SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ÉRIK LENGLART

Désintégration régulière de mesure sans conditions habituelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 321-345

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__321_0>

DESINTEGRATION REGULIERE DE MESURE SANS CONDITIONS HABITUELLES

par E. Lenglart

INTRODUCTION.

Cet article traite d'un sujet similaire à celui étudié en [3] et [4] en collaboration avec C. Dellacherie : il s'agit encore de " recoller" des familles de v.a. bien indéxées par une chronologie de temps d'arrêt d' une tribu de Meyer, l'originalité venant ici de ce que nos v.a. sont à valeurs dans un espace de mesures.

Nous dégageons d'abord un théorème très simple et très général qui montre que ce problème est en fait relié très simplement au cas ou nos v.a. sont à valeurs réelles (on peut alors consulter nos deux premiers articles).

Une première application de ce résultat permet de généraliser, et en fait de placer dans le bon cadre, le théorème de Schwartz [14] sur l'existence de version régulière de surmartingales à valeurs mesure; ici, la chronologie est quelconque au lieu de $\mathbb{R}_+$, le système de surmartingale est quelconque au lieu d'être " continu à droite", enfin les conditions ne sont pas nécessairement "habituelles".

Une seconde application fournit un théorème général d'existence de version régulière de probabilités conditionnelles conditionnées par un processus et soumis à la mesurabilité par rapport à une tribu de Meyer. Ce théorème comporte comme cas particulier de nombreuses constructions dues notamment à Knight [7], Aldous [1], Schwartz [14] et Lanery [9] .

En dernier lieu, nous considérons le cadre de la théorie des processus avec paramètre ("à la Jacod"). Nous démontrons alors l'existence en général (dans notre cadre) de la projection duale d'une mesure aléatoire (sans conditions habituelles), ce qui permet un théorème de section, l'existence d'une projection à un paramètre, etc... (cf. Meyer [13]).

Nous avons ajouté en appendice une étude des limites faibles de $\underline{\underline{A}}$-noyaux du type "théorème de Mokobodzki" [12].

I REGULARISATION DE SYSTEMES DE PSEUDO NOYAUX.

Nous considérons fixé un espace de Probabilité $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, ainsi qu'une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ incluse dans $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \otimes \underline{\underline{F}}$. Rappelons ce que cela signifie (cf. [10]) :

* $\underline{\underline{A}}$ est une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par une famille de processus càdlàg ou càglàd, et $(t,\omega) \longrightarrow t$.
* Si X est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable et $t \in \mathbb{R}_+$, alors X^t est encore $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Si $t \in \mathbb{R}_+$, on appelle $\underline{\underline{A}}_t$ la tribu sur Ω engendrée par les v.a. X_t, X décrivant les processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables. La famille $(\underline{\underline{A}}_t)$ est une filtration, appelée la filtration de $\underline{\underline{A}}$. On note $\underline{\underline{A}}_\infty$ la tribu $\vee_t \underline{\underline{A}}_t$. Un processus X, défini à l'infini, est encore appelé $\underline{\underline{A}}$-mesurable si sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ l'est et si X_∞ est $\underline{\underline{A}}_\infty$-mesurable.

Si T est une application de Ω dans $[0,\infty]$, on note $\underline{\underline{A}}_T$ la tribu sur Ω engendrée par les applications X_T, X décrivant les processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables définis à l'infini.

Un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ est, par définition, un temps T (i.e. une application de Ω dans $[0,\infty]$) tel que l'intervalle stochastique $[\![T,\infty[\![$ soit $\underline{\underline{A}}$-mesurable. On montre alors que si X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, X^T est encore $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Les théorèmes de section, de projection et de projection duale sont encore valides dans ce cadre [10].

Dans le cas où l'on part d'une filtration $\mathbb{F} = (\underline{\underline{F}}_t)$, la tribu optionnelle $\underline{\underline{O}}$ (resp. prévisible $\underline{\underline{P}}$) associée est la tribu engendrée par les processus càdlàg (resp. càglàd) adaptés. Ce sont des tribus de Meyer et on a : $\underline{\underline{O}}_T = \underline{\underline{F}}_T$, $\underline{\underline{P}}_T = \underline{\underline{F}}_{T-}$ (avec les notations habituelles). Les t.a. de $\underline{\underline{O}}$ sont les t.a. de la filtration $\mathbb{F}$, les t.a. de $\underline{\underline{P}}$ sont les t.a. prévisibles de $\mathbb{F}$.

La tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ est toujours située entre les tribus prévisibles et optionnelles de sa filtration.

Nous considérons une <u>chronologie</u> $\underline{\underline{\Theta}}$ sur $\underline{\underline{A}}$, c'est à dire un ensemble de t.a. de $\underline{\underline{A}}$, stable pour les sup et inf finis, contenant 0 (et aussi $+\infty$ pour simplifier, mais ce n'est pas indispensable). Les cas les plus intéressants sont sans doute les cas où $\underline{\underline{\Theta}}=\mathbb{R}_+$ ou bien $\underline{\underline{\Theta}} = T(\underline{\underline{A}})$, ensemble de tous les t.a. de $\underline{\underline{A}}$; mais le fait d'utiliser une chronologie permet des précisions utiles.

Nous considérons enfin un <u>espace mesurable</u> $(M,\underline{\underline{M}})$, <u>ainsi que</u> $\mathbb{M}$ <u>l'espace des mesures positives finies sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$. Le symbole f désignera toujours une fonction $(M,\underline{\underline{M}})$-mesurable positive. L'espace $\mathbb{M}$ est muni de la tribu engendrée par les applications $m \longrightarrow m(f)$.

DEFINITION 1. On appelle <u>$\underline{\underline{\Theta}}$-système de pseudo noyaux</u> sur $(M,\underline{\underline{M}})$ toute famille de v.a. <u>positives</u> sur Ω, $\underline{N} = (\underline{N}(\Theta,f))_{\Theta,f}$ indéxée par $\underline{\underline{\Theta}}$ et les fonctions mesurables positives sur M, vérifiant :

1°) Pour toute f, $\underline{N}(f) = (\underline{N}(\Theta,f))_\Theta$ est un <u>$\underline{\underline{\Theta}}$-système</u>([3] et [4]):

a) Pour tout Θ, $\underline{N}(\Theta,f)$ est $\underline{\underline{A}}_\Theta$- mesurable

b) Pour tout Θ et Θ', $\underline{N}(\Theta,f)=\underline{N}(\Theta',f)$ p.s. sur $\{\Theta=\Theta'\}$

2°) <u>Linéarité positive</u> : pour tout Θ, toutes f,g, et tous $a,b \geq 0$

$$\underline{N}(\Theta,af+bg) = a\underline{N}(\Theta,f) + b\underline{N}(\Theta,g) \text{ p.s.}$$

3°) <u>Continuité</u>: pour tout Θ, si f_n converge simplement vers f en restant uniformément bornées, alors $\underline{N}(\Theta,f_n)$ converge en probabilité (et alors p.s.) vers $\underline{N}(\Theta,f)$.

DEFINITION 2. On appelle <u>$\underline{\underline{A}}$-noyau</u> sur $(M,\underline{\underline{M}})$ tout processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable N, à valeurs dans $\mathbb{M}$

$$\begin{aligned} N : (\overline{\mathbb{R}}_+ \times\Omega , \underline{\underline{A}}) &\longrightarrow \mathbb{M} \\ (t,\omega) &\longrightarrow N_t(\omega) \end{aligned}$$

c'est à dire tout noyau $N : (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega,\underline{\underline{A}}) \times \underline{\underline{M}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

Pour toute f, on notera N(f) le processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable $N_t(\omega,f)$.

Si T est un temps, on notera $N_T(\omega)$ la mesure $N_{T(\omega)}(\omega)$.

DEFINITION 3. On dit que le $\underline{\underline{\Theta}}$-système de pseudo noyaux sur M , $\underline{\underline{N}}$, est <u>régularisé</u> par le $\underline{\underline{A}}$-noyau N sur M, si, pour tout $\Theta \in \underline{\underline{\Theta}}$, on a :

Pour toute f, $\underline{\underline{N}}(\Theta,f) = N_\Theta(f)$ p.s.

Le problème général de la régularisation est alors posé. Ce problème n'a pas une réponse positive en général : c'est déja le cas lorsque M est réduit à un point ! on retrouve alors le problème de la régularisation des $\underline{\underline{\Theta}}$-systèmes par des processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables. Nous allons démontrer un théorème général, très simple, qui montre bien en quels termes le problème se pose.

Nous supposerons ici que $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>est un espace standard</u>, c'est à dire que sa tribu est isomorphe à la tribu borélienne d'un espace polonais. C'est le cas de tous les espaces Lusiniens, c'est à dire tout borélien d'un polonais. On peut alors supposer, par passage au quotient, que $(M,\underline{\underline{M}})$ est un espace polonais muni de sa tribu borélienne. On sait qu'il est alors isomorphe à un métrique compact ($[0,1]$ si M n'est pas dénombrable, $\overline{\mathbb{N}}$ sinon). L'hypothèse $(M,\underline{\underline{M}})$ standard se ramène donc a l'hypothèse $(M,\underline{\underline{M}})$ métrique compact.

