Voici les deux critères en question (pour des références bibliographiques plus complètes, voir M. Straf [13]).

<u>Proposition (2.2)</u> (Centsov [5]) : $(Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, <u>famille de probabilités sur</u> $C^{(2)}$, <u>est étroitement relativement compacte, dès qu'il existe</u> $p_i > 0$ $(i = 1,2,3,4)$, $\alpha,\beta,\lambda > 1$, <u>et une constante</u> C <u>tels que</u> :

$$\sup_\lambda E_\lambda(|x(0,0)|^{p_1}) < \infty$$

$$\sup_\lambda E_\lambda(|x(0,a) - x(0,b)|^{p_2}) \leq C|a-b|^\alpha$$

$$\sup_\lambda E_\lambda(|x(t,0) - x(s,0)|^{p_3}) \leq C|t-s|^\beta$$

$$\text{(2.c)} \qquad \sup_\lambda E_\lambda(|x([s,t] \times [a,b])|^{p_4}) \leq C\{(t-s)(b-a)\}^\gamma$$

<u>Proposition (2.3)</u> (Stroock - Varadhan [14]) : $(Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, <u>famille de probabilités sur</u> $C^{(2)}$ <u>est étroitement relativement compacte dès qu'il existe</u> $p',p > 0$, $\delta > 2$, <u>et une constante</u> C <u>tels que</u> : $\sup_\lambda E_\lambda(|x(0,0)|^{p'}) < \infty$, <u>et</u>

$$\text{(2.d)} \qquad \sup_\lambda E_\lambda\left[|x(s,a) - x(t,b)|^p\right] \leq C(|s-t| + |a-b|)^\delta.$$

Comparons maintenant les critères (2.c) et (2.d) : supposons le critère (2.d) vérifié. On a alors, lorsque $|s-t| \geq |a-b|$:

$$E_\lambda\left[|x([s,t] \times [a,b])|^p\right]$$

$$\leq c_p\{E_\lambda(|x(t,b) - x(t,a)|^p) + E_\lambda(|x(s,b) - x(s,a)|^p)$$

$$\leq 2C\cdot c_p\cdot|a-b|^\delta \leq 2C\cdot c_p\cdot|a-b|^{\delta/2}|s-t|^{\delta/2}.$$

Ainsi, les deux variables jouant le même rôle, le critère (2.c) est satisfait, avec $\gamma = \delta/_2$. □

2.3) Montrons maintenant que, pour tout $T > 0$, et $A > 0$, les lois des processus :

$$(X_\lambda(t,a) = \lambda^{1/2} \int_0^t 1_{(0\leq\lambda\beta_s\leq a)} d\beta_s \; ; \; 0 \leq t \leq T, \; 0 \leq a \leq A) \; ;$$

indexés par $\lambda > 0$, sont étroitement relativement compactes.

Pour simplifier les notations, on prendra $T = A = 1$.

Remarquons que, si $X(t,a) \equiv \int_0^t 1_{(0\leq\beta_s\leq a)} d\beta_s$, on a :

$$\text{(2.e)} \qquad X_\lambda(t,a) = \lambda^{1/2} X(t, \tfrac{a}{\lambda}).$$

D'autre part, d'après les inégalités de Burkholder, il existe, pour tout $p \geq 2$, une constante c_p telle que : pour tous $0 \leq s \leq t \leq 1$, et $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$E\left[|X([s,t] \times [a,b])|^p\right]$$

$$\leq c_p \, E\left[\left(\int_s^t du \, 1_{(a\leq\beta_u\leq b)}\right)^{p/2}\right]$$

$$= c_p \, E\left[\left(\int_a^b dy \, (\ell_t^y - \ell_s^y)\right)^{p/2}\right]$$

$$\leq c_p(b-a)^{p/2} \, E\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b dy \, (\ell_t^y - \ell_s^y)^{p/2}\right]$$

$$\leq c_p(b-a)^{p/2} \sup_y E\left[(\ell_t^y - \ell_s^y)^{p/2}\right].$$

Les inégalités de Burkholder, et l'identité (1.a), entraînent l'existence d'une seconde constante c'_p telle que :

