DOMINIQUE BAKRY

Une remarque sur les processus gaussiens définissant des mesures L^2

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 498-501
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__498_0>

UNE REMARQUE SUR LES PROCESSUS GAUSSIENS DEFINISSANT DES MESURES L^2

par Dominique BAKRY

On est habitué depuis le livre de Doob ([1], p. 77) à la correspondance entre notions probabilistes << au sens large >> et << au sens strict >>, les premières dépendant uniquement de la covariance des processus, et les deux types de notions coincidant pour les processus gaussiens. Par exemple, la notion de martingale de carré intégrable est la notion << stricte >> associée à la notion << large >> de processus à accroissements orthogonaux.

Dans ces conditions, il est tout à fait naturel de se demander si l'existence d'une intégrale stochastique de processus déterministes, mesure vectorielle à valeurs dans L^2, est la notion << large >> correspondant à la notion << stricte >> de semimartingale. Autrement dit, de conjecturer que si l'on peut intégrer les processus déterministes par rapport à un processus gaussien X, l'intégrale étant une mesure à valeurs dans L^2, alors X est nécessairement une semimartingale.

Nous allons construire ici un exemple montrant que cette conjecture est fausse, même lorsque les trajectoires de X sont continues.

NOTATIONS. Il sera commode de considérer plutôt des processus $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ Nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des <u>fonctions élémentaires</u> de la forme

$$f(t) = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i I_{]t_i,t_{i+1}]}(t) \ , \ 0=t_1<t_2\dots<t_n=1$$

<u>bornées par</u> 1 en valeur absolue. Pour $f\in\mathcal{E}$ on pose

$$\int f dX = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

On supposera que $X_0=0$ (remarquer aussi que $f(0)=0$).

On montre dans [2] que l'application $f \mapsto \int f dX$ se prolonge en une mesure vectorielle à valeurs dans L^2 si et seulement si

(1) $$\sup_{f\in\mathcal{E}} \| \int f dX \|_{L^2} < +\infty$$

(en particulier, les X_t doivent évidemment être dans L^2). Introduisons alors la covariance $\gamma(s,t)$ de X , et la fonction additive (encor notée γ) sur l'algèbre de Boole engendrée par les rectangles de $]0,1]\times]0,1]$ de la forme $]s,s']\times]t,t']$, telle que

$$\gamma(]s,s']\times]t,t']) = \gamma(s',t')-\gamma(s,t')-\gamma(s',t)+\gamma(s,t) \ .$$

Alors la condition (1) s'écrit aussi

(2) $\sup_{f\in\mathcal{E}} \iint f(s)f(t)d\gamma(s,t) < +\infty$

et l'on voit que cette condition est satisfaite dès que γ se prolonge en une mesure, i.e. que γ est à variation plane bornée.

Par exemple, si (X_t) est à accroissements orthogonaux, ou si (X_t) est un processus à variation finie dont la variation totale est de carré intégrable, γ est à variation plane bornée. Soit en effet (t_i) une subdivision de $]0,1]$. On a

$$\Sigma_{ij}\ |\gamma(]t_i,t_{i+1}]\times]t_j,t_{j+1}])| = \Sigma_{ij}\ |E[(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})]|$$

Dans le premier cas, cette somme vaut $\Sigma_i\ E[(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2]=E[X_1^2]$. Dans le second cas, on la majore en faisant entrer les $|\,|$ sous le signe $E[\,]$, puis en la remplaçant par $E[(\int|dX_t|)^2]$.

En revanche, nous ignorons si la covariance d'une somme $X_t=Y_t+Z_t$, où (Y_t) est à accroissements orthogonaux, (Z_t) à variation de carré intégrable, est une fonction à variation plane bornée.

ETUDE D'UN EXEMPLE. Nous allons construire un processus gaussien (X_t) à trajectoires continues, satisfaisant à (1) et (2), dont la covariance γ n'est pas à variation plane bornée, et tel que X ne soit pas une semimartingale dans sa filtration naturelle.

Nous considérons la suite $(\varepsilon_n(t))_{n\geqq 0}$ des fonctions de Rademacher sur $]0,1]$

$$\varepsilon_n(t) = \Sigma_{i=0}^{2^n-1}\ (-1)^i I_{]i2^{-n},(i+1)2^{-n}]}(t)$$

et nous posons

$$f_n(t) = \int_0^t \varepsilon_n(u)du \quad ,$$

de sorte que $0\leqq f_n(t)\leqq 2^{-n}$. Considérons maintenant sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ une suite (Y_n) de v.a. normales centrées réduites indépendantes, et posons

(3) $$X_t = \Sigma_n\ f_n(t)Y_n$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a p.s. $|Y_n|\leqq n$ pour n suffisamment grand, donc la série (3) converge normalement sur $[0,1]$ p.s. et (X_t) est un processus gaussien à trajectoires continues.