THEOREME 1. <u>Supposons</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>standard</u>. <u>Soit</u> $\underline{\underline{N}}$ <u>un</u> $\underline{\underline{\Theta}}$-<u>système de pseudo noyaux sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$. <u>On peut alors régulariser</u> $\underline{\underline{N}}$ <u>en un</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>noyau sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>si et seulement si, pour toute</u> f <u>positive bornée, on peut construire un processus</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable</u> f^* <u>de telle sorte qu'on ait</u>

a) <u>Pour toute</u> f, <u>tout</u> Θ, $f^*_\Theta = \underline{\underline{N}}(\Theta,f)$ p.s.

b) <u>Pour toutes</u> f,g, <u>tout</u> $a \geq 0$

$(f+g)^*$ <u>est indistinguable de</u> $f^* + g^*$

$(af)^*$ <u>est indistinguable de</u> af^*

<u>Dans le cas où</u> $\underline{\underline{\Theta}} = T(\underline{\underline{A}})$, <u>la condition</u> b) <u>est automatiquement entrainée par la condition</u> a) <u>qui est donc nécessaire et suffisante</u>.

DEMONSTRATION. Nous pouvons donc supposer que $(M,\underline{\underline{M}})$ est un espace métrique compact muni de sa tribu borélienne. Soit alors D un ensemble dénombrable dense dans $C^+_u(M)$, stable par addition, multiplication par un rationnel positif, contenant 1.

Pour toutes $f,g \in D$, et tout $a \in Q_+$, posons

$$E(f,g,a) = \{(f+g)^* \neq f^* + g^*, \text{ ou } (af)^* \neq af^*\}$$

puis

$$E = \cup_{f,g,a} E(f,g,a)$$

L'ensemble E est évanescent et $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Considérons un point $(t,\omega) \in \bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Soit $N_t(\omega)$ l'application de D vers $\mathbb{R}_+$ définie par

$$N_t(\omega)(f) = f_t^*(\omega) I_{E^c}(t,\omega)$$

Cette application est positivement linéaire (sur Q_+) et s'étend donc de façon unique en une application Q-linéaire positive sur D- D, et finalement en une application linéaire positive de $C_u(M)$ vers $\mathbb{R}$, c'est à dire, en vertu du théorème de Riesz, en une mesure positive finie sur $\underline{\underline{M}}$, que nous noterons encore $N_t(\omega)$.

Montrons que N est un $\underline{\underline{A}}$-noyau sur $(M,\underline{\underline{M}})$. Il suffit de montrer que pour toute f borélienne positive bornée, le processus $(t,\omega) \rightarrow N_t(\omega)(f)$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. C'est vrai pour toute $f \in D$ et donc, par passage à la limite, pour toute f continue; celles-ci engendrant la tribu $\underline{\underline{M}}$, le résultat s'ensuit par un argument de limite monotone.

Montrons enfin que N régularise $\underline{N}$. Si $\Theta \in \underline{\underline{\Theta}}$ et $f \in D$, on a

$$N_\Theta(f) = f_\Theta^* \, I_{E^c}(\Theta) = f_\Theta^* = \underline{N}(\Theta,f) \quad \text{p.s.}$$

et le résultat s'ensuit par un argument de limite monotone , en utilisant la condition 3°) de continuité de $\underline{N}$.

La réciproque est évidente: si N est un $\underline{\underline{A}}$-noyau régularisant $\underline{N}$, il suffit de poser $f^* = N(f)$.

Enfin, dans le cas où $\underline{\underline{\Theta}} = T(\underline{\underline{A}})$, la linéarité positive de $\underline{N}$ implique, si a) est réalisée, que pour toutes f,g, tout t.a. T et tout $a \geq 0$, on a $(f+g)_T^* = f_T^* + g_T^*$ p.s. et $(af)_T^* = af_T^*$ p.s. ; et l'on voit, grâce au théorème de section, que la condition b) est alors satisfaite.

THEOREME 2 (d'unicité). Supposons $(M,\underline{\underline{M}})$ dénombrablement engendrée. Soient $\underline{N}$ un $T(\underline{\underline{A}})$-système de pseudo noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$ et N^1, N^2 deux $\underline{\underline{A}}$-noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$ régularisant $\underline{N}$. Alors N^1 et N^2 sont indistinguables.

DEMONSTRATION. Soit D une algèbre dénombrable engendrant la tribu $\underline{\underline{M}}$. Pour toute $f \in D$ et tout t.a. T on a $N_T^1(f) = N_T^2(f)$ p.s. , et donc, d'après le théorème de section, $N^1(f)$ et $N^2(f)$ sont indistinguables. Il existe donc un ensemble évanescent E tel que, si $(t,\omega) \notin E$, alors pour toute $f \in D$, on a $N_t^1(\omega)(f) = N_t^2(\omega)(f)$. Un argument de limite monotone montre que cette égalité est valide pour toute f mesurable positive. On en déduit que les deux $\underline{\underline{A}}$-noyaux sont indistinguables.

Il y a des contre exemples lorsque $\underline{\underline{M}}$ n'est pas dénombrablement engendrée.

DEFINITION 4. Si (P) est une propriété de processus, traduisible en termes de temps d'arrêt, nous dirons que $\underline{N}$ est un $\underline{\underline{\Theta}}$-(P)-système de pseudo noyaux sur M si, pour toute f positive bornée, le $\underline{\underline{\Theta}}$-système $\underline{N}(f) = (\underline{N}(\Theta,f))_{\Theta}$ possède la propriété (P) par rapport aux t.a. $\Theta \in \underline{\underline{\Theta}}$.

Nous dirons que N est un $\underline{\underline{A}}$-(P)-noyau sur M si, pour toute f positive bornée, le processus N(f) possède la propriété (P).

Exemples d'existence de régularisation

Il résulte alors des théorèmes 1 et 2 et des résultats de [3], que tout $T(\underline{\underline{A}})$-surmartingale (resp. martingale, sous martingale, quasi-martingale, semimartingale) de pseudo noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$ se régularise, essentiellement de façon unique, en un $\underline{\underline{A}}$-noyau du même type.

Remarquons également que, dans le cas où $\underline{\underline{\Theta}}=\mathbb{R}_+$, par exemple, si, pour toute f, $\underline{N}(f)$ (qui est alors un processus adapté) admet une modification p.s. continue à droite (resp. à gauche) alors, si$(M,\underline{\underline{M}})$ est standard, $\underline{N}$ est régularisable par un unique (à l'indistinguabilité près) $\underline{\underline{A}}$- noyau "p.s. continu à droite" (resp. à gauche).

Si $\underline{\underline{A}}$ est la tribu optionnelle d'une filtration continue à droite, il résulte alors de [4], que tout $T(\underline{\underline{A}})$-système s.c.s. (ou s.c.i., ou continu à droite) à droite de pseudo noyaux sur M standard, se régularise en un unique $\underline{\underline{A}}$-noyau du même type (p.s. s.c.s. à droite,... si la filtration n'est pas complète).

Etudions maintenant le cas particulier des $\underline{\underline{\Theta}}$-surmartingales de pseudo noyaux. Les conditions d'existence de noyau régularisant sont alors très larges, et généralisent considérablement celles du théorème de Schwartz [14].

II REGULARISATION DE $\underline{\underline{\Theta}}$-SURMARTINGALES DE PSEUDO NOYAUX.

DEFINITION 5. Nous dirons qu'un $\underline{\underline{\Theta}}$-système de pseudo noyaux est une $\underline{\underline{\Theta}}$-surmartingale de pseudo noyaux sur M si, pour toute f positive bornée, le $\underline{\underline{\Theta}}$-système $\underline{N}(f)$ est une $\underline{\underline{\Theta}}$-surmartingale, c'est à dire :

$$\text{si } \Theta \leq \Theta' \quad \text{alors} \quad E[\underline{N}(\Theta',f)\,|\,\underline{\underline{A}}_{\Theta}] \leq \underline{N}(\Theta,f) \quad \text{p.s.}$$

Nous appellerons $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure tout $\underline{\underline{A}}$-noyau N sur M tel que, pour toute f positive bornée, le processus N(f) est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale, c'est à dire : pour tous t.a. de $\underline{\underline{A}}$, S et T, on a

$$E[N_T(f)\,|\,\underline{\underline{A}}_S] \leq N_{S\cap T}(f) \quad \text{p.s.}$$

Remarquons que ces propriétés s'étendent en fait à toute f positive en utilisant les espérances conditionnelles généralisées.

Nous supposerons maintenant l'espace $(M,\underline{\underline{M}})$ radonien, ce qui veut dire que sa tribu $\underline{\underline{M}}$ est isomorphe à la tribu borélienne d'un sous espace universellement mesurable d'un polonais (un U-space au sens de Getoor). Tout espace mesurable lusinien, souslinien, cosouslinien ([5]) est radonien. Quitte à passer au quotient, nous pouvons alors supposer que $(M,\underline{\underline{M}})$ est un sous espace universellement mesurable d'un polonais. Ceci nous permet de supposer M équipé d'une topologie telle que $\underline{\underline{M}}$ soit sa tribu borélienne et que toute mesure positive σ-finie sur $\underline{\underline{M}}$ soit tendue (portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de mesure finie). De plus, la tribu $\underline{\underline{M}}$ est dénombrablement engendrée, ce qui, on l'a vu, permet d'assurer des conditions d'unicité.

THEOREME 3. Supposons $(M,\underline{\underline{M}})$ radonien. Toute $\underline{\underline{\Theta}}$-surmartingale de pseudo noyaux $\underline{\underline{N}}$ sur $(M,\underline{\underline{M}})$ se régularise en une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure sur $(M,\underline{\underline{M}})$. Il existe une telle $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure $\hat{N}$ qui est la plus petite possible (à l'indistinguabilité près). Dans le cas où $\underline{\underline{\Theta}} = T(\underline{\underline{A}})$, il n'en existe essentiellement qu'une.

