SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

La classe des semimartingales qui permettent d'intégrer les processus optionnels

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 311-320
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__311_0>

LA CLASSE DES SEMIMARTINGALES QUI PERMETTENT D'INTEGRER LES PROCESSUS OPTIONNELS.

Par Maurizio PRATELLI.

On connait deux définitions de l'intégrale stochastique d'un processus optionnel K par rapport à une semimartingale X : l'intégrale stochastique compensée $K_{\dot{c}}X$ (voir [2] pag. 356) qui n'est définie que si X est une martingale locale (et qui d'ailleurs n'est pas invariante par changement de loi) et l'intégrale selon la définition de Yor (voir [6]) dans laquelle X est une semimartingale quelconque mais il faut se restreindre à certaines sous-classes de processus optionnels.

Dans cet article on caractérise la classe des semimartingales qui permettent d'intégrer tous les processus optionnels (bornés) en conservant les traits essentiels du calcul stochastique : une modification du théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodzki montre que cette classe est formée par les processus qui sont la somme d'une martingale continue et d'un processus à variation finie.

On étudie dans la deuxième partie une topologie convenable pour cet espace de processus.

1. LES SEMIMARTINGALES RESTREINTES.

Soit $(\Omega,\underline{F},(\underline{F}_t),\mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, vérifiant les conditions habituelles de [2] et tel que $\underline{F}_\infty = \bigvee_t \underline{F}_t$. On désigne par X un processus adapté, indexé par $[0,\infty[$, à trajectoires c.à.d.l.à.g. (y compris une limite finie à l'infini $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$); on peut supposer sans inconvénient que $X_0=0$, et on écrit comme d'habitude $\Delta_s X = X_s - \lim_{t\uparrow s} X_t$.

DEFINITION 1.1 *On dit que X est une semimartingale restreinte* (en abrégé s.m.r.) *si X est une semimartingale telle que, pour tout t, on ait*

$\sum_{s\leq t}|\Delta_s X| < \infty$ p.s.

Il est connu (voir [1] pag. 19) que X est une s.m.r. si et seulement si $X = M+V$, où M est une martingale locale continue et V un processus adapté à variation finie. Le résultat principal est le théorème suivant, qui est une modification du th. 80 pag. 401 de [2], et qui caractérise les semimartingales restreintes ; je préfère travailler avec les s.m.r. jusqu'à l'infini (les semimartingales jusqu'à l'infini telles que $\sum_{s<+\infty} |\Delta_s X| <+\infty$ p.s.) car cela simplifie les notations, surtout dans la deuxième partie (si l'on veut caractériser les s.m.r. ordinaires, on ne doit faire que des modifications formelles).

On appelle <u>processus optionnel élémentaire</u> un processus K de la forme

$$K(s,w) = \sum_{i=1}^{n} K_i(w)\, I_{[[T_i,T_{i+1}[[}(s,w)$$

où $T_1\leq T_2\ldots$ sont des temps d'arrêt et chaque variable K_i est $\underline{F}_{T_i}$ mesurable bornée. On peut toujours définir l'intégrale stochastique élémentaire

$$(K.X)_\infty = \int_{]0,\infty]} K_s dX_s = \sum_{i=1}^{n} K_i (X^-_{T_{i+1}} - X^-_{T_i})$$

où X^- est le processus des limites à gauche, c'est-à-dire $X^-_t = \lim_{s\uparrow t} X_s$. (On convient que $X^-_0=0$).

<u>THEOREME</u> 1.2 *X est une s.m.r. jusqu'à l'infini si et seulement si pour toute suite K^n de processus optionnels élémentaires qui converge uniformément vers 0, les intégrales $(K^n.X)_\infty$ convergent vers 0 en probabilité.*

<u>Démonstration</u> Si Θ est l'ensemble des processus optionnels élémentaires K tels que $|K| \leq 1$, la condition du théorème équivaut à dire que l'ensemble $\{ (K.X)_\infty : K\in\Theta \}$ est borné dans L^0.

