Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean-François Le Gall

Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 15-31
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__15_0>

APPLICATIONS DU TEMPS LOCAL AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES UNIDIMENSIONNELLES

J.F. LE GALL

[Laboratoire de Calcul des Probabilités - 4, place Jussieu - F 75230 Paris]

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de montrer comment on peut utiliser la notion de temps local pour démontrer des théorèmes d'unicité trajectorielle, de comparaison ou encore de convergence forte pour les solutions d'équations différentielles stochastiques de la forme :

(1) $$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt \ .$$

Cette idée a déjà été utilisée par Perkins ([17]). Le travail de Perkins repose sur la remarque suivante : dans les démonstrations "classiques" des théorèmes d'unicité trajectorielle, (voir [11],[9], ou [10]) la notion de temps local n'intervient pas directement, mais elle est sous-jacente dans la mesure où les auteurs construisent des approximations de la fonction $f(x) = |x|$ par des fonctions de classe C^2. L'utilisation du temps local et de la formule d'Itô généralisée permet de simplifier les démonstrations et parfois d'obtenir des résultats plus précis.

Nous nous proposons, dans la partie I, de continuer le travail de Perkins et de montrer qu'on peut, grâce au temps local, retrouver et généraliser les principaux résultats d'unicité trajectorielle relatifs aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. En particulier, nous généralisons un résultat de Nakao ([5]), qui a établi l'unicité trajectorielle des solutions de (1) lorsque σ est à variation bornée sur les compacts et minorée par une constante strictement positive (et b borélienne bornée). Nous montrons qu'on peut, dans le résultat de Nakao, remplacer "à variation bornée" par "à variation d'ordre 2 bornée". Les contre-exemples construits par Barlow ([1]) montrent que ce résultat est, en un sens, le meilleur possible.

Il se trouve que les méthodes utilisées sont particulièrement adaptées à la démonstration de théorèmes limites du type de ceux qui sont établis par Kawabata et Yamada ([3]). Nous montrons, dans la partie II, comment le temps local permet d'obtenir des résultats plus précis que ceux de [3].

PRELIMINAIRES

Nous utilisons la notion de temps local d'une semi-martingale continue, telle qu'elle est présentée par Meyer ([4]). Si X est une semi-martingale continue et $a \in \mathbb{R}$, le temps local de X en a est le processus croissant continu $L_t^a(X)$ défini par :

$$L_t^a(X) = |X_t - a| - |X_o - a| - \int_o^t \mathrm{sgn}(X_s - a)\, dX_s$$

où $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$

-1 si $x \leq 0$.

La notion de temps local permet de généraliser la formule d'Itô de la façon suivante : si f est la différence de deux fonctions convexes :

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t f'_g(X_s)\ dX_s + \int_{\mathbb{R}} f''(da)\ L_t^a(X)\ .$$

De cette formule, découle la formule dite de densité de temps d'occupation :

pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, borélienne :

$$\int_o^t g(X_s)\ d\langle X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} g(a)\ L_t^a(X)\ da\ .$$

On peut montrer (voir [12]) qu'il existe une version de la famille $(L_t^a(X))$ qui est conjointement continue en t et continue à droite, limitée à gauche, en a.

1.- RESULTATS D'UNICITE TRAJECTORIELLE

Les notions d'unicité en loi et d'unicité trajectorielle pour une équation de la forme (1) ont été introduites par Yamada et Watanabe dans leur article fondamental ([11]), où il est montré, en toute généralité, que l'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi.

Commençons par expliquer comment le temps local intervient dans la démonstration de théorèmes d'unicité trajectorielle :

Soient X^1, X^2 deux solutions de (1) avec même valeur initiale ; supposons que l'on sache que :

$$\forall\ t \geq 0,\quad L_t^o(X^1 - X^2) = 0\ .$$

La formule de Tanaka montre alors que :

$$X_t^1 \vee X_t^2 = X_t^1 + (X_t^2 - X_t^1)_+$$

$$= X_o^1 + \int_o^t \sigma(X_s^1)\ dB_s + \int_o^t b(X_s^1) ds +$$

$$\int_o^t (\sigma(X_s^2) - \sigma(X_s^1))\ 1_{(X_s^2 > X_s^1)}\ dB_s + \int_o^t (b(X_s^2) - b(X_s^1))\ 1_{(X_s^2 > X_s^1)}\, ds$$

$$= X_o^1 + \int_o^t \sigma(X_s^1 \vee X_s^2) dB_s + \int_o^t b(X_s^1 \vee X_s^2)\ ds,$$

donc $X^1 \vee X^2$ est encore solution de (1) avec la même valeur initiale.