DEMONSTRATION. Nous allons d'abord nous ramener à la situation précédente : $(M,\underline{\underline{M}})$ standard. Considérons, pour tout $\Theta \in \underline{\underline{\Theta}}$ la mesure (vraie!) sur $(M,\underline{\underline{M}})$, J_Θ, définie par $J_\Theta(f) = E[\underline{\underline{N}}(\Theta,f)]$. La condition de $\underline{\underline{\Theta}}$-surmartingale montre que, pour tout Θ, on a $J_\Theta \leq J_0$. Montrons que J_0 est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables.

Considérons la mesure finie $Q(f) = E[\underline{\underline{N}}(0,f)/\underline{\underline{N}}(0,1)]$ (avec la convention $0/0 = 0$) ; elle est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisable $\hat{M}$ (donc un lusinien) et on a : $Q(f) = Q(fI_{\hat{M}})$. On a donc, pour toute f positive, $\underline{\underline{N}}(0,f) = \underline{\underline{N}}(0,fI_{\hat{M}})$ p.s. et, par suite, en intégrant, $J_0(f) = J_0(fI_{\hat{M}})$ cqfd.

Par domination, on a donc également, pour tout Θ et toute f positive, $J_\Theta(f) = J_\Theta(fI_{\hat{M}})$, et, par suite : $\underline{\underline{N}}(\Theta,f) = \underline{\underline{N}}(\Theta,fI_{\hat{M}})$ p.s. . Nous régulariserons alors le $(\hat{M},\hat{\underline{\underline{M}}})$-système de pseudo noyaux $\underline{\underline{N}}(\Theta,f/\hat{M})$ par un $\underline{\underline{A}}$-noyau N sur l'espace standard $(\hat{M},\hat{\underline{\underline{M}}})$, grâce au théorème 1 et l'étendrons en un $\underline{\underline{A}}$-noyau sur $(M,\underline{\underline{M}})$ en posant $N'(f) = N(f/\hat{M})$.

Nous pouvons donc bien supposer que $(M,\underline{\underline{M}})$ est standard, comme dans le théorème 1.

Il nous faut maintenant associer à toute f positive bornée une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale f^* de telle sorte que $(f+g)^*$ soit indistinguable de $f^* + g^*$ et $(af)^*$ de af^* . La démonstration est alors basée sur l'existence de "l'enveloppe de Snell" d'un $\underline{\underline{\Theta}}$-système (cf. [3]). Considérons f positive bornée. Soit $\hat{\underline{\underline{\Theta}}}$ la chronologie des temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{\Theta}}$-étagés. Le $\underline{\underline{\Theta}}$-système $(\underline{N}(\Theta,f))$ se prolonge de façon essentiellement unique en un $\hat{\underline{\underline{\Theta}}}$-système $(\underline{N}(\hat{\Theta},f))_{\hat{\Theta}\in\hat{\underline{\underline{\Theta}}}}$ qui est encore une $\hat{\Theta}$-surmartingale.

Le $T(\underline{\underline{A}})$-système $\underline{h}(T) = \operatorname{ess\,sup}_{\hat{\Theta}\geq T} E[\underline{N}(\hat{\Theta},f)\,|\,\underline{\underline{A}}_T]$ se régularise en une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale positive , que nous noterons f^*, et qui "recolle" le $\underline{\underline{\Theta}}$-système $\underline{N}(f)$. C'est la plus petite $\underline{\underline{A}}$-surmartingale ayant cette propriété (à l'indistinguabilité près). Montrons que la correspondance $f \to f^*$ est positivement additive, à l'indistinguabilité près. Il suffit de remarquer que, pour T t.a., $\hat{\underline{\underline{\Theta}}}_T=\{\hat{\Theta} : \hat{\Theta}\geq T\}$ est filtrant décroissant et que la famille filtrante $E[\underline{N}(\hat{\Theta},f)\,|\,\underline{\underline{A}}_T]$, $\hat{\Theta}$ décrivant $\hat{\underline{\underline{\Theta}}}_T$ est croissante quand $\hat{\Theta}$décroit. On a alors

$$f^*_T = P\text{-}\lim_{\hat{\underline{\underline{\Theta}}}_T} E[\underline{N}(\hat{\Theta},f)\,|\,\underline{\underline{A}}_T] \quad \text{p.s.}$$

On voit donc bien que $(f+g)^*_T = f^*_T + g^*_T$ p.s. etc... Il suffit alors d'utiliser le théorème de section.

Considérons alors le $\underline{\underline{A}}$-noyau $\hat{N}$, régularisant $\underline{N}$ et construit à partir des f^*. Montrons que c'est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure. Si $f \in D$ (ensemble dénombrable dense de $C^+_u(M)$, M supposé métrique compact), alors $\hat{N}(f)$et f^* sont indistinguables. On a donc, si S et T sont deux temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ tels que $S\leq T$:

$$E[\hat{N}_T(f)\,|\,\underline{\underline{A}}_S] \leq \hat{N}_S(f) \quad \text{p.s.} \qquad (f\in D)$$

Un argument de limite monotone montre qu'il en est de même pour toute f borélienne positive. cqfd.

Montrons enfin que $\hat{N}$ est la plus petite $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure régularisant $\underline{N}$. Soit N une autre $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure régularisant $\underline{N}$. Montrons que $\hat{N}$est p.s. inférieure ou égale à N. Pour $f \in D$, la $\underline{\underline{A}}$-surmartingale $N(f)$ régularise le $\underline{\underline{\Theta}}$-système $\underline{N}(f)$ et donc est supérieure ou égale, à l'indistinguabilité près, à f^* elle même indistinguable de $\hat{N}(f)$. Il existe donc un ensemble évanescent $\underline{\underline{A}}$-mesurable, E, tel que, si $(t,\omega) \notin E$, alors

$$\hat{N}_t(\omega)(f) \leq N_t(\omega)(f) \qquad \forall f \in D$$

Un argument de limite monotone montre alors qu'on a la même inégalité pour toute f positive.

Revenons maintenant à la situation initiale. Soit N une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesures sur $(M,\underline{\underline{M}})$ régularisant $\underline{N}$. Montrons que, pour presque tout ω et tout t, $N_t(\omega)$ est portée par $\hat{M}$. Posons $g = I_{\hat{M}^c}$; on a $N_0(g) = \underline{N}(0,g) = 0$ p.s. et donc, pour tout t.a. T, $N_T(g) = 0$ p.s. . Le théorème de section montre alors que $N(g)$ est indistinguable de 0, ce qui prouve le résultat.

Si donc N est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesures sur $(M,\underline{\underline{M}})$, régularisant $\underline{N}$, elle est indistinguable d'une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesures portées par $\hat{M}$. On en déduit encore que N majore $\hat{N}$.

REMARQUE. La démonstration n'a en fait pas utilisé le fait que $(M,\underline{\underline{M}})$ était radonien, mais seulement le fait que <u>la mesure sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$, <u>définie par</u> $J_0(f) = E[\underline{N}(0,f)]$ <u>était portée par un sous espace mesurable</u> $(\hat{M},\hat{\underline{\underline{M}}})$ <u>standard et tel que</u> $\hat{M}$ <u>soit universellement</u> $\underline{\underline{M}}$<u>-mesurable.</u>

<u>Le cas particulier des pseudo-noyaux markoviens.</u>

DEFINITION 6. Nous dirons que $\underline{N}$ est un $\underline{\underline{\Theta}}$-système de <u>pseudo noyaux markoviens</u> si, pour tout $\Theta\varepsilon\ \underline{\underline{\Theta}}$, on a $\underline{N}(\Theta,1) = 1$ p.s. .

Les notions de $\underline{\underline{\Theta}}$-<u>martingales de pseudo noyaux</u>, de $\underline{\underline{A}}$-<u>martingales de mesures</u> (ou <u>de probabilités</u>) se comprennent d'elles mêmes.

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> $\underline{N}$ <u>une</u> $\underline{\underline{\Theta}}$-<u>surmartingale de pseudo-noyaux sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>vérifiant</u> $\underline{N}(0,1) = \underline{N}(\infty,1) = 1$ p.s. . <u>Alors</u> $\underline{N}$ <u>est une</u> $\underline{\underline{\Theta}}$-<u>martingale de pseudo noyaux markoviens. Si</u> N <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>surmartingale de mesures régularisant</u> $\underline{N}$, <u>alors</u> N <u>est indistinguable d'une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>martingale de probabilités.</u>

DEMONSTRATION. Pour tout Θ, définissons la mesure J_Θ sur $(M,\underline{\underline{M}})$, par $J_\Theta(f) = E[\underline{N}(\Theta,f)]$. La condition de surmartingale montre que l'on a $J_\infty \leqq J_\Theta \leqq J_0$. Si $\underline{N}(0,1) = \underline{N}(\infty,1) = 1$ p.s. alors J_∞ et J_0 sont des probabilités et donc $J_\infty = J_\Theta = J_0$. On a donc, pour toute f, $E[\underline{N}(\infty,f)|\underline{\underline{A}}_\Theta] = \underline{N}(\Theta,f)$ p.s., ce qui prouve que $\underline{N}$ est une $\underline{\underline{\Theta}}$- martingale de pseudo noyaux (markoviens car alors $\underline{N}(\Theta,1) = E[1|\underline{\underline{A}}_\Theta] = 1$ p.s.).

