Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean Mémin

Sur la contiguïté relative de deux suites de mesures. Compléments

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 371-376
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__371_0>

SUR LA CONTIGUITE RELATIVE DE DEUX SUITES DE MESURES COMPLEMENTS

J. Mémin (*)

La lecture de l'article [4] de Liptser-Pukelcheim-Shiryayev, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de contiguité pour une suite (P^n, Q^n) de couples de probabilités définies sur une suite $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ d'espaces mesurables munis d'une filtration discrète $(\mathcal{F}^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, permet de compléter les résultats donnés dans le séminaire 16 [1]. On en profitera également pour préciser certaines démonstrations ou rectifier des erreurs. Les notations sont celles de [1].

A) Quelques propriétés relatives au processus densité :

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+})$ un espace filtré, P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que si $\Pi = \frac{P+Q}{2}$, $(\mathcal{F}_t)$ est Π-complète, $\bigvee_t \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite.
On note Z le processus densité (de Lebesgue) de Q par rapport à P (cf. par ex : [2] p. 212-214), pour $p \in \mathbb{N}$, R_p est le temps d'arrêt $R_p = \inf\{t : Z_t \leq 1/p\}$, $R = \inf\{t : Z_t = 0\}$ et on note $E = \bigcup_p [\![0, R_p]\!]$.
On considère la (P,E) surmartingale locale M définie par $M = \int Z_{s-}^{-1}\, d\, Z_s$; enfin Z^* désigne comme d'habitude le processus défini par $Z^*_t = \sup_{s\leq t} Z_s$.

LEMME 1 : ([4] pour une filtration discrète)

Pour tout L,N *appartenant à* $\mathbb{R}^+$, *on a les inégalités* :

(1) : $P[Z_\infty > N] \leq P[Z^*_\infty > N] \leq 1/N$

(2) : $Q[\inf_t Z_t \leq L] \leq L$

(3) : $Q[Z^*_\infty \geq N] \leq L/N + Q[Z_\infty \geq L])$

(4) : $Q[\operatorname{Sup}_t \Delta M_t \geq N^2] \leq 1/N + Q[Z^*_\infty \geq N]$.

Démonstration :

L'inégalité (1) est élémentaire, Z étant une P-sur martingale avec $E_P[Z_0] \leq 1$.

(*) : Département de Mathématiques, Université de Rennes, 35042 RENNES cédex.

Pour (2), soit $T = \inf \{t : Z_t \leq L\}$

$$Q[\inf_t Z_t \leq L] = \int_{\{Z_T \leq L\}} Z_T \, dP \leq L.$$

Montrons (3) :

$$Q[Z^*_\infty \geq N] = \int_{\{Z^*_\infty \geq N\}} Z_\infty \, dP + Q[Z^*_\infty \geq N, Z_\infty = \infty]$$

$$= \int_{\{Z^*_\infty \geq N\}} Z_\infty \, dP + Q[Z_\infty = \infty].$$

$$= \int_{\{Z^*_\infty \geq N, Z_\infty \geq L\}} Z_\infty \, dP + \int_{\{Z^*_\infty \geq N, Z_\infty < L\}} Z_\infty \, dP + Q[Z_\infty = \infty]$$

$$\leq \int_{\{Z_\infty \geq L\}} Z_\infty \, dP + L\, P[Z^*_\infty \geq N] + Q[Z_\infty = \infty]$$

$$\leq Q[Z_\infty \geq L] + L/_N.$$

Pour l'inégalité (4) on note maintenant T le temps d'arrêt :

$$T = \inf \{t : \Delta M_t \geq N\} \wedge R_p, \text{ pour un } p \in \mathbb{N}.$$

$$\{\operatorname{Sup}_{t \leq R_p} \Delta M_t \geq N^2\} = \{\Delta M_t \geq N^2\}$$

mais : $\{\Delta M_T \geq N^2\} = \{\frac{Z_T}{Z_{T-}} - 1 \geq N^2\} = \{\frac{Z_T}{Z_{T-}} \geq N^2 + 1\}$

$$\{\operatorname{Sup}_{t \leq R_p} \Delta M_t \geq N^2\} \subset \{\frac{Z^*_{R_p}}{\inf_{t \leq R_p} Z_{t-}} \geq N^2 + 1\}$$

$$\subset \{Z^*_{R_p} \geq (N^2+1)(\inf_{t \leq R_p} Z_{t-}), \inf_{t \leq R_p} Z_t > 1/_N\} \cup \{\inf_{t \leq R_p} Z_t \leq 1/_N\}.$$