$$\sup_y E\left[(\ell_t^y-\ell_s^y)^{p/2}\right] \leq c'_p(t-s)^{p/4}.$$

Finalement, il existe une constante C_p telle que :

$$E\left[|X([s,t] \times [a,b])|^p\right] \leq C_p(b-a)^{p/2} (t-s)^{p/4}.$$

D'après (2.e), on a donc :

$$E\left[|X_\lambda([s,t]\times[a,b])|^p\right] \leq C_p(b-a)^{p/2} (t-s)^{p/4} \leq C_p\left[(b-a)\ (t-s)\right]^{p/4},$$

ce qui entraîne que, pour $p > 4$, le critère (2.c) est satisfait avec $\gamma = p/_4$.

Remarque : On peut également montrer, avec une démonstration analogue, que le critère (2.d)est satisfait, avec $\delta = p/_4$, pour $p > 8$. □

2.4) Nous terminons ce paragraphe par une autre application du critère (2.c), en donnant une redémonstration du théorème suivant, obtenu par D. Nualart [9], de façon tout à fait différente.

Théorème (2.4) : Soient $(B^n(s)\ ;\ s\in[0,1],\ n\in\mathbb{N})$ et $(C^n(t)\ ;\ t\in[0,1],\ n\in\mathbb{N})$ une double infinité de mouvements browniens réels, indépendants, issus de 0. Alors, la suite des lois des processus :

$$X_n(s,t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} B^i(s)\ C^i(t)$$

converge étroitement vers celle du drap Brownien.

Démonstration : 1) Pour tous $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$, et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, on a :

$$X_n([s_1,s_2] \times [t_1,t_2]) = \left[(s_2-s_1)\ (t_2-t_1)\right]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ \eta_i\right),$$

avec $(\xi_i,\eta_i\ ;\ i\in\mathbb{N})$ une double suite de v.a. gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

Ainsi, pour tout nombre $\gamma > 0$, il existe une constante universelle c_γ telle que :

$$E\left[|X_n([s_1,s_2] \times [t_1,t_2])|^\gamma\right]$$

$$= \left[(s_2-s_1)\ (t_2-t_1)\right]^{\gamma/2} E\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ \eta_i\right|^\gamma\right]$$

$$= \left[(s_2-s_1)\ (t_2-t_1)\right]^{\gamma/2} \frac{c_\gamma}{n^{\gamma/2}} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\gamma/2}\right].$$

Pour vérifier le critère (2.c), il reste à montrer que, pour un nombre $\gamma > 2$, la suite $\left(\frac{1}{n^{\gamma/2}} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\gamma/2}\right]\right)_n$ est bornée. Or, pour $\gamma = 4$, on a :

$$\frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} \{3n + n(n-1)\} \leq 4.$$

2) Montrons maintenant que les marginales de rang fini de la suite $\{X_n\}$ convergent étroitement vers les marginales correspondantes du drap Brownien.

Il suffit de montrer que, pour toute suite finie de rectangles 2 à 2 disjoints $(R_j,\ 1 \leq j \leq k)$, de côtés parallèles aux axes, et pour toute suite $(\lambda_j,\ 1 \leq j \leq k)$ de réels, la suite :

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\ X_n(R_j)\ ;\ n \in \mathbb{N}\right) \text{ a pour distribution limite } N\left(0\ ;\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2\ |R_j|\right),$$

où $|R|$ désigne la mesure de Lebesgue de R.

Or, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\ X_n(R_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (B^i \otimes C^i)\ (R_j)\right\}$, où

$(B^i \otimes C^i)\ (s,t) = B^i(s)\ C^i(t)$.