Pour vérifier que la condition est suffisante, montrons d'abord que la v.a $X^* = \sup_t |X_t|$ est p.s. finie. Supposons au contraire que $\mathbb{P}\{X^*=+\infty\}=a>0$; il existe b tel que, si $K\in\Theta$, $\mathbb{P}\{|(K.X)_\infty|>b\}\leq a/2$. Soit

$T=\inf\{s: |X_s|\geq 2b\}$ et soit $K^n=I_{[[0,T+\frac{1}{n}[[}$; remarquons que $(K^n.X)_\infty=X^-_{T+\frac{1}{n}}$.

On a que $\mathbb{P}\{|X_T|>b\}\geq a$, ce qui est contrédit par l'inégalité

$\mathbb{P}\{|X_T|>b\}\leq \min\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|X^-_{T+\frac{1}{n}}|>b\}\leq a/2$ (due au fait que $\{|X_T|>b\}\subseteq$ $\min\lim_{n\to\infty}\{|X^-_{T+\frac{1}{n}}|>b\}$). Quitte à remplacer $\mathbb{P}$ par une probabilité équivalente, on peut donc supposer que l'ensemble $\{(K.X)_\infty|K\in\Theta\}$ soit convexe, borné dans $L^0(\mathbb{P})$ et contenu dans $L^1(\mathbb{P})$: le théorème 83 pag. 403 de [2] montre alors l'existence d'une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, admettant une densité bornée et telle que $\sup_{K\in\Theta} E_{\mathbb{Q}}[(K.X)_\infty]=c<+\infty$.

Interprétons maintenant cette condition :

(1) On peut approcher le processus prévisible élémentaire

$H=H_0 I_{]]0,t_1]]}+\ldots+H_n I_{]]t_n,\infty[[}$ (avec H_i $\underline{F}_{t_i}$-mesurable, bornée par 1) par les processus $K^\varepsilon=H_0 I_{[[\varepsilon,t_1+\varepsilon[[}+\ldots+H_n I_{[[t_n+\varepsilon,\infty[[}$ $(\varepsilon>0)$: puisque $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(K^\varepsilon.X)_\infty=(H.X)_\infty$ p.s. et X^* est $\mathbb{Q}$-intégrable, on obtient $E_{\mathbb{Q}}[(H.X)_\infty]\leq c$, ce qui montre (voir [2] pag. 402) que X est une $\mathbb{Q}$-quasi martingale (donc une $\mathbb{P}$-semimartingale) jusqu'à l'infini.

(2) Soient $T_1<T_2<..<T_n$ des temps d'arrêt, $\varepsilon>0$, $S_i=(T_i+\varepsilon)\wedge T_{i+1}$ et $K^\varepsilon=\sum_i \mathrm{sgn}(\Delta_{T_i}X)I_{[[T_i,S_i[[}$. Puisque $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(K^\varepsilon.X)_\infty=\sum_{i=1}^n|\Delta_{T_i}X|$ p.s. , on obtient $E_{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^n|\Delta_{T_i}X|]\leq c$. Si cn considère une suite T_n de temps d'arrêt à graphes disjoints tels que $\bigcup_n[T_n]=\{\Delta X\neq 0\}$, on trouve $E_{\mathbb{Q}}[\sum_{s<+\infty}|\Delta_s X|]\leq c$, donc

$\sum_{s<+\infty}|\Delta_s X|<\infty$ $\mathbb{P}$ p.s.

Soit par contre X une s.m.r. et M+V sa décomposition avec M martingale locale continue: si K est un processus optionnel borné quelconque, on peut définir aisément l'intégrale K.X=K.M+K.V . En effet la deuxième est une intégrale de Stieltjès qui se calcule trajectoire par trajectoire, et pour la première on a $K.M=H.M$ où H est un processus prévisible tel que $\{K\neq H\}$ soit contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt (et le résultat ne dépend pas du choix de H, voir [5] pag. 274). On n'a aucune difficulté à vérifier que la condition de continuité est satisfaite, ce qui achève la démonstration du théorème.