$$\subset \{Z^*_{R_p} \geq (N^2+1)/_N\} \cup \{\inf_{t \leq R_p} Z_t \leq 1/_N\}$$

$$\subset \{Z^*_\infty \geq (N^2+1)/_N\} \cup \{\inf_t Z_t \leq 1/_N\}$$

On a donc obtenu :

$$Q[\bigcup_p \{\sup_{t \leq R_p} \Delta M_t \geq N^2\}] \leq Q[Z^*_\infty \geq N] + Q[\inf_t Z_t \leq 1/_N]$$

d'où le résultat en utilisant (2).

On supposera à partir de maintenant que Q est localement absolument continue par rapport à P, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la restriction de Q à $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la restriction de P à $\mathcal{F}_t$; Z (resp : M) est alors une P (resp : (P,E)) martingale locale.

Soit C(M) le processus croissant défini sur E par

(5) : $C(M)_t = \langle M^c, M^c\rangle_t + 1/2 \sum_{s \leq t} (1 - (1 + \Delta M_s)^{1/2})^2.$

$C(M)$ est (P,E) localement intégrable, de sorte que l'on peut définir son (P,E) compensateur prévisible noté $\tilde{C}^P(M)$ (voir [1]). Soit M' défini sur E par :

(6) : $M'_t = -M_t + \langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \left(\frac{\Delta M_s^2}{1+\Delta M_s} \mathbb{1}_{\{s<R\}}\right)$ et U le P-compensateur prévisible du processus $\mathbb{1}_{\{t\geq R\}}$

$N = M' + U$ est ([1], lemme 1-4) une (Q,E) martingale locale, donc une Q-martingale locale puisque E^c est Q-évanescent. Le lemme suivant complète le lemme 1-8 de [1] et relie les processus $\tilde{C}^P(M)$ et $\tilde{C}^P(M')$.

LEMME 2 :

Le processus $C(M')$ *défini par :*

$$C_t(M') = \langle M^c, M^c\rangle_t + 1/2 \sum_{s\leq t} (1-(1+\Delta M's)^{1/2})^2$$

est Q-*localement intégrable et son* Q-*compensateur prévisible noté* $\tilde{C}^Q(M')$ *est tel que l'on a l'égalité :*

(7) : $\tilde{C}^P_t(M) = \tilde{C}^Q_t(M')_t + U_t/2 \quad Q\text{- p.s.}$

Démonstration :

On commence par remarquer que $\tilde{C}^P(M)$ est Q-localement intégrable. Maintenant soit $p\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}^+$, et Y un processus prévisible positif tel que $E_Q[\int_s^t Y_s\, d\tilde{C}^p_s(M)^{R_p}] < \infty$. On négligera dans les calculs la partie $\langle M^c, M^c\rangle$ commune à $C(M)$ et $C(M')$.

$$2\, E_Q[\int_0^t Y_s\, d\tilde{C}^p_s(M)^{R_p}] = 2\, E_p[\int_0^t Z_s Y_s\, d\tilde{C}^p_s(M)^{R_p}]$$

$$= 2\, E_p[\int_0^t Z_{s-}\, Y_s\, d\tilde{C}^p_s(M)^{R_p}] = 2\, E_p[\int_0^t Z_{s-}\, Y_s\, d\, C_s(M)^{R_p}]$$

$$= E_p[\sum_{\substack{s\leq R\wedge t\\ R_p<R}} Y_s Z_{s-} (1-(1+\Delta M_s)^{1/2})^2] + E_p[\sum_{s\leq t} Y_s Z_{s-} \mathbb{1}_{\{R_p = R = 0\}}]$$

(car sur $\{s = R_p = R\}$ $1+\Delta M_s = 0$)

$$= E_p[\sum_{\substack{s\leq R_p\wedge t\\ R_p<R}} Y_s Z_{s-} (1-(1+\Delta M's)^{1/2})^2 (1+\Delta M_s)] + E_p[\int_0^{t\wedge R_p} Y_s Z_{s-}\, dU_s]$$

$$= 2\, E_p[\int_0^{t\wedge R_p} Z_s Y_s\, d\, C_s(M')] + E_p[\int_0^{t\wedge R_p} Z_s Y_s\, d\, U_s]$$

$$= 2\, E_Q[\int_0^{t\wedge R_p} Y_s\, d\, C_s(M')] + E_Q[\int_0^{t\wedge R_p} Y_s\, d\, U_s]$$

$$= E_Q[\int_0^{t\wedge R_p} Y_s\, d\, (2\,\tilde{C}^Q_s(M') + U_s)]$$ d'où le résultat. (Dans la démonstration on a

montré que $\int Y \, d\, C(M')$ était Q-intégrable dès que $\int Y \, d\, C(M)$ l'était, d'où l'existence du processus $\tilde{C}^{Q}(M')$).