D'après le théorème de la limite centrale sur $\mathbb{R}$, la suite précédente converge en loi vers $N(0,\mu)$, où :

$$\mu = E\left[\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (B^1 \otimes C^1)\ (R_j)\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2\ |R_j|. \quad \square$$

3. RESULTATS COMPLEMENTAIRES.

3.1) Considérons tout d'abord (β_t) mouvement Brownien réel relatif à une filtration $(\mathcal{F}_t)$, et (X_t) solution forte (c'est à dire : adaptée à la filtration naturelle de (β_t)) de l'équation stochastique :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)d\beta_s + \int_0^t b(X_s)ds,$$

pour laquelle on suppose $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boréliennes, bornées, et l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x, \; |\sigma(x)| \geq \varepsilon$.

D'après [16], il existe une version bicontinue (L_t^a) des temps locaux de X, et à l'aide de estimations obtenues en [16], la démonstration du théorème (1.1) faite dans le paragraphe précédent permet d'énoncer le

Théorème (3.1) : Les hypothèses ci-dessus étant supposées satisfaites, les processus (indexés par : $(t,a) \in \mathbb{R}_+^2$) :

$$(X_t \; ; \; L_t^a \; ; \; \frac{\lambda^{1/2}}{2} (L_t^{a/\lambda} - L_t^o))$$

convergent en loi, lorsque $\lambda \to \infty$, vers :

$$(X_t \; ; \; L_t^a \; ; \; B_{(L_t^o, a)}),$$

où $(B_{(u,a)} \; ; \; (u,a) \in \mathbb{R}_+^2)$ désigne un drap Brownien, indépendant de X.

3.2) Considérons maintenant (X_t) mouvement Brownien d-dimensionnel, issu de 0. A tout $\theta \in S_{d-1}$, on associe, en suivant Bass [2], le mouvement Brownien réel (θ, X_t), et sa famille de temps locaux, notée $(L_t^a(\theta) \; ; \; a \in \mathbb{R}, \; t \geq 0)$.
Bass [2] a montré l'existence d'une version $(L_t^a(\theta) \; ; \; \theta \in S_{d-1}, \; a \in \mathbb{R}, \; t \geq 0)$ continue dans les 3 variables. On peut maintenant énoncer le

Théorème (3.2) : Soient $(\theta_i)_{i = 1,2,\dots,n}$ n points distincts de S_{d-1}. Alors, les processus (indexés par $(t,a) \in \mathbb{R}_+^2$) :

$$(3.a) \qquad (X_t \; ; \; L_t^a(\theta_i) \; (1 \leq i \leq n) \; ; \; \frac{\lambda^{1/2}}{2} (L_t^{a/\lambda}(\theta_i) - L_t^o(\theta_i)) \; (1 \leq i \leq n))$$

<u>convergent en loi, lorsque</u> $\lambda \to \infty$, <u>vers</u> :

(3.b) $\quad \left(X_t \ ; \ L_t^a(\theta_i) \ (1 \le i \le n) \ ; \ B^i_{(L_t^o(\theta_i),a)} \ (1 \le i \le n)\right),$

<u>où</u> $(B^i_{(u,a)} \ ; \ u,a) \in \mathbb{R}_+^2)_{1 \le i \le n}$ <u>désignent</u> n <u>draps Browniens indépendants entre eux, et indépendants du mouvement Brownien</u> (X_t).

<u>Démonstration</u> : 1) On a déjà prouvé, au cours de la démonstration du théorème (1.1), que les lois des processus (3.a) sont étroitement relativement compactes, lorsque λ varie.

2) Il reste donc à identifier toute valeur d'adhérence des probabilités correspondantes, lorsque $\lambda \to \infty$, comme loi de (3.b), ce qui se ramène, à l'aide des arguments développés dans la démonstration du théorème (1.1) (lesquels reposent finalement sur le théorème de Knight [7]) à montrer le résultat suivant :

si l'on note $M^i(\lambda,a) = \lambda^{1/2} \int_0^{\cdot} 1_{(0 \le (\theta_i,X_s) \le a/\lambda)} d(\theta_i,X_s)$, alors :

(3.c) $\quad \langle M^i(\lambda,a) \ ; \ M^j(\lambda,b)\rangle_t \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{} 0$, pour tout couple (i,j), avec $i \ne j$.