Soit N une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesures régularisant $\underline{N}$. On a alors $N_\infty(1) = N_0(1) = 1$ p.s. et donc, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, $N_T(1) = 1$ p.s. par suite, N(1) est indistinguable de 1, cqfd.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de régularisation des Θ- martingales de pseudo noyaux markoviens. Nous supposerons, pour simplifier l'énoncé du théorème, que $(M,\underline{\underline{M}})$ est encore radonien, mais <u>l'énoncé est encore valide sous les hypothèses de la remarque suivant le théoreme</u> 3 (même pour l'unicité). Nous donnerons ici une démonstration un peu plus compliquée que nécessaire pour bien montrer cela.

THEOREME 5. <u>Supposons</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>radonien. Si</u> $\underline{N}$ <u>est une</u> $\underline{\underline{\Theta}}$-<u>martingale de pseudo noyaux markoviens sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$, <u>alors il existe une unique</u> (<u>à l'indistinguabilité pres</u>) $\underline{\underline{A}}$-<u>martingale de probabilités</u> $\hat{N}$ <u>régularisant</u> $\underline{N}$.

DEMONSTRATION. Soit $\hat{N}$ la $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure, la plus petite possible, régularisant $\underline{N}$. La proposition précédente affirme que $\hat{N}$ est indistinguable d'une $\underline{\underline{A}}$-martingale de probabilités. On peut la transformer en une vraie $\underline{\underline{A}}$-martingale de probabilité. Si N est une autre $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesure régularisant $\underline{N}$, alors N est aussi indistinguable d'une $\underline{\underline{A}}$-martingale de probabilité et on a, pour presque tout ω et tout t, $\hat{N}_t(\omega) \leqq N_t(\omega)$, $\hat{N}_t(\omega)$ et $N_t(\omega)$ sont des probabilités. Par suite, on doit avoir, pour presque tout ω et tout t, l'égalité. cqfd.

REMARQUE. Si $\underline{N}$ est une $\underline{\underline{Q}}$-surmartingale de pseudo noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$ dénombrablement engendrée, il y a au plus une (à l'indistinguabilité près) $\underline{\underline{A}}$-martingale de mesures (et même $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesures si J_0 est bornée) régularisant $\underline{N}$. Cette remarque couvre le cas radonien, mais pas le cas de la remarque suivant le théorème 3, qui est pourtant vérifiée grâce à la démonstration du théorème précédent .

Nous n'avons traité en détail que le cas des $\underline{\underline{Q}}$-surmartingales de pseudo noyaux. Le cas des $\underline{\underline{Q}}$-martingales de pseudo noyaux et des $\underline{\underline{Q}}$-sous martingales de pseudo noyaux se traite exactement de la même façon (en remplaçant dans le théorème 3 " $\hat{N}$, la plus petite $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de mesures régularisant $\underline{N}$" par " $\hat{N}$, la plus grande $\underline{\underline{A}}$-sous martingale de mesures régularisant $\underline{N}$ ").

Le théorème 3 généralise le théorème de Schwartz, qui démontre ce résultat, sous les conditions habituelles, lorsque $\underline{\underline{Q}} = \mathbb{R}_+$ et les surmartingales $\underline{N}(f)$ sont continues à droite en probabilité (pour certaines f) [14]. La démonstration présentée ici a l'avantage de bien montrer le rôle de l'enveloppe de Snell d'une $\underline{\underline{Q}}$-surmartingale.

III UN THEOREME GENERAL DE DESINTEGRATION EN THEORIE DES PROCESSUS.

En théorie "élémentaire " des probabilités, on rencontre la situation suivante : un espace de probabilité $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, deux applications mesurables $q : (\Omega,\underline{\underline{F}}) \longrightarrow (E,\underline{\underline{E}})$ et $Y : (\Omega,\underline{\underline{F}}) \longrightarrow (M,\underline{\underline{M}})$. Le théorème général de désintégration nous dit alors que si $(M,\underline{\underline{M}})$ est un bon espace (Radonien par exemple), il existe une version régulière de probabilité conditionnelle de q conditionnée par Y :

un noyau $P_Y^q(x,dm)$ = " $P[q = x \mid Y \varepsilon\, dm]$ " .

Nous voulons généraliser cette construction en considérant, à la place de Y, un processus Y_t et en montrant qu'alors on peut choisir les probabilités conditionnelles $P^q_{Y_t}(x,dm)$ de façon à ce que l'application en (t,x) ainsi définie soit mesurable par rapport à une tribu de Meyer donnée, $\underline{\underline{A}}$, sur $(\mathbb{R}_+ \times E, \underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{E}})$.

Nous considérerons, en vue de certaines applications, non la probabilité image $q[P]$ sur $(E,\underline{\underline{E}})$, mais une probabilité Q telle que $q[P]$ soit absolument continue par rapport à celle- ci. Nous illustrerons ce résultat et ce type de situation par de nombreux exemples.

a) Projection à travers une application.

Nous considérons une application mesurable, q, de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ vers un espace mesuré $(E,\underline{\underline{E}})$, une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ sur $(\mathbb{R}_+ \times E, \underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{E}})$ et Q une probabilité sur $\underline{\underline{E}}$ telle que la loi image de P par q, notée $q[P]$, soit absolument continue par rapport à Q. Nous noterons $\bar{q}$ l'application $(t,\omega) \to (t,q(\omega))$.

THEOREME 6 (de projection). Si Z est un processus mesurable borné défini sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, il existe un unique (à la Q-indistinguabilité pres) processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable $\hat{Z}$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times E$ vérifiant

$$\forall T \in \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}}),\ \forall A \in \underline{\underline{A}}_T \qquad E_Q[\hat{Z}_T, A] = E_P[Z_{T\circ q}, q^{-1}(A)]$$

On dit que $\hat{Z}$ est la $(\underline{\underline{A}},P,Q)$-projection de Z à travers q.

DEMONSTRATION. Si g est une application mesurable bornée définie sur Ω, posons $Z(g)$ une densité de la mesure image $q[g.P]$ par rapport à Q. Appelons alors $\hat{g}$ la $\underline{\underline{A}}$-projection de $Z(g)$: $\hat{g}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, on a $\hat{g}_T = E_Q[Z(g)\,|\,\underline{\underline{A}}_T]$.

Si maintenant $Z(t,\omega)$ est de la forme $h(t)g(\omega)$, posons $\hat{Z} = h\hat{g}$. On vérifie aisément que le processus $\hat{Z}$ convient. On obtient le résultat général par un argument de classe monotone. L'unicité vient, comme toujours, du théorème de section.

REMARQUE. On peut également démontrer un théorème de projection duale : Si B est un processus croissant Q-intégrable sur E, il existe un unique processus croissant $\check{B}$ sur Ω, P-intégrable et $\bar{q}^{-1}(\underline{\underline{A}})$-mesurable vérifiant

$$\forall Z \quad E_P[\int^{\infty} Z_s \, d\check{B}_s] = E_Q[\int^{\infty} \hat{Z}_s \, dB_s]$$

Dans le cas où $q[P] = Q$, en notant $\underline{\underline{B}}$ pour $\bar{q}^{-1}(\underline{\underline{A}})$, on a

$$\hat{Z}\circ\bar{q} = {}^{\underline{\underline{B}}}Z \qquad \text{et} \qquad B^{\underline{\underline{A}}}\circ\bar{q} = \check{B} \qquad .$$

b) Un théorème général de désintégration en théorie des processus.

Nous considérons , en plus de la situation décrite en a), un processus mesurable Y défini sur Ω et à valeurs dans un espace standard (radonien si $Y(t,\omega)$ est constant en t) noté $(M,\underline{\underline{M}})$. On a alors

THEOREME 7. Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique $\underline{\underline{A}}$-noyau sur $(M,\underline{\underline{M}})$, N, vérifiant, pour toute f mesurable positive sur M,

N(f) est la $(\underline{\underline{A}},P,Q)$-projection de f(Y) à travers q c'est à dire, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$ et tout processus g $\underline{\underline{A}}$-mesurable

$$E_Q[N_T(f)g_T] = E_P[f(Y_{Toq})g_T oq]$$

REMARQUE. Dans le cas où $Q=q[P]$, on peut interpréter le noyau N_T de la façon suivante (si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$) : q est une application mesurable de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ vers $(E,\underline{\underline{A}}_T)$ et $N_T(x,dm)$ = "$P[q=x \mid Y_{Toq}\, \varepsilon\, dm]$" .

Par classe monotone, on voit que si f(t,m) est $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}} \times \underline{\underline{M}}$ -mesurable borné, alors la $(\underline{\underline{A}},P,Q)$ projection de $f(t,Y_t)$ est donnée par :

$$\hat{f}(t,x) = N_t(x,f_t) = \int_M f(t,m)N_t(x,dm)$$

DEMONSTRATION. On vérifie aisément que la famille de v.a. sur $(E,\underline{\underline{E}})$ $\underline{N}$ définie, pour f $\underline{\underline{M}}$-mesurable positive bornée et T t.a. de $\underline{\underline{A}}$, par (en reprenant la notation du th. 6) $\underline{N} =((\underline{N}(T,f) = E_Q[Z(f(Y_{Toq})|\underline{\underline{A}}_T])$ forme un $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})$-système de pseudo-noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$, et que chaque $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})$-système $\underline{N}(f)$ est régularisé par le processus projection $\widehat{f(Y)}$.

Le théorème 1 affirme alors l'existence d'un $\underline{\underline{A}}$-noyau N (unique d'après le théorème de section) régularisant $\underline{N}$. Il est clair que N est le $\underline{\underline{A}}$-noyau cherché.

Nous allons montrer que dans le cas où Y est un processus làdlàg et $(M,\underline{\underline{M}})$ est un espace polonais, le $\underline{\underline{A}}$-noyau N admet p.s. des limites à droite et à gauche lorsque l'on munit $\mathbb{M}$ (espace des mesures positives finies sur $\underline{\underline{M}}$) de la topologie de la convergence simple sur les fonctions continues bornées sur M (convergence étroite).

