JEAN JACOD
JEAN MÉMIN

Rectification à « Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 509-511
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__509_0>

RECTIFICATION A

"Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité".

J. JACOD - J. MEMIN

Dans l'article portant le même titre du Séminaire de Probabilités n° XV, figure une erreur grossière faite au cours de la démonstration de la proposition 2.4 ; on procède en effet comme si une famille filtrante convergente était relativement compacte ; cette propriété banale pour une suite convergente, n'est pas vraie en général pour un ensemble filtrant convergent. Cette proposition 2.4 est cependant vraie (du moins si la nouvelle démonstration qui suit est correcte).

Les notations $\Omega, \mathcal{X}, \overline{\Omega}, B^1_{mc}(\overline{\Omega}), B^2_{mc}(\overline{\Omega}), B_{mc}(\overline{\Omega}), \mathbf{M}_{mc}(\overline{\Omega}), C_u(\mathcal{X})$ sont introduites dans l'article du séminaire XV ; redonnons seulement l'énoncé de la proposition :

proposition : *La topologie de $\mathbf{M}_{mc}(\overline{\Omega})$ est la moins fine rendant continues les applications* $\mu \to \mu(g)$, $g \in B^1_{mc}(\overline{\Omega})$.

Dans l'énoncé, nous devrions pour être précis indiquer la métrique choisie pour $\mathcal{X}$ puisque $B^1_{mc}(\overline{\Omega})$ et $C_u(\mathcal{X})$ en dépendent ; cependant, nous allons voir que la métrique utilisée, notée δ, est indifférente, pourvu qu'elle définisse la bonne topologie.

Comme $B^1_{mc}(\overline{\Omega}) \subset B_{mc}(\overline{\Omega})$, pour démontrer la proposition il suffit de vérifier que pour toute famille filtrante (μ_α) de $\mathbf{M}(\overline{\Omega})$, la condition

(1) $\quad \mu_\alpha(g) \to \mu(g), \ \forall g \in B^1_{mc}(\overline{\Omega})$

entraîne

(2) $\quad \mu_\alpha(g) \to \mu(g), \ \forall g \in B_{mc}(\overline{\Omega})$.

Etape 1 : La propriété (1) ne dépend pas de la métrique δ choisie. En effet (1) signifie que $\mu_\alpha(A\times f) \to \mu(A\times f)$ pour tout $f \in C_u(\mathcal{X})$, donc d'après un résultat bien connu sur la convergence faible, les mesures $\mu_\alpha(A\times \cdot)$ convergent faiblement vers $\mu(A\times \cdot)$, donc $\mu_\alpha(A\times f) \to \mu(A\times f)$ pour tout $f \in C(\mathcal{X})$ donc à-fortiori pour toute fonction f uniformément continue relativement à n'importe quelle autre distance topologiquement équivalente. ∎

On peut donc choisir une distance δ qui rende $\mathcal{X}$ totalement borné, et on sait alors que $C_u(\mathcal{X})$ est séparable pour la topologie uniforme. On pose

$B^3_{mc}(\overline{\Omega}) = \{g \in B(\overline{\Omega}) \ : \ g(\omega,.) \in C_u(\mathcal{X}) \text{ pour tout } \omega \in \Omega\}$.

Etape 2 : Si $g \in B^3_{mc}(\overline{\Omega})$ il existe une suite $\{g_n\} \subset B^2_{mc}(\overline{\Omega})$ qui converge uniformément vers g.

Soit en effet $\{V_k\}$ une suite dense dans $C_u(\mathcal{X})$; soit $A_{n,0} = \emptyset$ et

$A_{n,k} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin \cup_{q\leq k-1} A_{n,q},\ \sup_x |g(\omega,x) - V_k(x)| \leq \frac{1}{n}\}$

$g_n(\omega,x) = \sum_{h\geq 1} 1_{A_{n,k}}(\omega)\, V_k(x)$

La suite $\{g_n\}$ vérifie les propriétés requises. ■

Etape 3 : On a $\mu_\alpha(g) \to \mu(g)$, $\forall g \in B^2_{mc}(\overline{\Omega})$.

Soit en effet $g = \sum_{n\geq 1} 1_{A_n} \otimes f_n \in B^2_{mc}(\overline{\Omega})$, et $a = \sup |g|$.

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu^\Omega(\bigcup_{n>n_0} A_n) \leq \varepsilon$. D'après (1) on a $\mu^\Omega_\alpha \to \mu^\Omega$ dans $M_m(\Omega)$, donc $\lim_{(\alpha)} \mu^\Omega_\alpha(\bigcup_{n>n_0} A_n) \leq \varepsilon$ et

$\lim\sup_\alpha |\mu_\alpha(\sum_{n>n_0} 1_{A_n} \otimes f_n)| \leq \varepsilon$.

D'après (1), encore, $\mu_\alpha(\sum_{n\leq n_0} 1_{A_n} \otimes f_n) \to \mu(\sum_{n\leq n_0} 1_{A_n} \otimes f)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\mu_\alpha(g) \to \mu(g)$. ■

Etape 4 : On a $\mu_\alpha(g) \to \mu(g)$, $\forall g \in B^3_{mc}(\overline{\Omega})$.