Soit $f(t)$ une fonction sur $[0,1]$. Nous avons formellement

$$\int_0^1 f(t)dX_t = \Sigma_n\ (\int f(t)df_n(t))Y_n = \Sigma_n\ a_nY_n$$

avec $a_n = \int f(t)\varepsilon_n(t)dt$. Comme les ε_n forment un système orthonormal (non total !) dans $L^2([0,1])$, on a $\Sigma_n\ a_n^2 \leqq \int f^2(t)dt$, et par conséquent

$$\|\ \int f dX\ \|_{L^2(\Omega)} \leqq \|f\|_{L^2([0,1])} \quad .$$

Il est facile de justifier rigoureusement ce calcul lorsque f est élémentaire, et il en résulte que la condition (1) est remplie : (X_t) définit bien une mesure vectorielle à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

Il est clair que la covariance de (X_t) est

(4) $$\gamma(s,t) = \Sigma_n f_n(s)f_n(t) .$$

Montrons qu'elle n'est pas à variation plane finie. Pour cela, évaluons sa variation plane sur la n-ième subdivision dyadique. Si H_{ij} est un carré de la subdivision produit

$$H_{ij} = A_i \times A_j =]i2^{-k},(i+1)2^{-k}] \times]j2^{-k},(j+1)2^{-k}]$$

on a $\gamma(H_{ij}) = \gamma_k(H_{ij})$, où $\gamma_k(s,t) = \Sigma_{n\leqq k} f_n(s)f_n(t)$. La mesure plane associée à γ_k est

$$d\gamma_k(s,t) = \Sigma_{n\leqq k}\, \varepsilon_n(s)\varepsilon_n(t) = Y_k(s,t)dsdt$$

et comme $Y_k(s,t)$ est constante sur $A_i \times A_j$, on a

$$\Sigma_{ij} |\gamma_k(H_{ij})| = \Sigma_{ij} \iint_{H_{ij}} |Y_k(s,t)|dsdt = \iint |Y_k(s,t)|dsdt$$

Mais sur l'espace de probabilité $[0,1]^2$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, la suite $(\varepsilon_n(u)\varepsilon_n(v))_{n>0}$ est formée de v.a. indépendantes admettant des lois de Bernoulli. Donc Y_k (au terme de rang 0 près) a la même loi que la somme des k premiers termes d'une partie de pile ou face, et l'espérance de sa valeur absolue tend vers $+\infty$.

Nous montrons ensuite que (X_t) n'est pas une semimartingale. Le principe du raisonnement est très simple : si X était une semimartingale, X se décomposerait (par rapport à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ obtenue en rendant << habituelle >> la filtration naturelle de X) en une somme d'une martingale locale continue et d'un processus à variation finie. Or nous allons vérifier que toutes les martingales locales continues de $(\underline{\underline{F}}_t)$ sont constantes : X ne peut donc être une semimartingale que s'il est à variation finie. Soit N la pseudo-seminorme << variation totale >> sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$; d'après le caractère gaussien de X, et le théorème 1.3.2 de [3], p. 11, la propriété que $N(X_\cdot)<\infty$ p.s. entraîne l'existence d'un $\varepsilon>0$ tel que $E[\exp(\varepsilon N^2(X_\cdot))] < \infty$. En particulier, la variation totale de X ne peut être p.s. finie sans être de carré intégrable, ce qui est impossible puisque la covariance de X n'est pas à variation plane finie. Donc X n'est pas une semimartingale.

Il reste à établir la phrase soulignée. Nous remarquons que $f_k(t)=t$ pour $t\in[0,2^{-k}]$, et que $f_k(2^{-m})=0$ si $k>m$, de sorte que

$$X_{2^{-m}} = 2^{-m}(Y_0+\dots+Y_m) .$$

Donc la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ_{2^{-n}}$ contient toutes les v.a. $Y_0+\ldots+Y_m$, $m\geq n$, c'est à dire

(5) $$\sigma(Y_0+\ldots+Y_n,Y_{n+1},Y_{n+2},\ldots) \subset \underline{\underline{F}}^\circ_{2^{-n}}$$

Mais l'inclusion inverse est également vraie, car si $t\leq 2^{-n}$, on a

$$X_t = \Sigma_{k\leq n} f_k(t)Y_k + \Sigma_{k>n} f_k(t)Y_k$$
$$= t(Y_0+\ldots+Y_n) + \Sigma_{k>n} f_k(t)Y_k$$

qui est bien mesurable par rapport à la tribu de gauche de (5). En particulier, nous déduisons de (5) que

$$\underline{\underline{F}}^\circ_{2^{-n+1}} \text{ est engendrée par } \underline{\underline{F}}^\circ_{2^{-n}} \text{ et } Y_n$$

Mais soit $t\in]2^{-n},2^{-n+1}[$; on a

$$X_t = t(Y_0+\ldots+Y_{n-1}) + f_n(t)Y_n + \Sigma_{k>n} f_k(t)Y_k$$

et comme $f_n(t)\neq t$ on voit que Y_n est déjà $\underline{\underline{F}}^\circ_t$-mesurable, autrement dit $\underline{\underline{F}}^\circ_t = \underline{\underline{F}}^\circ_{2^{-n+1}}$. La filtration ne varie donc qu'aux instants de la forme 2^{-k} ; la même propriété s'étend alors à la filtration habituelle $(\underline{\underline{F}}_t)$, et on en déduit que toutes les martingales continues sont constantes (et cela s'étend aussitôt aux martingales locales).

[1]. DOOB (J.L.). Stochastic processes. Wiley, 1952.

[2]. KUSSMAUL (A.U.). Stochastic integration and generalized martingales. Pitman, London 1977.

[3]. FERNIQUE (X.). Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'Eté de Probabilités, Saint-Flour 1974. Lecture Notes in M. 480, Springer-Verlag 1975.

Note sur les épreuves. Cet article aurait dû être publié dans le volume XVI, mais ne l'a pas été par suite d'une erreur de transmission . Il garde tout son intérêt de contre-exemple, mais les travaux récents de Stricker et d'Emery sur les semimartingales gaussiennes permettent de bien mieux comprendre la situation.