On vérifie immédiatement que si X est une s.m.r. et K un processus optionnel borné, le processus K.X est encore une s.m.r. ; en outre f(X) est une s.m.r si f est ou bien de classe C^2 (grâce à la formule d'Ito) ou bien convexe (grâce à la formule (4) pag.21 de [1]).

On peut aussi caractériser les s.m.r. par la méthode de Metivier-Pellaumail:

<u>THEOREME</u> 1.3 X <u>est une s.m.r. si et seulement s'il existe un processus croissant adapté</u> A <u>tel que pour tout processus optionnel élémentaire</u> K <u>et tout temps d'arrêt</u> T <u>on ait</u>

$$(1.4)\qquad E[\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}KdX)^2] \leq E[A_{T-}.\int_{]0,T[}K_s^2dA_s]$$

(Plus précisement X est une s.m.r. jusqu'à l'infini et A est tel que $A_\infty=\sup_{s<+\infty}A_s<+\infty$ p.s.). En effet Métivier et Pellaumail ont montré (voir [4] pag. 129) que X est une semimartingale si et seulement s'il existe un processus croissant A qui vérifie l'inégalité (1.4), où toutefois K est supposé prévisible élémentaire: on dit alors que A contrôle X. Nous dirons donc que A <u>contrôle strictement</u> X si la condition du théorème 1.3 est vérifiée.

<u>Démonstration du théorème</u> 1.3. Il est évident que si X est strictement contrôlé par A, il vérifie la condition du théorème 1.2 et donc est une s.m.r. Soit par contre X=M+V une s.m.r. : pour ce qui concerne la partie martingale

continue on a:

$$E[\sup_{0<s<T} (\int_{]0,s]} KdM)^2] = E[\sup_{0<s\leq T} (\int_{]0,s]} KdM)^2] \leq 4\, E[(\int_{]0,T]} KdM)^2]$$

$$= 4\, E[\int_{]0,T]} K_s^2 d\langle M\rangle_s] \leq 8\, E[\langle M\rangle_T^{1/2} . \int_{]0,T]} K_s^2 d(\langle M\rangle_s^{1/2})] \ .$$

(Je rappelle que si B est continu, $d(B_t^2)=2B_t dB_t$).

Si $|V|_t$ est la variation du processus V sur $[0,t]$, on a aussi

$$E[\sup_{0<s<T} (\int_{]0,s]} KdV)^2] \leq E[(\int_{]0,T[} |K_s| d|V|_s)^2] \leq E[|V|_{T-} . \int_{]0,T[} K_s^2 d|V|_s] \ .$$

On peut ainsi choisir $A_t = 4\langle M\rangle_t^{1/2} + 2|V|_t$.

2. <u>LA TOPOLOGIE DES SEMIMARTINGALES RESTREINTES</u>.

Soient $\underline{S}$ l'espace des semimartingales et $\underline{SR}$ le sous-espace des s.m.r. (jusqu'à l'infini) : la topologie de $\underline{S}$ a été introduite indépendamment par M. Emery et Métivier-Pellaumail. $\underline{SR}$ (comme nous verrons) est dense dans $\underline{S}$, et si K est optionnel borné, l'operation $X \to K.X$ n'est pas continue dans $\underline{SR}$ pour la topologie de $\underline{S}$: on étudie donc dans ce paragraphe une topologie convénable pour l'espace $\underline{SR}$.

Pour ce qui concerne la topologie de $\underline{S}$, je suivrai la présentation donnée dans [2] pag. 308-324, et je ne donnerai que des démonstrations sommaires lorsqu'elles seront des modifications faciles des démonstrations de [2].

Si X est une s.m.r. , $X=M+V$ désigne toujours l'unique décomposition dans laquelle M est une martingale locale continue et V un processus à variation finie; si X est une semimartingale, $X=N+A$ est une décomposition quelconque (avec N martingale locale et A processus à variation finie), et si de plus X est spéciale, $X=\bar{N}+\bar{A}$ est la décomposition canonique (dans laquelle $\bar{A}$ est prévisible).