Soit en effet $g \in B^3_{mc}(\overline{\Omega})$, et $\varepsilon>0$. D'après l'étape 2, il existe $g' \in B^2_{mc}(\overline{\Omega})$ telle que $|g-g'| \leq \varepsilon$. Donc

$$|\mu_\alpha(g) - \mu_\alpha(g')| \leq \varepsilon\, \mu_\alpha(\overline{\Omega}), \qquad |\mu(g) - \mu(g')| \leq \varepsilon\mu(\overline{\Omega})$$

Comme $\mu_\alpha(g') \to \mu(g')$ d'après l'étape 3, et $\mu_\alpha(\overline{\Omega}) \to \mu(\overline{\Omega})$, et comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on en déduit que $\mu_\alpha(g) \to \mu(g)$. ■

Etape 5 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On a : $\lim\sup_\alpha \mu_\alpha(g\geq a) \leq \mu(g\geq a)$ si $g \in B_{mc}(\overline{\Omega})$

Soit en effet $g \in B_{mc}(\overline{\Omega})$ et $G(a) = \{g > a\}$. La fonction

$$\theta_a(\omega,x) = \begin{cases} \delta(x, \overline{G(a)}_\omega) \wedge 1 & \text{si } G(a)_\omega \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } G(a)_\omega = \emptyset \end{cases}$$

est lipschitzienne en x (pour chaque ω). Si $\{x_i\}$ est une suite dense dans $\mathcal{X}$, il est facile de vérifier que

$$\{\theta_a \geq b\} = \bigcap_{(i)} \{(\omega,x) : \delta(x,x_i) \geq b \text{ ou } g(\omega,x_i) \leq a\} \quad \text{si } b\leq 1$$

(car $g(\omega,.)$ est continue) et $\{\theta_a \geq b\} = \emptyset$ sinon; θ_a est mesurable donc $\theta_a \in B^3_{mc}(\overline{\Omega})$.

Soit alors $\phi_n(t) = 0$ pour $t \geq \frac{1}{n}$, $\phi_n(t) = 1 - nt$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$.
On a $\phi_n \circ \theta_a \in B^3_{mc}(\overline{\Omega})$, donc

$\mu_\alpha(\phi_n \circ \theta_a) \to \mu(\phi_n \circ \theta_a)$ d'après l'étape 4. Mais $\{\theta_a = 0\} = \overline{G(a)}$, donc d'une part $\mu_\alpha(\overline{G(a)}) \leq \mu_\alpha(\phi_n \circ \theta_a)$, et d'autre part $\phi_n \circ \theta_a \to 1_{\overline{G(a)}}$ lorsque $n \uparrow \infty$, d'où $\mu(\phi_n \circ \theta_a) \downarrow \mu(\overline{G(a)})$. On déduit alors de (3) que

$$\lim\sup_\alpha \mu_\alpha[\overline{G(a)}] \leq \mu[\overline{G(a)}].$$

Enfin si $\varepsilon>0$, on a

$$\{g \geq a\} \subset \overline{G(a-\varepsilon)} \subset \{g \geq a-\varepsilon\},$$

donc

$$\limsup_\alpha \mu_\alpha(g\geq a) \leq \limsup_\alpha \mu_\alpha[\overline{G(a-\varepsilon)}] \leq \mu[\overline{G(a-\varepsilon)}] \leq \mu(g\geq a-\varepsilon)$$

et comme $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \downarrow \mu(g \geq a-\varepsilon) = \mu(g\geq a)$, on obtient le résultat. ■

<u>Etape 6</u> : <u>On a (2)</u>.

Soit en effet $g \in B_{mc}(\overline{\Omega})$. Soit $\varepsilon>0$ et $a_0<a_1< ..<a_n$ tels que $a_0\leq g\leq a_n$, que $\mu(g = a_i) = 0$ pour tout i, et que $a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon$ pour tout i. Soit aussi

(4) $$g' = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} 1_{[a_{i-1}\leq g<a_i]}$$

Par ailleurs, l'étape 5 appliquée à g et à $-g$, et le fait que $\mu_\alpha(\overline{\Omega}) \to \mu(\overline{\Omega})$, entraînent :

$$\begin{cases} \limsup_\alpha \mu_\alpha(g \geq a_i) \leq \mu(g \geq a_i) \\ \liminf_\alpha \mu_\alpha(g \geq a_i) \geq \liminf_\alpha \mu_\alpha(g>a_i) \geq \mu(g>a_i). \end{cases}$$

Comme $\mu(g\geq a_i) = \mu(g>a_i)$, on en déduit que $\mu_\alpha(g\geq a_i) \to \mu(g\geq a_i)$ et d'après (4), $\mu_\alpha(g') \to \mu(g')$. Comme $|g-g'| \leq \varepsilon$ par construction, $|\mu_\alpha(g) - \mu_\alpha(g')| \leq \varepsilon\mu_\alpha(\overline{\Omega})$, $|\mu(g) - \mu(g')| \leq \varepsilon\mu(\overline{\Omega})$ et $\varepsilon>0$ étant arbitraire, on en déduit que $\mu_\alpha(g) \to \mu(g)$. ■

<u>REMARQUE</u> : L'étape 5 ci-dessus ne fait pas double emploi avec la proposition (2.11) qui affirme que si $\mu_n \to \mu$, alors $\limsup \mu_n(F)\leq \mu(F)$ pour F mesurable à coupes fermées dans $\mathfrak{X}$: ce résultat reste sans doute faux pour une famille filtrante, en général, car il y a des ensembles F mesurables à coupes fermées qui ne sont pas de la forme $F = \{g\geq a\}$ pour une fonction $g \in B_{mc}(\overline{\Omega})$.