Or, on a :

$$\langle M^i(\lambda,a),M^j(\lambda,b)\rangle_t = \lambda(\theta_i,\theta_j) \int_0^t 1_{(0 \le \lambda(\theta_i,X_s) \le a)} \, 1_{(0 \le \lambda(\theta_j,X_s) \le b)} ds$$

Le résultat cherché est immédiat, dans le cas où $(\theta_i,\theta_j) = 0$, et également lorsque $\theta_i = -\theta_j$. Une fois ces cas écartés, décomposons θ_i en $\theta_i = \alpha\theta_j + ku$, avec $\alpha = (\theta_i,\theta_j)$; $u \in S_{d-1}$; $(\theta_j,u) = 0$. On a alors :

$$\langle M^i(\lambda,a),M^j(\lambda,b)\rangle_t = (\theta_i,\theta_j) \ \lambda \int_0^t ds \ \phi(\lambda Y_s),$$

où $Y_s = ((\theta_j,X_s) \ ; \ (u,X_s))$ est un mouvement Brownien bidimensionnel, et

$$\phi(x,y) = 1_{(0 \le \alpha x+ky \le a)} \, 1_{(0 \le x \le b)}.$$

Le résultat suivant montre que (3.c) est satisfait, et donne une estimation de la vitesse de convergence vers 0 en (3.c).

Lemme (3.3) (cf : Kasahara - Kotani [6]) : Si (Y_t) désigne un mouvement Brownien bidimensionnel, et $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est borélienne, bornée, à support compact, on a :

$$\frac{\lambda^2}{\log \lambda} \int_0^t ds\ \phi(\lambda Y_s) \xrightarrow[(\lambda\to\infty)]{(d)} \overline{\phi}\cdot V,$$

où $\overline{\phi} = \int \phi(x,y)dx\,dy$, et V est une variable exponentielle, de paramètre $1/2$.

3.3) Retournons au résultat (0.a) de Papanicolaou - Stroock - Varadhan [10], et remarquons que, mis à part le théorème de Knight [7], (0.a) repose sur le résultat d'approximation élémentaire suivant : si $\phi \in L^1(\mathbb{R},du)$, et g est continue, à support compact, alors : $n\int \phi(nu)\, g(u)du \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \overline{\phi}\cdot g(0)$, où $\overline{\phi} = \int \phi(u)du$.

Les résultats ci-dessous reposent sur un autre type d'approximation, également élémentaire.

A toute fonction $\phi : [0,1[\to \mathbb{R}$, on associe $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, de période 1, telle que $\tilde{\phi}|_{[0,1[} = \phi$. On a donc $\tilde{\phi}(x) = \phi(x-k)$, pour $k \leq x < k+1$. On peut alors énoncer le

Lemme (3.4) : Soient $g \in L^1(\mathbb{R},du)$, et $\phi : [0,1[\to \mathbb{R}$, borélienne, bornée. Alors,

$$\int \tilde{\phi}(nu)\, g(u)du \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \overline{\phi}\cdot\overline{g}.$$

Démonstration : 1) On suppose tout d'abord g continue à support compact. Alors,

$$\int \tilde{\phi}(nu)\, g(u)du = \Sigma_k \int du\ g(u)\ 1_{]k,k+1]}(nu)\ \phi(nu-k)$$

$$= \Sigma_k \int_0^1 \frac{dv}{n}\ \phi(v)\ g\left(\frac{k+v}{n}\right).$$

Soit A tel que $(\mathrm{supp}\ g) \subset [-A,A]$. Il y a alors $(2An)$ entiers k qui contribuent à la somme précédente, que l'on peut donc remplacer, grâce à l'uniforme continuité de g, par :

$$\Sigma_k \int_0^1 \frac{dv}{n}\ \phi(v)\ g\left(\frac{k}{n}\right) = \overline{\phi}\cdot\Sigma_k \frac{1}{n}\ g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \overline{\phi}\cdot\overline{g}.$$