Je rappelle que $\underline{S}^p$ est l'espace de Banach des semimartingales X pour lesquelles la norme $\| X\|_{\underline{S}^p} = \inf_{X=N+A} \| [N]_\infty^{1/2}+|A|_\infty \|_p$ est finie; si X appartient à $\underline{S}^p$, X est spéciale et la norme ainsi définie est équivalente à $\| [\bar{N}]_\infty^{1/2}+|\bar{A}|_\infty \|_p$.

DEFINITION 2.1 _On appelle espace_ $\underline{SR}^p$ _l'espace des s.m.r. pour lesquelles la norme_ $\| X\|_{\underline{SR}^p} = \| \langle M\rangle_\infty^{1/2}+|V|_\infty \|_p$ _est finie_.

PROPOSITION 2.2 _Les trois normes suivantes sont équivalentes_:

(1) $\| X\|_{\underline{SR}^p}$ (2) $\|X\|_{\underline{S}^p} + \|\Sigma_s|\Delta_s X|\ \|_p$

(3) $\sup_{|K|\leq 1} \|(K.X)_\infty\|_p$, _où_ K _parcourt l'ensemble des processus optionnels uniformément bornés par_ 1.

Démonstration On a évidemment $\|X\|_{\underline{S}^p} \leq \|X\|_{\underline{SR}^p}$ et $\| \Sigma_s|\Delta_s X|\ \|_p \leq$ $\leq \|\ |V|_\infty\|_p$ (cela car $\Sigma_s|\Delta_s X|=\Sigma_s|\Delta_s V|\ \leq|V|_\infty$). Soit par contre $X=M+V=\bar{N}+\bar{A}$: si on indique par $\tilde{V}$ le compensateur prévisible du processus V, on a $\bar{A}=\tilde{V}$ et $\bar{N}=M+(V-\tilde{V})$. Donc $[\bar{N}]_\infty=\langle M\rangle_\infty+\Sigma_s\Delta_s(V-\tilde{V})^2$ et, par conséquent, $\| \langle M\rangle_\infty^{1/2}\|_p\leq\| X\|_{\underline{S}^p}$. Si on écrit $V=V^c+V^d$ (où V^c est la partie continue et V^d la partie purement discontinue du processus V), on a $\tilde{V}=V^c+\tilde{V}^d$ (car V^c est prévisible). On a ainsi $|V|=|V^c|+|V^d|=|V^c|+\Sigma_s|\Delta_s X|$.
En remarquant que $V^c=\tilde{V}-\tilde{V}^d=\bar{A}-\tilde{V}^d$, on trouve $|V^c|\leq|\bar{A}|+|\tilde{V}^d|$ et enfin que $|V|\leq|\bar{A}|+|V^d|+|\tilde{V}^d|$. Mais l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy ([2] pag. 183) affirme que $\|\ |\tilde{V}^d|\ \|_p\leq p.\|\ |V^d|\ \|_p$ et on trouve finalement que $\|\ |V|_\infty\|_p\leq c_p(\| X\|_{\underline{S}^p} +\| \Sigma_s|\Delta_s X|\ \|_p)$: on a ainsi démontré l'équivalence entre (1) et (2).

Si K est optionnel uniformément borné par 1, on a $(K.X)_\infty=(K.M)_\infty+(K.V)_\infty$:

$\| (K.M)_\infty \|_p \le c_p . \| (\int_{]0,\infty]} K_s^2 d\langle M\rangle_s)^{1/2} \|_p \le c_p . \| \langle M\rangle_\infty^{1/2} \|_p$

$\| (K.V)_\infty \|_p \le \| \int_{]0,\infty]} |K_s| d|V|_s \|_p \le \| |V|_\infty \|_p$.