Le lemme suivant fait partie de la démonstration du théorème 2-7 de [1] ; le début (p. 330) de cette dernière démonstration étant insuffisant, elle est reprise ici complètement.

LEMME 3 :

Pour tout $N > 1$ *on a l'inégalité :*

(8) : $Q[Z_\infty \leq N^2] \leq \frac{1}{2N} + Q[\tilde{C}^{p}_{\infty}(M) \leq 8 \log 2 \, N^2]$

Démonstration :

Soit Z' défini par $Z' = (\mathcal{Z}_0/\mathcal{Z})^{1/2}$ sur $[\![0,R[\![$

$= 0$ sur $[\![R,\infty[\![$.

On vérifie immédiatement que sur $[\![0,R[\![$ on a :

$Z' = (\mathcal{E}(M))^{-1/2} = (\mathcal{E}(M'))^{1/2}$; et comme $[\![R,\infty[\![$ est Q-évanescent, on a, à la Q-indistinguabilité près $Z' = (\mathcal{E}(M'))^{1/2}$, c'est-à-dire :

$Z' = \exp[\,1/2 \; M' - 1/4 \; \langle M^c,M^c\rangle] \prod_s (1 + \Delta M'_s)^{1/2} \exp(-\,1/2 \; \Delta M'_s)$.

Un calcul élémentaire montre que ceci peut encore s'écrire :

$Z' = \mathcal{E}(1/2 \; N - V)$ où N est la Q-martingale locale $M' + U$ et

$V = 1/8 \langle M^c,M^c\rangle + 1/2 \sum_s (1 - (1 + \Delta M'_s)^{1/2})^2 + 1/2 \; U$.

Ainsi V a pour Q-compensateur prévisible A où $A = \tilde{C}^{Q}(M') + 1/2 \; U - 7/8 \langle M^c,M^c\rangle$ c'est-à-dire compte-tenu du lemme 2 : $A = \tilde{C}^{p}(M) - 7/8 \langle M^c,M^c\rangle$.

Soit $L : 1/2 \; N - V + A$; alors $Z' = \mathcal{E}(L-A)$. On va commencer par montrer que $\Delta A<1$ Q-p.s.

Soit T un temps d'arrêt prévisible ; on a la succession d'égalités :

$$-\Delta A_T \, 1\!\!1_{\{T<\infty\}} = E_Q[-\Delta A_T \; 1\!\!1_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}] = E_Q[1\!\!1_{\{T<\infty\}} (\Delta L_T - \Delta A_T) | \mathcal{F}_{T-}]$$

$$= E_Q[\,1\!\!1_{\{T<\infty\}} \Delta(1/2 \; N - V)_T | \mathcal{F}_{T-}] = E_Q[1\!\!1_{\{T<\infty\}}((1 + \Delta M'_T)^{1/2} - 1) | \mathcal{F}_{T-}]$$

$$> -1 \quad Q.\ ps$$

Ce qui montre que $\{(t,\omega) : \Delta A_t(\omega) \geq 1\}$ est Q-évanescent.

On peut alors écrire ([3], prop II-1) :

$Z'_t = \mathcal{E}(L-A)_t = \mathcal{E}(\hat{L})_t\, \mathcal{E}(-A)_t$ avec $\hat{L}_t = \int_0^t \frac{1}{1-\Delta A_s}\, d\, L_s$, et $\mathcal{E}(\hat{L})$est une martingale locale positive donc une surmartingale positive.