Nous définirons $\underline{\underline{\bar{A}}}^+$ (resp. $\underline{\underline{\bar{A}}}^-$) comme la tribu optionnelle (resp. prévisible) de la filtration vérifiant les conditions habituelles obtenue à partir de la filtration $(\underline{\underline{A}}_t)$. Nous noterons N^+ (resp. N^-) le $\underline{\underline{\bar{A}}}^+$-noyau (resp. $\underline{\underline{\bar{A}}}^-$-noyau) défini de la même façon que N, mais relativement à Y^+(resp. Y^-), processus des limites à droite (resp. à gauche) de Y, et à la tribu $\underline{\underline{\bar{A}}}^+$ (resp. $\underline{\underline{\bar{A}}}^-$).

THEOREME 8. <u>Avec les hypothèses et notations précédentes, le processus N, à valeurs dans $\mathbb{M}$, est p.s. làdlàg et</u> N^+ (<u>resp.</u> N^-) <u>est égal au processus de ses limites à droite</u> (<u>resp. à gauche</u>).

DEMONSTRATION. Montrons d'abord que si (T_n) est une suite de t.a. de $\underline{\underline{A}}$ décroissant strictement vers un t.a. T de $\bar{\underline{\underline{A}}}^+$, alors, pour toute f continue bornée, $N_{T_n}(f)$ converge p.s. vers $N_T(f)$:

la suite $f(Y_{T_n})$ converge en restant bornée vers $f(Y_{T+})$ et donc la suite des densités $Z(f(Y_{T_n}))$ ($= E_P^q[f(Y_{T_n})] \frac{dq[P]}{dQ}$) converge p.s. vers $Z(f(Y_{T+}))$, en restant bornée par une v.a. Q-intégrable fixe. Le lemme de Hunt permet alors d'affirmer que

$$N_{T_n}(f) = E_Q[Z(f(Y_{T_n}))|\underline{\underline{A}}_{T_n}]$$

converge p.s. vers

$$N_T^+(f) = E_Q[Z(f(Y_{T+}))|\bar{\underline{\underline{A}}}_T^+]$$

On en déduit, d'après ([10] II § 4, th. 9) que, si f est continue bornée, le processus N(f) est p.s. làd. Le "p.s." semble à priori dépendre de f ; on lève cette restriction en remarquant qu'il existe un ensembre dénombrable D de fonctions continues bornées tel que la convergence étroite soit égale à la convergence simple sur D. On en déduit que N lui-même est p.s. làd et, en utilisant le fait que tout t.a. T de $\bar{\underline{\underline{A}}}^+$ est limite de la suite de t.a. prévisibles $T_n' = T + 1/n$, eux-mêmes indistinguables de t.a. prévisible de la filtration exacte $\underline{\underline{A}}_t$ (et donc de t.a. de $\underline{\underline{A}}$), on identifie la limite, à l'aide de ce qui a été dit plus haut et du théorème de section, comme étant N^+.

La démonstration est analogue en ce qui concerne les limites à gauche et le processus N^-; on utilisera (à la place des T+1/n) le fait que tout t.a. prévisible est limite d'une suite strictement croissante de t.a. eux mêmes prévisibles.

Le théorème suivant n'est pas le meilleur possible, mais nous ne voulons pas trop alourdir les énoncés.

THEOREME 9. <u>Supposons</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>polonais et</u> Y <u>càdlàg. Dans ces conditions, le</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>noyau</u> N <u>ne dépend que de la loi du couple</u> (q,Y) (<u>à valeurs dans</u> $E\times D(\mathbb{R}_+,M)$) <u>et de</u> $(\underline{\underline{A}},Q)$ ($\underline{\underline{A}}$ <u>seulement si</u> $Q = q[P]$)

DEMONSTRATION. Appelons R la loi du couple (q,Y). Le processus cannonique $X: \mathbb{R}_+ \times D(\mathbb{R}_+,M) \longrightarrow M$ $((t,h) \rightarrow h(t))$ est mesurable. (C'est pour avoir cette condition que nous avons restreint notre énoncé; nous donnons maintenant une démonstration générale). Notons p l'application $(x,h) \to x$. On a alors, si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ et $A \varepsilon \underline{\underline{A}}_T$

$$E_Q[N_T(f),A] = E_R[f(X_{T\circ p}),p^{-1}(A)]$$

On en déduit que si $R = L(q,Y) = L(q',Y')$, alors, pour toute f, on a $N_T(f) = N'_T(f)$ Q-p.s., puis, $\underline{\underline{M}}$ étant dénombrablement engendrée, que N et N' sont indistinguables.

c) Exemples.

1) Le processus de prédiction de Knight [7].

Considérons un processus càdlàg X à valeurs dans un espace polonais F. Nous posons alors

$E = M = D(\mathbb{R}_+,F)$ (espace polonais)
$q(\omega) = X.(\omega)$, $Y_t = {}^tX$ $({}^tX : (s,\omega) \to X_{t+s}(\omega) - X_t(\omega))$
$Q = q[P] = P_X$ (loi de X)
$\underline{\underline{A}}$ = la tribu optionnelle de $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ (ou $\underline{\underline{F}}^o_t = \sigma(C_s,\ s \leq t)$
(C étant le processus cannonique)

Le processus N est alors le processus de prédiction de Knight étudié par Meyer [11] et Yor [15].

On a, pour tout t.a. T : $N_T(X,f) = E_P[f({}^TX|\underline{\underline{F}}^X_{T+}]$
et le processus N_t est un processus de Markov fort [11].

2) Le processus de prédiction de Aldous [1].

On considére encore un processus càdlàg X à valeurs dans un espace polonais F. On se donne une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. Nous posons

$E = \Omega$, $M = D(\mathbb{R}_+,F)$ (polonais)
$q(\omega) = \omega$, $Y_t(\omega) = X.(\omega)$
$Q = P$.

Le processus N ainsi défini vérifie: pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$:

$$N_T(f) = E_P[f(X)|\underline{\underline{A}}_T]$$

Il permet à Aldous d'étudier les rapports entre X et $\underline{\underline{A}}$ en introduisant le concept suivant:

$(X,\underline{\underline{A}})$ équivaut à $(X',\underline{\underline{A}}')$ si et seulement si la loi du processus N est égale à celle de N' (dans le cas où $\underline{\underline{A}}$ est la tribu optionnelle de la filtration $\underline{\underline{F}}^X_{t+}$ et $\underline{\underline{A}}'$ celle de $\underline{\underline{F}}^{X'}_{t+}$, cela revient à dire que X et X' ont même loi).

On peut alors montrer , grace à cette notion, que beaucoup de construction relatives à $(X,\underline{\underline{A}})$ et $(X',\underline{\underline{A}}')$ ont même loi [1].

3) Désintégration régulière le long d'une tribu de Meyer.

Nous supposons l'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ radonien. Soit q une application mesurable de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ vers un espace mesuré $(E,\underline{\underline{E}})$, ainsi que $\underline{\underline{A}}$ une tribu de Meyer sur $\mathbb{R}_+ \times E$. On se donne une probabilité P sur $\underline{\underline{F}}$ et $Q = q[P]$ sur $\underline{\underline{E}}$ (on pose $Y_t(\omega) = \omega$ et $M = \Omega$).

Le $\underline{\underline{A}}$-noyau N vérifie alors, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$:

N_T est une désintégration de P par rapport à $(q,\underline{\underline{A}}_T)$.

C'est une $\underline{\underline{A}}$-martingale de Probabilités :

$$N_T(f) = E_Q[Z(f) \mid \underline{\underline{A}}_T]$$

Par classe momotone, on voit que, pour tout processus mesurable borné X défini sur Ω, la $\underline{\underline{A}}$-projection de X à travers q est donnée par

$$\hat{X}_t(x) = \int X_t(\omega)N_t(x,d\omega)$$

Le support de $N_T(x,d\omega)$ possède d'intéressantes propriétés de régularité :

THEOREME 10. Soit $\underline{\underline{B}}$ une tribu de Meyer séparable incluse dans $\underline{\underline{A}}$. On a alors :

1°) Pour tout t.a. T de $\underline{\underline{B}}$, on a $B_T^x = B_{T(x)}^x$ (B_T^x = l'atome de $\underline{\underline{B}}_T$ contenant x).

2°) Pour presque tout x, pour tout t, $N_t(x,d\omega)$ est portée par $q^{-1}(B_t^x)$.

DEMONSTRATION. La tribu de Meyer $\underline{\underline{B}}$ étant séparable, on montre aisément qu'il existe un processus càdlàg X telle que $\underline{\underline{B}}$ soit la tribu de Meyer engendrée par X : c'est la tribu $\underline{\underline{B}}^X$ engendrée par le processus $(t,\omega) \rightarrow (t,X^t(\omega))$. Si T est un temps, on a alors $\underline{\underline{B}}_T = \sigma(T,X^T)$ et donc $B_T^x = \{y : T(x)=T(y) \text{ et } X^T(x)=X^T(y)\}$, ce qui montre immédiatement que B_T^x est inclus dans $B_{T(x)}^x$. Réciproquement, si $y \in B_{T(x)}^x$, alors $X^{T(x)}(x) = X^{T(x)}(y)$ et donc, pour tout processus Y $\underline{\underline{B}}$-mesurable on a $Y_{T(x)}(y) = Y_{T(x)}(x)$. Ceci est vrai en particulier pour $Y = 1_{[\![T]\!]}$ et on a donc que $1 = Y_{T(x)}(x) = 1_{\{T(y)=T(x)\}}(y)$, ce qui prouve que $T(x)=T(y)$ et donc finalement que Y appartient aussi à B_T^x . (cqfd pour 1)).