Supposons de plus qu'on sache qu'il y a unicité en loi pour (1); alors $X^1 \vee X^2$ a même loi que X^1 ou X^2, d'où l'on déduit :

$$X^1 = X^2 = X^1 \vee X^2\ ,$$

et on a montré qu'il y a unicité trajectorielle pour (1).

Notre démarche va donc être la suivante : en premier lieu, nous démontrerons un lemme permettant d'établir que le temps local en 0 d'une semi-martingale est nul ; ensuite, nous appliquerons ce lemme à des semi-martingales de la forme $X^1 - X^2$, où X^1, X^2 sont des solutions de (1) ; enfin, par le raisonnement ci-dessus, nous obtiendrons un théorème d'unicité trajectorielle.

<u>LEMME 1.0</u> : <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale continue</u>. <u>Supposons qu'il existe une fonction</u> $\rho : [0,\infty[\ \to [0,\infty[$ <u>telle que</u>

1) $\displaystyle\int_{o+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$

2) P p.s., $\forall\ t$: $\displaystyle\int_o^t \frac{d\langle X\rangle_s}{\rho(X_s)}\ 1_{(X_s>0)} < +\infty$

<u>alors</u> P p.s., $\quad \forall\ t : L_t^o(X) = 0.$

<u>Démonstration</u> : On écrit : $\displaystyle\int_o^t \frac{d\langle X\rangle_s}{\rho(X_s)}\ 1_{(X_s>0)} = \int_o^{+\infty} \frac{da}{\rho(a)}\ L_t^o(X) < \infty.$

L'hypothèse 1) et la continuité à droite de $a \to L_t^a(X)$ en 0 entraînent alors que : $L_t^o(X) = 0$.

COROLLAIRE 1.1 : *Supposons* σ *et* b *boréliennes, bornées, et que, de plus,* σ *vérifie:*

$$(A)\begin{cases} \exists\, \rho : [0;\infty[\to [0;\infty[\ \text{croissante} \\ \qquad \text{telle que} \displaystyle\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty \\ \forall\, x,y : (\sigma(x) - \sigma(y))^2 \le \rho(|x-y|) \end{cases} .$$

Alors, si X^1, X^2 *sont deux solutions de* (1) :

$$P \text{ p.s.}, \forall\, t : L_t^o(X^1 - X^2) = 0 .$$

Démonstration : Soit $X = X^1 - X^2$. On écrit :

$$\int_o^t \frac{d\langle X\rangle_s}{\rho(X_s)} 1_{(X_s>0)} = \int_o^t \frac{(\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2))^2}{\rho(X_s^1 - X_s^2)} 1_{(X_s^1 > X_s^2)} ds \le t .$$

Ensuite, on applique le lemme 1.0 .

COROLLAIRE 1.2 : *Supposons* σ *et* b *boréliennes bornées, et que* σ *vérifie* :

$$(B)\begin{cases} .\ \exists\, f \ \text{croissante, bornée} : \\ \qquad \forall\, x,y,\ (\sigma(x) - \sigma(y))^2 \le |f(x) - f(y)| \\ .\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x : \sigma(x) \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Alors, si X^1 *et* X^2 *sont deux solutions de (1)* :

$$P \text{ p.s.}, \forall\, t : L_t^o(X^1 - X^2) = 0.$$

Démonstration : On va appliquer le lemme 1.0 à $X = X^1 - X^2$, en prenant $\rho(x) = x$.
Il suffit de montrer :

$$(*) \qquad P \text{ p.s.}, \forall\, t \ge 0 : \int_o^t \frac{d\langle X\rangle_s}{X_s} 1_{(X_s>0)} < +\infty .$$

Fixons-nous $\delta > 0$. On a :

$$E[\int_o^t \frac{d\langle X\rangle_s}{X_s} 1_{(X_s>\delta)}] = E[\int_o^t \frac{(\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2))^2}{X_s^1 - X_s^2} 1_{(X_s^1-X_s^2>\delta)} ds]$$

$$\leq E[\int_o^t \frac{f(X_s^1)- f(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} 1_{(X_s^1-X_s^2>\delta)} ds] \quad .$$

On peut choisir une suite (f_n) de fonctions croissantes vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall$ n, f_n de classe C^1

2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|) \leq M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$

3) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ au moins dès que x est point de continuité de f.