Soit $N>1$.

$$\begin{aligned}
Q\,[Z'_\infty \geq 1/N\,] &= Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/N\,] \\
&\leq Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty\, \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/N\,,\ \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/2N^2\,] \\
&\quad + Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty \mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/N,\ \mathcal{E}(-A)_\infty < 1/2N^2\,] \\
&\leq Q\,[\mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/2N^2\,] + Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty > 2N\,]\,.
\end{aligned}$$

Mais $Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_\infty > 2N\,] \leq 1/2N\ \ E_Q\,[\mathcal{E}(\hat{L})_0] \leq 1/2N.$

$$\begin{aligned}
\text{Donc}\quad Q\,[Z'_\infty \geq 1/N\,] &\leq 1/2N + Q[\mathcal{E}(-A)_\infty \geq 1/2N^2] \\
&\leq 1/2N + Q\,[\exp(-A)_\infty \geq 1/2N^2] \\
&\leq 1/2N + Q\,[A_\infty \leq \log 2N^2]
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat, car $8\, A_\infty \geq \tilde{C}^P_\infty\, (M)$.

B) Conditions nécessaires et suffisantes de contiguité :

On considère $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}^+})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces filtrés, $(P^n,Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de couples de probabilités sur $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$, $(\mathcal{F}^n_t)$ vérifiant les conditions habituelles relativement à la probabilité $\frac{P_n + Q_n}{2}$; on suppose que Q^n est localement absolument continue par rapport à P^n, et on considère pour chaque n les processus M^n, Z^n, $C(M^n)$, définis comme M, Z, C(M) de la partie A.

On dira qu'une suite (X^n) de variables aléatoires à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, Q^n)$ est Q^n-tendue si on a la propriété suivante :

$\lim_{K\uparrow\infty} (\limsup_n\ Q^n\,[\,|X^n| > K]) = 0.$

(Q^n) est contigue à (P^n) si et seulement si (Z^n_∞) est Q^n-tendue (lemme 2-1 de [1]) ;
(P^n) et (Q^n) sont complètement séparables si et seulement si on a la propriété :

pourt tout $K>0$, $\limsup_n Q^n\,[Z^n_\infty > K] = 1$ (lemme 2-2 de [1]).

On déduit alors immédiatement de la partie A les résultats suivants :

<u>LEMME 4</u> : ([4] , dans le cas d'une filtration discrète).

a) *(Q^n) est contigue à (P^n) si et seulement si (Z^{n*}_∞) est Q^n-tendue.*

b) Si $\lim_{K\uparrow\infty} \lim \operatorname{Sup}_n Q^n[\tilde{C}^{P^n}_\infty (M^n) > K] = 1$ *alors* (P^n) et (Q^n) *sont complètement séparables.*

c) Si (Q^n) *est contigue à* (P^n), $(\tilde{C}^{P^n}_\infty(M^n))$ *et* $(\operatorname{Sup}_t \Delta M^n_t)$ *sont* Q^n*-tendues.*

Démonstration :

L'inégalité (3) du lemme 1 montre que l'on a l'équivalence :

(Z^n_∞) est Q^n-tendue $\iff$ $(Z^{n\,*}_\infty)$ est Q^n-tendue.

Le *b)* et la première partie du c) découlent directement du lemme 3 ; enfin la seconde partie du c) découle de l'inégalité (4) du lemme 1.

Compte-tenu du lemme 4 et du corollaire 2-8 de [1] on obtient le critère de contiguité suivant :

THEOREME :

(Q^n) *est contigue à* (P^n) *si et seulement si les suites :* $(\tilde{C}^{P^n}_\infty (M^n))$ *et* $(\sup_t \Delta M^n_t)$ *sont* Q^n*-tendues.*

RÉFÉRENCES :

[1] G.K Eagleson J. Mémin : Sur la contiguité de deux suites de mesures : généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryayev.
Sém. de Proba. XVI. Lect.Notes in Mathematics n° 920, Springer-Verlag.

[2] J. Jacod : Calcul stochastique et problèmes de martingales.
Lect.Notes in Mathematics n° 714 - Springer-Verlag.

[3] D. Lépingle - J. Mémin : Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles.
Z W 42 175-203 (1978).

[4] R.Ch. Liptser - F. Pukelcheim, A.N. Shiryayev : Sur des conditions nécessaires et suffisantes de contiguité et de complète séparabilité de probabilités - 1982 (à paraître).

Errata de l'article [1]:

p. 335 l. 2 $\quad Q^n|_{\mathcal{F}^n_o} = P^n|_{\mathcal{F}^n_o}$

p. 336 l. 20 et l. 3 : remplacer c^n_∞ par $\int_o^\infty (\beta^n_s)^2 \, d\, c^n_s$

l. 6 : remplacer c^n_t par $\int_o^t (\beta^n_s)^2 \, d\, c^n_s$