Montrons le 2°) : Par classe monotone, on voit que si $X(t,\omega,s,x)$ est $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \otimes \underline{\underline{F}} \otimes \underline{\underline{A}}$- mesurable, alors la $\underline{\underline{A}}$-projection de $X(t,\omega,t,q(\omega))$ est égale à $\int X(t,\omega,t,x)N_t(x,d\omega)$.

Posons $Z(t,\omega,s,x) = 1_{\{X^t(q(\omega)) \neq X^s(x)\}}$. On a alors $Z(t,\omega,t,q(\omega)) = 0$ et donc sa $\underline{\underline{A}}$-projection est évanescente. On doit donc avoir p.s., pour tout t : $\int 1_{\{X^t(q(\omega)) \neq X^t(x)\}} N_t(x,d\omega) = 0$ cqfd.

COROLLAIRE 11. <u>Pour tout processus</u> X <u>$\underline{\underline{A}}$-mesurable on a: pour presque tout</u> x, <u>pour tout</u> t, $N_t(x,d\omega)$ <u>est portée par</u> $\{\omega : X^t(q(\omega)) = X^t(x)\}$.

DEMONSTRATION. Par un argument de classe monotone, on voit qu'il existe une tribu de Meyer séparable $\underline{\underline{B}}$ incluse dans $\underline{\underline{A}}$ telle que X soit $\underline{\underline{B}}$-mesurable. Il suffit alors d'appliquer le 2°) du théorème précédent.

4°) <u>Un exemple d'utilisation en statistique bayésienne</u> (<u>Lanery</u> [9])

On considére un espace Radonien $(M,\underline{\underline{M}})$ (espace des paramètres), P une mesure de probabilité sur $(M\times\Omega, \underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{F}})$, Z un espace métrisable compact (espace des décisions) et une fonction de coût $b(m,z)$ (coût de décider z si le paramètre est m) définie sur $M\times Z$ et mesurable en (m,z), s.c.i. en z.

Si g est une "règle de décision" (i.e. une application $\underline{\underline{F}}$-mesurable de Ω vers Z), on appelle coût moyen de g le nombre

$$C(g) = \int b(m,g(\omega))P(dm,d\omega)$$

On se donne une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, on appelle coût minimal moyen connaissant $\underline{\underline{A}}$ jusqu'à T, le nombre

$$C(T) = \inf\{C(g) : g \text{ règle de décision } \underline{\underline{A}}_T\text{-mesurable}\}$$

Le théorème suivant (du à Lanery [9]) assure alors l'existence d'un processus optimal de décision:

THEOREME 12. <u>Il existe un processus de décision</u> f^*, <u>$\underline{\underline{A}}$-mesurable à valeurs dans</u> Z <u>tel que, pour tout t.a.</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$, <u>on ait</u>

$$C(T) = C(f^*_T)$$

DEMONSTRATION. Appelons p et q les projections de $M\times\Omega$ sur respectivement M et Ω, Q la projection de P sur Ω, et posons $E=\Omega$, $Y_t=p$. Le $\underline{\underline{A}}$-noyau N ainsi défini est l'unique $\underline{\underline{A}}$-noyau vérifiant, pour toute f $\underline{\underline{M}}$-mesurable positive, tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$ et tout A de $\underline{\underline{A}}_T$:

$$\int f(m)1_A(\omega)P(dm,d\omega) = E_Q[N_T(f),A]$$

Par classe monotone, on voit qu'il vérifie, pour toute h $\underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{A}}_T$-mesurable positive:

$$(*) \qquad \int h(m,\omega)P(dm,d\omega) = E_Q\left[\int_M h(m,\omega)N_T(\omega,dm)\right]$$

Ceci posé, revenons à notre problème. La mesure image de P par p sur M est portée par une réunion dénombrable de compacts, donc par un espace Lusinien. On peut donc se restreindre à celui-ci et supposer que M est Lusinien (par exemple que $M=[0,1]$).

Un théorème de Kunugui [2] assure alors l'existence d'une suite $b^n(m,z)$ de fonctions bornées, mesurables en (m,z) et continues en z telle que $b = \sup_n b^n$.

Posons, si $z \in Z$: $\bar{b}(t,\omega,z) = \int_M b(m,z)N_t(\omega,dm)$

$$\bar{b}^n(t,\omega,z) = \int_M b^n(m,z)N_t(\omega,dm)$$

Ces processus sont des $\underline{\underline{A}}$-martingales sci en z pour $\bar{b}$ et continue en z pour $\bar{b}^n$.

Posons maintenant $B(t,\omega) = \inf_z \bar{b}(t,\omega,z)$

$$B^n(t,\omega) = \inf_z \bar{b}^n(t,\omega,z)$$

Si D est un ensemble dénombrable dense dans Z, on a

$$B^n(t,\omega) = \inf_{z\in D} \bar{b}^n(t,\omega,z)$$

ce qui prouve que B^n est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

D'après le théorème de minimax, on a

$$B(t,\omega) = \sup_n B^n(t,\omega)$$

ce qui prouve que notre processus $B(t,\omega)$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Considérons alors l'ensemble $H = \{(t,\omega,z) : B(t,\omega) = \bar{b}(t,\omega,z)\}$:

- pour z fixé, H_z est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
- pour (t,ω) fixé, $H_{(t,\omega)}$ est un fermé non vide de Z.
- pour F fermé de Z, $H^{-1}(F) = \{(t,\omega) \exists z\in F : B(t,\omega) = \bar{b}(t,\omega,z)\}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable :

  si l'on pose $B^F(t,\omega) = \inf_{z\in F}\bar{b}(t,\omega,z)$, le raisonnement précédent montre que B^F est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, et donc $H^{-1}(F) = \{B = B^F\}$ l'est aussi.

Le théorème de Rill-Nardzewski-Kakutani [2] permet alors d'assurer l'existence d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable f^*, à valeurs dans Z, qui soit une section de H, c'est à dire, pour tout (t,ω) :

$$B(t,\omega) = \bar{b}(t,\omega,f^*(t,\omega))$$

Montrons que ce processus f^* convient : si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ et si g est une règle de décision $\underline{\underline{A}}_T$-mesurable, on a alors :

$$C(g) = \int b(m,g(\omega))P(dm,d\omega) = E[\int b(m,g(\omega))N_T(\omega,dm)$$

$$\geqq E[B_T] = E[\int b(m,f_T^*(\omega)N_T(\omega,dm)] = \int b(m,f_T^*(\omega)P(dm,d\omega) = C(f_T^*)$$

On a donc bien, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$: $C(T) = c(f_T^*)$ cqfd.

IV. MESURES ALEATOIRES ET THEORIE DES PROCESSUS PARAMETRES.

Nous considérons un espace Radonien $(E,\underline{\underline{E}})$ (espace des paramètres), un espace de probabilité $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$.

DEFINITION. On appelle <u>mesure aléatoire</u> toute famille, $m(\omega,dt,dx)$, $\underline{\underline{F}}$-mesurable de mesures sur $\mathbb{R}_+\times E$.
Une mesure aléatoire <u>m est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesure</u> si, pour tout processus $X(t,\omega,x)$ $\underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{E}}$-mesurable positif, le processus $\int_0^t\int_E X_s(\omega,x)m(\omega,ds,dx)$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Si m est une mesure aléatoire, <u>on pose</u> Mm = la mesure définie ainsi:

si X est $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\otimes\underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{E}}$ mesurable positif, $Mm(X) = E[\int_0^\infty\int_E X_s(\omega,x)m(\omega,ds,dx)]$

et on dit que m <u>est intégrable</u> si Mm est une mesure finie.

On dit qu'une mesure L sur $(\mathbb{R}_+\times\Omega\times E,\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\times\underline{\underline{F}}\times\underline{\underline{E}})$ est une P-<u>mesure</u> si elle ne charge pas les évanescents, i.e. si sa projection sur Ω est absolument continue par rapport à P.

Nous allons redémontrer rapidement quelques résultats bien connus et dus à Jacod [6]. On remarquera le rôle joué par les désintégrations de mesure.

THEOREME 13. <u>Une mesure L sur $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\times\underline{\underline{F}}\times\underline{\underline{E}}$ est une P-mesure si et seulement s'il existe une mesure aléatoire $\bar{m}$ telle que L = Mm. Celle-ci est essentiellement unique</u>.

DEMONSTRATION. C'est un résultat bien classique: on a la situation suivante:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}_+\times\Omega\times E,L) \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"'] & (\Omega,q[L]<<P) \arrow[dl, bend left, "m"] \\
\mathbb{R}_+\times E &
\end{tikzcd}$$

m est le noyau de Ω sur $\mathbb{R}_+\times E$ de "mesure conditionnelle de p sachant q" (calculé relativement à P et non à q[L]): en effet, si $F\in\underline{\underline{F}}$ et $B\in\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\times\underline{\underline{E}}$

$$E[m(B),F] = L[p^{-1}(B),q^{-1}(F)] = L[B\times F] \quad \text{cqfd.}$$

Nous allons maintenant décomposer les mesures aléatoires:

THEOREME 14. <u>Si</u> m <u>est une mesure aléatoire intégrable, on peut la décomposer en</u>

$$m(\omega,dt,dx) = dB_t(\omega)n(t,\omega,dx)$$

<u>où</u> $B_t(\omega) = m(\omega,[0,t],E)$ <u>et</u> $n(\omega,t,dx)$ <u>est un</u> $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\otimes\underline{\underline{F}}$<u>-noyau sur</u> $(E,\underline{\underline{E}})$.