On a alors :

$$E[\int_o^t \frac{f(X_s^1) - f(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} 1_{(X_s^1-X_s^2>\delta)} ds] = \lim_{n\to+\infty} E[\int_o^t \frac{f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} 1_{(X_s^1-X_s^2>\delta)} ds]$$

Or : $$\frac{f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} = \int_o^1 f_n'(X_s^2 + u(X_s^1 - X_s^2))\, du$$

Posons, pour $u \in [0,1]$: $Z_s^u = X_s^2 + u(X_s^1 - X_s^2)$. On a donc :

$$E[\int_o^t \frac{f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2} 1_{(X_s^1-X_s^2>\delta)} ds] = E[\int_o^t (\int_o^1 f_n'(Z_s^u) du)\, 1_{(X_s^1-X_s^2>\delta)} ds]$$

$$\leq \int_o^1 E[\int_o^t f_n'(Z_s^u) ds] du \ .$$

Remarquons que Z^u peut s'écrire :

$$Z_t^u = Z_o^u + \int_o^t \sigma_s^u(\omega)\, dB_s + \int_o^t b_s^u(\omega)\, ds \ ,$$

où σ^u et b^u vérifient :

$$\sigma^u \geq \varepsilon \qquad ; \qquad |\sigma^u| \leq K \qquad ; \qquad |b^u| \leq K \ .$$

En particulier, il existe une constante C telle que

$$\forall\, u \in [0,1] : \sup_{a\in\mathbb{R}} E[\, L_t^a(Z^u)\,] \le C.$$

On en déduit :

$$E\Big[\int_0^t \Big(\frac{f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)}{X_s^1 - X_s^2}\Big) 1_{(X_s^1 - X_s^2 > \delta)} ds\Big] \le \int_0^1 E\Big[\int_0^t f_n'(Z_s^u) ds\Big] du$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 E\Big[\int_{\mathbb{R}} f_n'(a)\, da\, L_t^a(Z^u)\Big] du$$

$$\le \frac{2M}{\varepsilon^2} \sup_{a,u} E[L_t^a(Z^u)]$$

$$\le \frac{2MC}{\varepsilon^2} .$$

On trouve donc :

$$E\Big[\int_0^t \frac{d\langle X\rangle_s}{X_s} 1_{(X_s > \delta)}\Big] \le \frac{2MC}{\varepsilon^2} .$$

Il ne reste alors plus qu'à faire tendre δ vers 0 pour trouver (*).

THEOREME 1.3 : Supposons que σ et b sont boréliennes bornées et satisfont en outre l'une des trois hypothèses suivantes :

1) σ vérifie (A) et b est lipschitzienne ;
2) σ vérifie (A) et $\exists\, \varepsilon > 0 : |\sigma| \ge \varepsilon$;
3) σ vérifie (B).

Alors, il y a unicité trajectorielle pour (1).

Démonstration : Pour 2) et 3), on remarque que, puisque $|\sigma| \ge \varepsilon$, il y a unicité en loi pour (1). Compte tenu des corollaires 1.1 et 1.2, le raisonnement esquissé au début de cette partie montre qu'il y a unicité trajectorielle.

Pour 1), le raisonnement est un peu différent : on se donne deux solutions X^1, X^2 de (1) avec la même valeur initiale. Le corollaire 1.1 entraîne alors :

$$|X_t^1 - X_t^2| = \int_0^t \mathrm{sgn}\,(X_s^1 - X_s^2)(\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2))dB_s + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s^1 - X_s^2)(b(X_s^1) - b(X_s^2))ds$$

$$E[|X_t^1 - X_t^2|] \le E\Big[\int_0^t |b(X_s^1) - b(X_s^2)|ds\Big]$$

$$\le K\int_0^t E[|X_s^1 - X_s^2|]ds .$$

si K est un rapport de Lipschitz pour b. On en déduit : $\forall\, t \geq 0$, $E[|X_t^1 - X_t^2|] = 0$, et donc $X^1 = X^2$.