On a ainsi montré que $\| (K.X)_\infty \|_p \le (c_p+1) \| X \|_{\underline{SR}^p}$. Rappelons que (voir [2] pag. 319) on a $\| X \|_{\underline{S}^p} \le c. \sup_{|H|\le 1} \| (H.X)_\infty \|_p$, où H parcourt l'ensemble des processus prévisibles uniformément bornés par 1. Si on prend une suite de temps d'arrêt à graphes disjoints telle que $\{X\neq 0\} \subseteq \bigcup_n [[T_n]]$, et on considère le processus optionnel $K=\Sigma_n \operatorname{sgn}(\Delta_{T_n} X).I_{[[T_n]]}$, on a $|K(s,w)|\le 1$ et $(K.X)_\infty = \Sigma_s |\Delta_s X|$, ce qui permet de montrer que $\| \Sigma_s |\Delta_s X| \|_p \le \sup_{|K|\le 1} \| (K.X)_\infty \|_p$.

PROPOSITION 2.3 $\underline{SR}^p$ est dense dans $\underline{S}^p$.

Démonstration. Puisque tout élément de $\underline{S}^p$ est somme d'un processus à variation finie prévisible, d'une martingale continue (et cette somme est une s.m.r.) et d'une martingale "somme compensée de sauts", on peut se borner à ce dernier cas, et supposer que X soit de la forme $X_t = \Sigma_{n\ge 1} (A_t^n - \tilde{A}_t^n)$, où $A_t^n = I_{\{t\ge T_n\}} . \Delta_{T_n} X$. Chaque martingale $(A^n - \tilde{A}^n)$ est à variation finie (donc une s.m.r.) et la série converge dans $\underline{S}^p$ (la norme de X dans $\underline{S}^p$ est équivalente à $\| (\Sigma_n (\Delta_{T_n} X)^2)^{1/2} \|_p$) , ce qui achève la démonstration.

Je rappelle que la topologie de $\underline{S}$ est engedrée par la distance à l'origine $d(X,0) = \inf_{X=N+A} (E[1 \wedge ([N]_\infty^{1/2} + |A|_\infty)] + \sup_T E[|\Delta_T N|])$

(et plus généralement $d(X,Y)=d(X-Y,0)$). Introduisons dans $\underline{SR}$ la nouvelle distance $d'(X,0) = E[1 \wedge (\langle M\rangle_\infty^{1/2} + |V|_\infty)]$, et appelons topologie de $\underline{SR}$ la topologie engendrée par cette nouvelle distance. Nous dirons que les X^n convergent vers X prélocalement dans $\underline{SR}^p$ s'il existe une suite T_k de temps d'arrêt, qui tende stationnairement vers $+\infty$ (i.e. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{T_k=+\infty\}=1$) et telle que les processus "arrêtés avant T_k" $a_{T_k-}(X^n)$ convergent vers $a_{T_k-}(X)$ dans $\underline{SR}^p$ (on pose $a_{T-}(X)_s=X_s.I_{\{s<T\}} + X_T^-.I_{\{s\geq T\}}$).

On a le résultat suivant, dont une conséquence immédiate est que $\underline{SR}$ est complet.

THEOREME 2.4 1) Si X^n converge vers X prélocalement dans $\underline{SR}^p$, X^n converge vers X dans $\underline{SR}$.

2) Si X^n est de Cauchy dans $\underline{SR}$, il en existe une sous-suite qui converge prélocalement dans $\underline{SR}^p$.

Démonstration. (la démonstration est un peu sommaire car elle est proche de celle du th. 101 pag. 315 de [2]). 1) On peut supposer $X=0$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe T tel que $\mathbb{P}\{T<+\infty\}<\varepsilon$, et que $\lim_n \| a_{T-}(X^n)\|_{\underline{SR}^p} = 0$.

Si $X=M+V$, $a_{T-}(X)=a_{T-}(M)+a_{T-}(V)$ et sur l'ensemble $\{T=+\infty\}$ on a $\langle a_{T-}(M)\rangle_\infty=\langle M\rangle_\infty$ et $|a_{T-}(V)|_\infty=|V|_\infty$.