DEMONSTRATION. Appelons L la mesure Mm, et $dB_t(\omega)$ la mesure $m(\omega,dt,E)$. Nous avons alors la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}_+\times\Omega\times E,L) \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & (\mathbb{R}_+\times\Omega,dP(\omega)dB_t(\omega)) \arrow[dl, bend left, "n"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

Le noyau de probabilités conditionnelles de q sachant p ainsi défini, n, vérifie : pour tout $C\in\underline{\underline{E}}$ et tout $A\in\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\times\underline{\underline{F}}$

$$E[\int_0^\infty n(t,\omega,C)1_A(t,\omega)dB_t(\omega)] = L[p^{-1}(C)q^{-1}(A)]$$

soit

$$E[\iint 1_{A\times C}(t,\omega,x)n(t,\omega,dx)dB_t(\omega)] = L[A\times C]$$

ce qui prouve que $dB_t(\omega)n(t,\omega,dx)$ est aussi la mesure aléatoire associée à L. Par unicité, on en déduit le résultat.

Remarquons qu'une telle décomposition est essentiellement unique.

Démontrons maintenant le théorème de projection duale pour les mesures aléatoires

THEOREME 15. <u>Si</u> m <u>est une mesure aléatoire intégrable, il existe une unique</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-mesure, notée</u> $m^{\underline{\underline{A}}}$, <u>telle que</u> $Mm = Mm^{\underline{\underline{A}}}$ <u>sur la tribu</u> $\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{E}}$.
<u>On dit que</u> $m^{\underline{\underline{A}}}$ <u>est la</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-projection duale de</u> m <u>sur</u> $\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{E}}$.

DEMONSTRATION. Décomposons m en $dB_t(\omega)n(t,\omega,dx)$.

- Considérons B^a la $\underline{\underline{A}}$-projection duale de B [10].
- Appelons E_B la mesure sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ égale à $dP(\omega)dB_t(\omega)$. Appelons n_a le $\underline{\underline{A}}$-noyau "espérance conditionnelle de n par rapport à $\underline{\underline{A}}$ pour la mesure E_B" :

  $$\forall f\ \underline{\underline{E}}\text{-mesurable positive},\ n_a(t,\omega,f) = E_B[n(f)|\underline{\underline{A}}](t,\omega)\quad (E_B\ \text{p.s.})$$

  (l'existence en est assurée car E est Radonien).

<u>Posons enfin</u> $m^{\underline{\underline{A}}}(\omega,dt,dx) = dB^a_t(\omega)n_a(t,\omega,dx)$

Il est clair que $m^{\underline{\underline{A}}}$ est une $\underline{\underline{A}}$-mesure.

Montrons que Mm et $Mm^{\underline{\underline{A}}}$ coïncident sur la tribu $\underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{E}}$:

Si $X_t(\omega)$ est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable positif et $f(x)$ une fonction $\underline{\underline{E}}$-mesurable positive, on a

$$\begin{aligned}
Mm^{\underline{\underline{A}}}(Xf) &= E[\iint X_t(\omega)f(x)m^{\underline{\underline{A}}}(\omega,dt,dx)] \\
&= E[\int_0^\infty n_a(t,\omega,f)dB_t^a(\omega)] \\
&= E[\int_0^\infty n_a(t,\omega,f)dB_t(\omega)] && \text{(propriété de la projection duale } n_a(f) \text{ étant } \underline{\underline{A}}\text{-mesurable)} \\
&= E_B[n_a(f)] = E_B[n(f)] && \text{(propriété de l'espérance conditionnelle par rapport à } E_B) \\
&= E[\int_0^\infty n(t,\omega,f)dB_t(\omega)] \\
&= Mm(Xf)
\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par un argument de classe monotone.

Il reste à montrer l'unicité: si m et m' sont deux $\underline{\underline{A}}$-mesures telles que Mm et Mm' coïncident sur $\underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{E}}$, alors elles sont indistinguables. En effet, pour toute f $\underline{\underline{E}}$-mesurable positive, les processus croissants $\underline{\underline{A}}$-mesurables $m(\omega,[0,t],f)$ et $m'(\omega,[0,t],f)$ engendrent la même mesure sur $\underline{\underline{A}}$ et sont donc indistinguables. On conclut en faisant varier f parmi une famille dénombrable engendrant $\underline{\underline{E}}$.

COROLLAIRE 16. <u>Une mesure aléatoire intégrable</u> m <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesure si et seulement si elle peut se décomposer en</u>

$$m(\omega,dt,dx) = dB_t(\omega)n(t,\omega,dx)$$

<u>où</u> B <u>est un processus croissant</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable et</u> n <u>est un</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>noyau sur</u> $(E,\underline{\underline{E}})$. <u>Une telle décomposition est essentiellement unique</u>.

DEMONSTRATION. Il est clair que la condition est suffisante. Elle est également nécessaire : si m est une $\underline{\underline{A}}$-mesure, alors on doit avoir, par unicité, $m = m^{\underline{\underline{A}}}$, et on vient de voir que $m^{\underline{\underline{A}}}$ est de la forme désirée

A partir de ce théorème de projection duale, on peut recopier les arguments de P.A. Meyer [13] pour développer une théorie générale des processus paramétrés (ici donc sans conditions habituelles, dans le cadre général des tribus de Meyer):

On en déduit un théorème de section sur $\underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{E}}$ par des supports de $\underline{\underline{A}}$-mesure (à la place des graphes de t.a.) [13].

A partir de ce théorème de section, on déduit l'existence d'une $\underline{\underline{A}}$-projection à un paramètre :

Si $X(t,\omega,x)$ est un processus $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}^+}\otimes\underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{E}}$ -mesurable borné, il existe un unique processus $\underline{\underline{A}}\times\underline{\underline{E}}$-mesurable $\hat{X}$ (unique à l'indistinguabilité pres) vérifiant :

Pour toute $\underline{\underline{A}}$-mesure m : $Mm(X) = Mm(\hat{X})$

soit encore : pour tout x, $\hat{X}(.,.,x)$ est la $\underline{\underline{A}}$-projection de $X(.,.,x)$

On peut alors refaire les constructions étudiées dans les parties précédentes avec des processus paramétrés.

APPENDICE

LIMITES FAIBLES DE $\underline{\underline{A}}$-NOYAUX.

DEFINITION 7. Soit $(\underline{N}^n)$ une suite de $\underline{\underline{\Theta}}$-systèmes de pseudo noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$. Nous dirons que cette suite converge faiblement si, pour tout Θ, les v.a. $\underline{N}^n(\Theta,1)$ sont intégrables et si, pour toute f positive bornée, les v.a. $N^n(\Theta,f)$ convergent faiblement dans $(L^1,\sigma(L^1,L^\infty))$.

Nous dirons qu'un $\underline{\underline{\Theta}}$-système de pseudo noyaux, $\underline{N}$, sur $(M,\underline{\underline{M}})$ est limite faible des $\underline{N}^n$ si, pour tout Θ et toute f positive bornée, $\underline{N}(\Theta,f)$ est limite faible des $\underline{N}^n(\Theta,f)$.

PROPOSITION 6. Soit (N^n) une suite de $\underline{\underline{\Theta}}$-systèmes de pseudo noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$ qui converge faiblement. Il existe alors un $\underline{\underline{\Theta}}$-système de pseudo noyaux $\underline{N}$ sur $(M,\underline{\underline{M}})$ qui est limite faible des $\underline{N}^n$.

DEMONSTRATION. Pour toute f positive bornée et tout Θ, choisissons une v.a. $\underline{\underline{A}}_\Theta$- mesurable, que nous noterons $\underline{N}(\Theta,f)$ et qui soit limite faible des $\underline{N}^n(\Theta,f)$. Montrons que $\underline{N}(\Theta,f)$ est un $\underline{\underline{\Theta}}$-système de pseudo noyaux. Il est clair que, pour toute f, $\underline{\underline{N}}(f)$ est un $\underline{\underline{\Theta}}$-système, et que, pour tout Θ, la correspondance $f \longrightarrow \underline{\underline{N}}(\Theta,f)$ est positivement linéaire. Il reste à montrer la condition 3°) de continuité.

Considérons les mesures bornées sur $\underline{\underline{M}}$ définies par $J^n_\Theta(f) = E[\underline{\underline{N}}^n(\Theta,f)]$. Pour toute f et Θ, on a $\lim_n J^n_\Theta(f) = E[\underline{\underline{N}}(\Theta,f)]$ ($\overset{d}{=} J_\Theta(f)$). Le théorème de Vitali nous dit alors que J_Θ est une mesure bornée sur $\underline{\underline{M}}$. Par conséquent, si f_n tend simplement vers 0 en restant bornée, on doit avoir que $J_\Theta(f_n)$ tend vers 0. Par suite $\underline{\underline{N}}(\Theta,f_n)$ converge dans L^1 (et donc en probabilité) vers 0. cqfd.

THEOREME 7. <u>Supposons</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>radonien</u> (<u>ou vérifiant l'hypothèse de la remarque suivant le théorème</u> 3). <u>Soit</u> $(\underline{\underline{N}}^n)$ <u>une suite de</u> $\underline{\underline{\Theta}}$-<u>surmartingales</u> (resp. <u>martingales</u>, <u>sousmartingales</u>) <u>de pseudo noyaux sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$ <u>qui converge faiblement</u>. <u>Il existe alors une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>surmartingale</u> (resp. <u>martingale</u>, <u>sousmartingale</u>) <u>de mesures sur</u> $(M,\underline{\underline{M}})$, N, <u>qui est limite faible des</u> $\underline{\underline{N}}^n$.