Remarques : a) La partie 1) du théorème 1.3 a été démontrée par Yamada et Watanabe ([11]).

La partie 2) figure dans un article de Okabe-Shimizu ([6]).

Enfin, la partie 3) est la généralisation, annoncée dans l'introduction, du résultat de Nakao ([5]). En effet, l'hypothèse (B) signifie, outre que σ est minorée par une constante strictement positive, que σ est à variation d'ordre 2 bornée (pour l'instant sur $\mathbb{R}$, mais on verra plus loin qu'on peut "localiser" cette hypothèse et la remplacer par : σ à variation d'ordre 2 bornée sur les compacts). Ce résultat est en un sens le meilleur possible. Barlow a construit dans [1], pour tout $\alpha > 2$, des exemples de fonctions σ à variation d'ordre α bornée, minorées par une constante strictement positive, et telles qu'il n'y ait pas unicité trajectorielle pour : $dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t$.

Il est important de noter qu'on ne peut remplacer dans l'hypothèse (B) "$\exists\, \varepsilon > 0 : \sigma \geq \varepsilon$" par "$\exists\, \varepsilon > 0, |\sigma| \geq \varepsilon$". En effet, il suffit de prendre $\sigma(x) = \mathrm{sgn}(x)$. Il est bien connu qu'il n'y a pas unicité trajectorielle pour $dX_t = \mathrm{sgn}(X_t)\, dB_t$.

b) On peut généraliser les résultats du théorème 1.3 dans deux directions possibles. En premier lieu, on peut "localiser" les hypothèses de régularité sur les coefficients σ et b. Par exemple, dans l'hypothèse (B), on peut remplacer "f croissante bornée" par "f croissante" et "$\exists\, \varepsilon > 0 : \sigma \geq \varepsilon$" par "$\forall\, r > 0 : \exists\, \varepsilon_r > 0, \forall\, x \in [-r;r] : \sigma(x) \geq \varepsilon_r$".

D'autre part, le théorème 1.3 s'étend sans difficulté au cas non homogène, c'est-à-dire aux équations différentielles stochastiques de la forme :

$$(2) \qquad dX_t = \sigma(t,X_t)\, dB_t + b(t,X_t)\, dt.$$

Le théorème 1.3 reste vrai mot pour mot pour une équation de ce type, à condition de remplacer par exemple l'hypothèse (A) par :

$$(\mathrm{A}') \qquad \begin{cases} \exists\, \rho : [0;\infty[\, \to [0;\infty[\\ \qquad \text{telle que } \displaystyle\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty \\ \forall\, t,x,y : (\sigma(t,x) - \sigma(t,y))^2 \leq \rho(|x-y|). \end{cases}$$

c) On peut légèrement généraliser la condition (A) (voir Perkins [7]) en la remplaçant par :

$$(C)\quad \begin{cases} \exists\, \rho : [0;\infty[\, \to [0;\infty[\text{ tel que } \displaystyle\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty \\ \exists\, a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ intégrable sur les compacts} \\ \exists\, \delta > 0 \\ \qquad \forall x,\ \forall y \in [x-\delta\,;\,x+\delta] \\ \qquad\qquad (\sigma(y) - \sigma(x))^2 \le (1 + a(x)\,\sigma^2(x))\,\rho(|y-x|) \end{cases}$$

(dans le cas non homogène

$$(\sigma(t,x) - \sigma(t,y))^2 \le (c(t) + a(x)\,\sigma^2(t,x))\,\rho(|y-x|)$$

où c est intégrable sur les compacts).

La démonstration du corollaire 1.1 ne présente pas plus de difficultés sous l'hypothèse (C) que sous l'hypothèse (A).

Les techniques utilisées pour obtenir des théorèmes d'unicité trajectorielle permettent également de démontrer des théorèmes de comparaison des solutions. Le théorème suivant, dont la démonstration est particulièrement simple à partir des corollaires 1.1 et 1.2, est à rapprocher d'un résultat de Ikeda et Watanabe ([2], p. 352).