2) Dans le cas général, on approche $g(\in L^1)$ dans L^1 par une suite (g_k) de fonctions continues, à support compact. Le résultat cherché découle alors de 1), et de l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int \tilde{\phi}(nu)\, g(u)du - \bar{\phi}\cdot\bar{g}\right| \leq \|\phi\|_\infty \int du\, |g(u) - g_k(u)| + \left|\int \tilde{\phi}(nu)\, g_k(u)du - \bar{\phi}\cdot\bar{g}_k\right|$$

$$+ |\bar{\phi}| \int du\, |g(u) - g_k(u)|.$$

A l'aide du lemme (3.4), et du théorème de Knight [7], on montre aisément les deux résultats suivants, analogues à (0.a) :

$\phi : [0,1[\to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, bornée ; $(\beta(t))$ et $(\tilde{\beta}(t))$ sont deux mouvements Browniens réels indépendants. Alors :

$$\text{(3.d)} \quad \left(\beta(t)\ ;\ \int_0^t \tilde{\phi}(nu)d\beta_u\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{(d)} \left(\beta(t)\ ;\ \bar{\phi}\cdot\beta(t) + \|\phi-\bar{\phi}\|_2\, \tilde{\beta}(t)\right)$$

$$\text{(3.e)} \quad \left(\beta(t)\ ;\ \int_0^t \tilde{\phi}(n\beta_u)d\beta_u\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{(d)} \left(\beta(t)\ ;\ \bar{\phi}\cdot\beta(t) + \|\phi-\bar{\phi}\|_2\, \tilde{\beta}(t)\right).$$

On peut maintenant énoncer le

<u>Théorème (3.5)</u> : <u>Soit</u> $(\beta(t))$ <u>mouvement Brownien réel, issu de</u> 0, <u>et</u> (ℓ_t^a) <u>le processus de ses temps locaux (bicontinu en</u> (a,t)).

<u>Alors, les processus suivants</u> (indexés par $(t,a)\in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$)

$$\text{(3.d')} \quad \left(\beta(t)\ ;\ \Sigma_k\{\beta(\tfrac{k+a}{n}\wedge t) - \beta(\tfrac{k}{n}\wedge t)\}\right)$$

$$\text{(3.e')} \quad \left(\beta(t)\ ;\ \frac{1}{2}\,\Sigma_k\{\ell_t^{\frac{k+a}{n}} - \ell_t^{\frac{k}{n}}\}\right)$$

<u>convergent en loi, lorsque</u> $n \to \infty$, <u>vers</u> :

$$\text{(3.f)} \quad \left(\beta(t)\ ;\ B^i_{(t,a)} - aB^i_{(t,1)}\right) \qquad (i = 1,2)$$

<u>où</u>, <u>pour</u> $i = 1,2$, $(B^i_{(u,a)}\ ;\ (u,a)\in \mathbb{R}_+^2)$ <u>désigne un drap Brownien indépendant de</u> β.

<u>Démonstration</u> : 1) A l'aide de (3.d) et (3.e), on obtient la convergence en loi des marginales de rang fini (en a) de (3.d') et (3.e'), considérés comme processus indexés par $t \in \mathbb{R}_+$, vers les marginales correspondantes de (3.f) (on prend pour cela $\phi_a(x) = 1_{(0 \leq x \leq a)}$).

2) Pour conclure, il reste à vérifier le critère d'étroite relative compacité (2.c), par exemple. Soient $0 \leq b \leq a \leq 1$, et $0 < s < t \leq T$.

- On a, en ce qui concerne (3.d') :

$$E\left[\left|\int_s^t (\tilde{\phi}_a(nu) - \tilde{\phi}_b(nu))d\beta_u\right|^p\right] \leq C_p\left(\int_s^t du(\tilde{\phi}_a(nu) - \tilde{\phi}_b(nu))^2\right)^{p/2}$$

$$\leq C_p\left[\left((nt)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\wedge(t-s)\right]^{p/2}$$

$$\leq C_p\left[(b-a)\ t(t-s)\right]^{p/4} \leq C_p\ T^{p/4}\left[(b-a)(t-s)\right]^{p/4},$$

et le critère (2.c) est donc satisfait dès que $p > 4$.