DEMONSTRATION. Nous ne traiterons que le cas des surmartingales. Soit $\underline{\underline{N}}$ un $\underline{\underline{\Theta}}$système de pseudo noyaux, limite faible des $\underline{\underline{N}}^n$. On voit immédiatement que $\underline{\underline{N}}$ est une $\underline{\underline{\Theta}}$-surmartingale de pseudo noyaux, et il ne reste qu'à appliquer le théorème 3.

Dans le cas général, on a un théorème analogue, si on utilise tous les temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, grâce au théorème de Mokobodzki [12], que nous réénonçons dans notre cadre.

THEOREME 8. (De Mokobodzki). <u>Soit</u> (X^n) <u>une suite de processus</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurables tels que</u> $\{(X^n)^*_\infty = \sup_t |X^n_t|,\ n \in \mathbb{N}\}$ <u>soit uniformément intégrable</u>. <u>Si</u>, <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$, <u>les v.a.</u> X^n_T <u>convergent faiblement dans</u> L^1, <u>alors il existe un processus</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable</u> X, <u>unique à l'indistinguabilité près</u>, <u>tel que</u>, <u>pour tout t.a.</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$, X^n_T <u>converge faiblement vers</u> X_T.

<u>De plus</u>, <u>pour toute v.a.</u> S <u>positive</u>, X^n_S <u>converge faiblement vers</u> X_S <u>et même</u>, <u>pour tout processus croissant brut borné</u>, <u>on a</u>

$$\int_0^\infty X^n_s dB_s \ \underline{\text{converge faiblement vers}} \ \int_0^\infty X_s dB_s \quad .$$

DEMONSTRATION. Nous allons d'abord travailler dans la P-complétée de $\underline{\underline{A}}$ [10], pour ensuite revenir dans $\underline{\underline{A}}$. Supposons donc d'abord que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète. Montrons que pour tout processus croissant borné brut $E[\int_0^\infty X^n_s dB_s]$ converge.

Soit B^a la $\underline{\underline{A}}$-projection duale de B (processus croissant brut borné par la constant c); c'est un processus croissant intégrable $\underline{\underline{A}}$-mesurable à sauts bornés par c.

On a de plus: $E[\int_0^\infty X_s^n dB_s] = E[\int_0^\infty X_s^n dB_s^a]$.

Posons, pour tout s, $T_s = \inf\{t : B_t^a \geq s\}$; c'est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$. Posons $C^k = (B^a)^{T_k}$; c'est un processus croissant intégrable $\underline{\underline{A}}$-mesurable borné par c + k et on a :

$$E[\int_0^\infty X_s^n dC_s^k] = E[\int_0^{c+k} X_{T_s}^n I_{\{T_s<\infty\}} ds] = \int_0^{c+k} E[X_{T_s}^n I_{\{T_s<\infty\}}]ds$$

expression qui converge d'après l'hypothèse de convergence faible et le théorème de Lebesgue.

La différence : $E\int_0^\infty X_s^n d(B^a - C^k)_s$ est égale à $E[\int_0^\infty X_s^n d(B-B^{T_k})_s]$ et est donc majorée par $E[\int_0^\infty (X^n)_\infty^* d(B-B^{T_k})_s] \leq E[(X^n)_\infty^*(B_\infty - B_{T_k})]$

$$\leq cE[(X^n)_\infty^* I_{\{T_k<\infty\}}]$$

expression qui tend uniformément (en n) vers 0 quand k tend vers l'infini, d'après l'hypothèse d'uniforme intégrabilité.

Le théorème de Mokobodzki [12] nous dit alors qu'il existe un processus mesurable Y, unique à l'indistinguabilité près, tel que, pour tout processus croissant brut borné B,

$$\int_0^\infty X_s^n dB_s \quad \text{converge faiblement vers} \quad \int_0^\infty Y_s dB_s$$

Montrons que Y est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Soit X sa $\underline{\underline{A}}$-projection. Pour tout temps d 'arrêt T de $\underline{\underline{A}}$, X_T^n converge faiblement vers X_T et la démonstration précédente montre alors que, si B est un processus croissant borné brut, l'intégrale de X^n par rapport à B converge faiblement vers celle de X par rapport à B. Par unicité, X et Y sont indistinguables.

Si $\underline{\underline{A}}$ n'est pas P-complète, la suite (X^n) de l'énoncé vérifie aussi l'hypothèse pour tout t.a. de la P-complétée de $\underline{\underline{A}}$ car ceux-ci sont égaux p.s. à des t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Il existe donc un processus X', $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable vérifiant la conclusion. Il suffit alors de prendre pour X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable indistinguable de X'.

Nous pouvons alors énoncer un théorème général d'existence de limite faible de suite de $\underline{\underline{A}}$-noyaux.

DEFINITION 8. Nous dirons qu'<u>une suite de $\underline{\underline{A}}$-noyaux converge faiblement</u> si, pour toute f positive bornée et tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, les v.a. $N_T^n(f)$ sont intégrables et convergent faiblement dans L^1, et si, de plus, l'ensemble $\{(N^n(1))_\infty^*, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable.

THEOREME 9. <u>Supposons $(M,\underline{\underline{M}})$ standard. Soit (N^n) une suite de $\underline{\underline{A}}$-noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$ qui converge faiblement. Il existe alors un $\underline{\underline{A}}$-noyau N sur $(M,\underline{\underline{M}})$ qui est limite faible de la suite (N^n).</u>

DEMONSTRATION. D'après la proposition 6, il existe un $T(\underline{\underline{A}})$-système de pseudo noyaux sur $(M,\underline{\underline{M}})$, $\underline{N}$, qui est limite faible des $T(\underline{\underline{A}})$-systèmes de noyaux N^n. Montrons que $\underline{N}$ est régularisable. Si f est positive et bornée, les processus $N^n(f)$ vérifient l'hypothèse du théorème de Mokobodzki. Il existe donc un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable f^* qui est limite faible de la suite $(N^n(f))$. Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, on a alors égalité p.s. entre $\underline{N}(T,f)$ et f^*_T , et le théorème 1 permet de conclure.

REMARQUE. D'après le théorème 2, le $\underline{\underline{A}}$-noyau N, limite faible des N^n, <u>est unique</u>, à l'indistinguabilité près.

D'après le théorème 8, <u>il vérifie de plus</u> : pour tout processus croissant borné brut B (et aussi tout processus croissant de $BMO(\underline{\underline{A}})$, i.e. toute $\underline{\underline{A}}$-projection duale d'un processus croissant borné brut),

$$\int_0^\infty N^n_s(f)\,dB_s \quad \text{converge faiblement vers} \quad \int_0^\infty N_s(f)\,dB_s$$

<u>On a des résultats analogues en remplaçant la convergence faible par la convergence en probabilité ou la convergence p.s.</u> .

<u>REFERENCES</u>.

1 . D. ALDOUS. Weak convergence of stochastic processes for processes viewed in the Strasbourg manner.

2 . C. DELLACHERIE. Un cours sur les ensembles analytiques. Analytic sets. Rogers et alia. Academic press 1980.

3 . C. DELLACHERIE et E. LENGLART. Sur des problèmes de régularisation de recollement et d'interpolation en théorie des martingales. Sém. de Proba. XV, lect. notes in M. n° 850, p. 328-346, Springer-Verlag 1980.

4 . C. DELLACHERIE et E. LENGLART. Sur des problèmes de régularisation de recollement et d'interpolation en théorie des processus. Sém. de Proba. XVI, lect. notes in M. n° 920, p. 298-313, Springer-Verlag 1981.

5 . R.K. GETOOR. On the construction of kernels. Sém. de Proba. IX, lect. notes in M. n° 465, p. 443-463, Springer-Verlag 1975.

6 . J. JACOD. Calcul stochastique et problème de martingales. Lect. notes in Math. n° 714, Springer-Verlag 1979.

7 . F.B. KNIGHT. A predictive view of continuous time processes. The annals of Proba. 3, 573-596, 1975.

8 . F.B. KNIGHT. Essays on the prediction process. Institute of math. statistics. Lecture notes serie Vol 1, Hayward, California 1981.

9 . E. LANERY. Solutions bayesiennes en théorie de la décision statistique. Annales de l'institut H. Poincaré vol. XVIII, n° 1, p. 55-79 1982.

10. E. LENGLART. Tribus de Meyer et théorie des processus. Sém de Proba. XIV, Lect. notes in M. n° 784, p. 500-546, Springer-Verlag 1980.

11. P.A. MEYER. La théorie de la prédiction de F. Knight. Sém. de Proba. X, Lect. notes in M. p. 86-103, Springer-Verlag 1976.

12. P.A. MEYER. Convergence faible de processus, d'après Mokobodzki. Sém. de Proba. XI, Lect. notes in M. n° 581, p. 109-119, Springer-Verlag 1977.

13. P.A. MEYER. Une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Sém. de Proba. XIII, Lect. notes in M. n° 721, p. 199-203, Springer-Verlag 1979.

14. L. SCHWARTZ. Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. Journal d'analyse mathématique, Vol. XXVI, Jérusalem, 1973.

15. M. YOR. Sur les théories du filtrage et de la prédiction. Sém. de Proba. XI, Lect. notes in M. n° 581, p. 257-297, Springer-Verlag 1977.

Erik LENGLART
Laboratoire de Mathématiques
E.R.A CNRS n° 900
Université de Rouen
B.P. 67, 76 130 Mont Saint Aignan