<u>THEOREME 1.4</u> : <u>Soient</u> σ, b_1, b_2 <u>boréliennes bornées</u>. <u>Supposons que</u> σ <u>satisfait l'une des deux hypothèses</u> (A) <u>et</u> (B), <u>et que l'une des deux fonctions</u> b_1, b_2 <u>est</u> (<u>localement</u>) <u>lipschitzienne</u>.

<u>Supposons que</u>, <u>pour</u> $i = 1,2$, X^i <u>vérifie</u> :

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i)\, dB_t + b_i(X_t^i)\, dt.$$

<u>Alors, les conditions</u> $b_1 \ge b_2$ <u>et</u> $X_0^1 \ge X_0^2$ <u>entraînent</u> :

$$\forall\, t \ge 0,\quad X_t^1 \ge X_t^2 \qquad P \text{ p.s.}$$

<u>Démonstration</u> : Le même raisonnement que dans la démonstration du corollaire 1.1 ou du corollaire 1.2 (selon que σ vérifie (A) ou (B)) permet de montrer que :

$$\forall\, t \geq 0, \quad L_t^o(X^1 - X^2) = 0 \quad .$$

Si, par exemple, b_1 est lipschitzienne, de rapport K, on a :

$$\begin{aligned} E[(X_t^2 - X_t^1)^+] &= E[\int_o^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b_2(X_s^2) - b_1(X_s^1))ds] \\ &\leq E[\int_o^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b_1(X_s^2) - b_1(X_s^1))ds] \\ &\leq K \int_o^t E[(X_s^2 - X_s^1)^+]ds \end{aligned}$$

d'où : $\quad \forall\, t \geq 0, \qquad E[(X_t^2 - X_t^1)^+] = 0 \quad .$

Remarques : a) Si on fait l'hypothèse que b_1 et b_2 sont continues et si on suppose $b_1 > b_2$, le résultat est encore vrai ; en effet, on peut intercaler entre b_1 et b_2 une fonction (localement) lipschitzienne c et appliquer le théorème 1.4, d'abord à b_1 et c, puis à c et b_2.

b) Nous verrons dans la partie 2 que, lorsque $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ (ce qui est réalisé quand σ vérifie (B)), on peut supprimer l'hypothèse b_1 ou b_2 lipschitzienne. On peut remarquer que, si on choisit $\sigma = 0$, σ vérifie l'hypothèse (A), mais la condition b_1 ou b_2 lipschitzienne est indispensable pour conclure.

c) Comme le théorème 1.3, le théorème 1.4 s'étend sans difficulté au cas non homogène.

2.- THEOREMES LIMITES.

Donnons-nous une suite (X^n) de processus vérifiant pour chaque n :

(1.n) $\qquad dX_t^n = \sigma_n(X_t^n)\, dB_t + b_n(X_t^n)\, dt$

Soit également X solution de :

(1) $\qquad dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt \;.$

On supposera : $X_o^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X_o$ en un sens à préciser.

De nombreux auteurs (voir en particulier Stroock -Varadhan [8]) ont cherché quelles conditions de convergence de la suite (σ_n, b_n) vers (σ, b) entraînent la convergence en loi de la suite (X^n) vers X. Cela revient à étudier la stabilité en loi de la solution de (1). Pour que le problème ait un sens, il est nécessaire qu'il y ait unicité en loi pour (1).

Il est aussi naturel, et c'est le problème qui va nous intéresser, d'étudier la stabilité "trajectorielle" de la solution de (1) : sous quelles conditions, a-t-on convergence "forte" de la suite (X^n) vers X, c'est-à-dire au moins :

$$\forall\, t \geq 0, \quad X_t^n \xrightarrow{P} X_t$$

A nouveau, pour que ce problème ait un sens, il est nécessaire qu'il y ait unicité trajectorielle pour l'équation (1).

Dans [3], Kawabata et Yamada ont développé une méthode générale permettant de traiter ce type de problèmes. Notre but va être ici d'utiliser le temps local pour retrouver et améliorer sensiblement certains résultats de Kawabata et Yamada.