Donc $d'(X^n,0) \leq \mathbb{P}\{T<+\infty\} + E[1\wedge(\langle a_{T-}(M^n)\rangle_\infty^{1/2} + |a_{T-}(V^n)|_\infty)]$

$\leq \mathbb{P}\{T<+\infty\} + \| a_{T-}(X^n)\|_{\underline{SR}^p} \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

2) Il suffit de prouver que si $d'(X^n,0)\leq 2^{-n}$, alors la série $\Sigma_n X^n$ converge prélocalement dans $\underline{SR}^p$. Le processus croissant $C_t=\Sigma_n(\langle M^n\rangle_t^{1/2}+|V^n|_t)$ est à valeurs finies sur $[0,\infty]$ et les temps d'arrêt $T_k=\inf\{t : C_t\geq k\}$ tendent stationnairement vers $+\infty$. On n'a aucune difficulté à montrer que la série $\Sigma_n a_{T_k-}(X^n)$ converge dans $\underline{SR}^p$, et que les limites se recollent bien vers une s.m.r. X.

PROPOSITION 2.5 La topologie de $\underline{SR}$ est engendrée aussi par la distance

$d''(X,0)=d(X,0)+E[1\wedge(\Sigma_s|\Delta_s X|)]$.

Donc X^n converge vers X dans $\underline{SR}$ si et seulement si X^n converge vers X dans $\underline{S}$ et $\Sigma_s|\Delta_s(X^n-X)|$ converge vers 0 en probabilité.

Démonstration. Il est d'abord évident que $d''(X,0)\leq 2d'(X,0)$. Quitte à extraire une sous-suite, le th.101 pag. 315 de [2] montre que si $\lim_n d(X^n,0)=0$ alors X^n converge vers 0 prélocalement dans $\underline{S}^1$; on montre avec de petites modifications sur la partie 2) du th.2.4 que si $\lim_n E[1\wedge(\Sigma_s|\Delta_s X^n|)]=0$, alors $\Sigma_s|\Delta_s X^n|$ converge vers 0 prélocalement dans L^1. On a ainsi la convergence prélocale dans $\underline{SR}^1$, donc la convergence dans $\underline{SR}$.

PROPOSITION 2.6 SR est dense dans S .

Démonstration. $\underline{S}^1$ est dense dans $\underline{S}$ (c'est une conséquence immédiate du th. 101 pag.315 de [2]) et $\underline{SR}^1$ est dense dans $\underline{S}^1$ pour la topologie de $\underline{S}^1$, donc aussi pour la topologie de $\underline{S}$.

Disons enfin (sans entrer dans les détails) que la topologie de $\underline{SR}$ peut aussi être caractérisée par les processus qui contrôlent strictement les s.m.r. D'abord, la norme de X dans $\underline{SR}^2$ est équivalente à la pseudonorme $\inf_A \|A_\infty\|_2$ où A parcourt l'ensemble des processus croissants qui contrôlent strictement X. En effet, d'une part $A_t=\langle M\rangle_t^{1/2}+|V|_t$ contrôle strictement X; et de l'autre si A_t contrôle strictement X et si $|K(s,w)|\leq 1$, on a $\|(K.X)_\infty\|_2 \leq \|A_\infty\|_2$.

On peut donc adapter les arguments de [3] et montrer que:

THEOREME 2.7 X^n converge vers X dans SR si et seulement s'il existe des processus croissants A^n tels que:

1) A^n contrôle strictement (X^n-X)

2) $\lim_{n\to\infty} A^n_\infty = 0$ en probabilité.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AZEMA J. YOR M. Temps Locaux. Astérisque 52-53 (1978)

[2] DELLACHERIE C. MEYER P.A. Probabilités et Potentiel. Chapitres V-VIII Hermann-Paris (1980)

[3] EMERY M. Equations differentielles stochastiques: la méthode de Métivier et Pellaumail. Séminaire de Probabilités XIV (pag.118-124) Lecture Notes 784. Springer Verlag (1980).

[4] METIVIER M. PELLAUMAIL J. Stochastic Integration. Academic Press (1980)

[5] MEYER P.A. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XIV (pag.118-124) Lecture Notes 511. Springer Verlag (1976)

[6] YOR M. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles. Séminaire de Probabilités XIII (pag.407-426) Springer Verlag (1979).

Maurizio PRATELLI
Istituto di Statistica.
Via S. Francesco
35100 PADOVA. Italie