- En ce qui concerne (3.e'), on a :

$$E\left[\left|\int_s^t (\tilde{\phi}_a(n\beta_u) - \tilde{\phi}_b(n\beta_u))d\beta_u\right|^p\right] \leq C_p\ E\left[\left(\int_s^t du(\tilde{\phi}_a(n\beta_u) - \tilde{\phi}_b(n\beta_u))^2\right)^{p/2}\right].$$

Or, on a :

$$\int_s^t du(\tilde{\phi}_a-\tilde{\phi}_b)^2\ (n\beta_u) = \int dx(\tilde{\phi}_a-\tilde{\phi}_b)^2\ (x)(\ell_t^x-\ell_s^x)$$

$$\leq \Sigma_k \int_{-\beta_t^*}^{\beta_t^*} dx\ 1_{\left(\frac{k+b}{n} \leq x \leq \frac{k+a}{n}\right)}\ \sup_x(\ell_t^x-\ell_s^x)$$

$$\leq \left(\frac{a-b}{n}\right)\ (\beta_t^* + 1)2n\ \sup_x(\ell_t^x-\ell_s^x)$$

$$\leq (a-b)(\beta_t^* + 1)2\ \sup_x(\ell_t^x-\ell_s^x),$$

et, finalement, le critère (2.c) est satisfait, lorsque l'on prend p suffisamment grand à l'aide de l'inégalité de Hölder, et de la majoration

$$E\left[\sup_x(\ell_t^x-\ell_s^x)^\gamma\right] \leq C_\gamma(t-s)^{\gamma/2} \qquad \text{(cf. [1]).} \quad \square$$

Remarque finale : D'autres applications du lemme (3.4) à des résultats de convergence en loi seront développées dans une publication ultérieure.

-:-:-:-:-:-

Je tiens à remercier J. Deshayes, D. Picard et L.C.G. Rogers pour plusieurs discussions au sujet de ce travail.

-:-:-:-:-:-

REFERENCES :

[1] M. BARLOW, M. YOR : (Semi)-martingale inequalities and local times. Zeitschrift für Wahr, 55, 237-254 (1981).

[2] R. BASS : A representation of additive functionals of d-dimensional Brownian motion. Preprint (1981).

[3] P. BILLINGSLEY : Convergence of probability measures. Wiley, New-York, 1968.

[4] N. BOULEAU, M. YOR : Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales. C.R.A.S. Paris, t. 291 (2 Mars 1981), 491-494.

[5] N.N. CENTSOV : Limit theorems for some classes of random functions. in : Selected Translations in Math. Statistics and Probability, 9, 37-42, 1971.

[6] Y. KASAHARA, S. KOTANI : On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. Zeitschrift für Wahr., 49, 133-153 (1979).

[7] F.B. KNIGHT : A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion. Lect. Notes in Maths, n° 190, Springer (1971).

[8] F.B. KNIGHT : Random Walks and the sojourn density process of Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 109, p. 56-86, 1963.

[9] D. NUALART : Weak Convergence to the law of two-parameter Continuous processes. Zeitschrift für Wahr. 55, 255-269, 1981.

[10] G.C. PAPANICOLAOU, D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Martingale approach to some limit theorems. Duke Univ. Maths. Series III, Statistical Mechanics and Dynamical Systems (1977).

[11] E. PERKINS : Local time is a semi-martingale. Zeitschrift für Wahr, 60, 79-117 (1982).

[12] D.B. RAY : Sojourn Times of diffusion processes. Ill. J. Maths 7, p. 615-630, 1963.

[13] M.L. STRAF : Weak convergence of stochastic processes with several parameters. Proc. of 6th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, Vol 2, 187-221 (1971).

[14] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Multidimensional Diffusion processes. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 233. Springer (1979).

[15] D. WILLIAMS : "To begin at the beginning..." (Part III) in : Stochastic Integrals. Lect. Notes 851, Springer, 1981.

[16] M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. Astérisque 52-53, 23-35, 1978.