<u>LEMME 2.0</u> : <u>Soit</u> (Y^n) <u>une suite de martingales continues</u>, <u>appartenant à</u> H^1 .

<u>Soit</u> $\rho : [0,\infty[\to [0,\infty[$ <u>croissante telle que</u> $\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$.

<u>Supposons</u> :

$$(*) \qquad \sup_{\varepsilon > 0} \left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, E\left[\int_0^t \frac{d\langle Y^n\rangle_s}{\rho(Y_s^n)} 1_{(Y_s^n > \varepsilon)} \right] \right) < +\infty$$

<u>Alors</u> : $E\,[L_t^0(Y^n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

<u>Démonstration</u> : On a : $\int_0^t \frac{d\langle Y^n\rangle_s}{\rho(Y_s^n)} 1_{(Y_s^n > \varepsilon)} = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{da}{\rho(a)} L_t^a(Y^n)$

$$E\left[\int_0^t \frac{d\langle Y^n\rangle_s}{\rho(Y_s^n)} 1_{(Y_s^n > \varepsilon)}\right] = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{da}{\rho(a)} E[\,L_t^a(Y^n)] \,.$$

Supposons : $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, E[\,L_t^0(Y^n)] \geq \alpha > 0$. On sait que : $|E[L_t^a(Y^n)] - E[L_t^0(Y^n)]| \leq 2a$.

$$\text{D'où : } \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, E\left[\int_0^t \frac{d\langle Y^n\rangle_s}{\rho(Y_s^n)} 1_{(Y_s^n > \varepsilon)}\right] = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{da}{\rho(a)} E[L_t^a(Y^n)]$$

$$\geq \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{da}{\rho(a)} (\alpha - 2a)^+$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} E\left[\int_0^t \frac{d\langle Y^n\rangle_s}{\rho(Y_s^n)} 1_{(Y_s^n>\varepsilon)}\right]\right) \geq \int_0^\infty \frac{da}{\rho(a)}(\alpha - 2a)^+ = +\infty ,$$

ce qui contredit (*).

Revenons à notre problème de départ ; pour commencer, nous prendrons $b_n = b = 0$. On se donne σ_n, σ : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et des martingales continues X^n, X vérifiant :

$$dX_t^n = \sigma_n(X_t^n)\, dB_t$$

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t \quad .$$

On veut montrer que, sous des conditions suffisantes de convergence de σ_n vers σ , on a :

$$\forall\, t \geq 0, \quad E[|X_t^n - X_t|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or : $\quad E[|X_t^n - X_t|] = E[|X_0^n - X_0|] + E\,[L_t^0(X^n - X)]\ .$

On va donc essayer d'appliquer le lemme 2.0 à la suite de martingales $Y^n = X^n - X$. On voudra faire en sorte que la suite (Y^n) vérifie (*), pour une fonction ρ satisfaisant l'hypothèse du lemme 2.0. Quitte à remplacer ρ par la fonction $u \to \rho(u) + u$, nous pouvons supposer ρ strictement croissante.

On a alors :

$$\int_0^t \frac{d\langle Y^n\rangle_s}{\rho(Y_s^n)} 1_{(Y_s^n>\varepsilon)} = \int_0^t \frac{(\sigma_n(X_s^n) - \sigma(X_s))^2}{\rho(X_s^n - X_s)} ds\, 1_{(X_s^n - X_s>\varepsilon)}$$

$$\leq 2\int_0^t \frac{(\sigma_n(X_s^n) - \sigma(X_s^n))^2}{\rho(X_s^n - X_s)} ds\, 1_{(X_s^n - X_s>\varepsilon)} + 2\int_0^t \frac{(\sigma(X_s^n - \sigma(X_s))^2}{\rho(X_s^n - X_s)} ds\, 1_{(X_s^n - X_s>\varepsilon)}$$

$$\leq \frac{2}{\rho(\varepsilon)} \int_0^t (\sigma_n(X_s^n) - \sigma(X_s^n))^2 ds + 2\int_0^t \frac{(\sigma(X_s^n) - \sigma(X_s))^2}{\rho(X_s^n - X_s)} ds\, 1_{(X_s^n - X_s>0)}$$

$$\leq \frac{2}{\rho(\varepsilon)} A(n) + B(n)$$

en posant : $\quad A(n) = \displaystyle\int_0^t (\sigma_n(X_s^n) - \sigma(X_s^n))^2\, ds$

$$B(n) = 2\int_0^t \frac{(\sigma(X_s^n) - \sigma(X_s))^2}{\rho(X_s^n - X_s)} ds\, 1_{(X_s^n - X_s>0)} \quad ;$$

pour que (*) soit vérifiée, il suffit donc que :

$$\overline{\lim_n}\ E[A(n)] = 0$$

$$\overline{\lim_n}\ E[B(n)] < +\infty\ .$$

<u>COROLLAIRE 2.1</u> : <u>Soient</u> σ_n, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. <u>Supposons que</u> X_n $(n \in \mathbb{N})$, X <u>sont des processus vérifiant</u> :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad dX_t^n = \sigma_n(X_t^n)\ dB_t$$

$$dX_t = \sigma(X_t)\ dB_t$$

<u>Supposons</u> : $\exists\ \delta,\ K > 0 : \forall\, n,\quad \delta \le \sigma_n \le K$

$$\delta \le \sigma \le K$$

<u>Supposons enfin</u> : $\begin{cases} \sigma_n \to \sigma & \underline{\text{dans}}\ L^1 \\ \sigma\ \ \underline{\text{vérifie}}\ (A)\ \underline{\text{ou}}\ (B), \end{cases}$

<u>alors</u> : $E[L_t^o(X^n - X)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>Démonstration</u> : Avec les notations ci-dessus, on a :

$$A(n) = \int_o^t (\sigma_n(X_s^n) - \sigma(X_s^n))^2\ ds$$

$$\le \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} (\sigma_n(a) - \sigma(a))^2\ L_t^a(X^n)\ da\ .$$

En utilisant le fait que σ_n et σ sont uniformément bornées, on voit qu'il existe une constante M telle que :

$$E[A(n)] \le \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} (\sigma_n(a) - \sigma(a))^2\ E[L_t^a(X^n)]\ da$$

$$\le \frac{M}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} (\sigma_n(a) - \sigma(a))^2\ da$$

d'où : $E[A(n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Il reste à voir que, pour un choix convenable de la fonction ρ, on a :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ E[B(n)] < +\infty\ .$$

Dans le cas où σ vérifie l'hypothèse (A), on prend pour ρ la fonction qui intervient dans cette hypothèse, et on trouve :

$$\forall\, n, \quad B(n) \leq 2t \quad .$$

Dans le cas où σ vérifie l'hypothèse (B), on prend $\rho(x) = x$; on a :

$$B(n) = 2 \int_0^t \frac{(\sigma(X_s^n) - \sigma(X_s))^2}{X_s^n - X_s} \, ds \; 1_{(X_s^n - X_s > 0)} \quad .$$

Le même raisonnement que dans la démonstration du corollaire 2.1 permet de montrer qu'il existe une constante C, ne dépendant que de σ, δ et K, et telle que :

$$\forall\, n, \quad E[B(n)] \leq C.$$

Dans les deux cas, on peut donc appliquer le lemme 2.0.

THEOREME 2.2 : *Soient* σ_n, σ, b_n, b : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *boréliennes, et* X^n, X *des semi-martingales vérifiant* :

$$dX_t^n = \sigma_n(X_t^n)\, dB_t + b_n(X_t^n)\, dt$$

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b\,(X_t)\, dt$$

Supposons : $\exists\, \delta, K > 0$:

$$\forall\, n, \; \delta \leq |\sigma_n| \leq K \quad ; \quad \delta \leq |\sigma| \leq K \quad ;$$

$$\int_{\mathbb{R}} |b_n(u)| \, du \leq K \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}} |b(u) \, du| \leq K \; .$$

Supposons de plus :

1) σ *vérifie* (A) *ou* (B)

2) $\sigma_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma$ dans $L^2(\mathbb{R})$

$b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$ *dans* $L^1(\mathbb{R})$

3) $E[|X_o^n - X_o|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

Alors : $\forall\, t \geq 0, \quad E[|X_t^n - X_t|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Démonstration :

1ère étape : cas $b_n = b = 0$. On écrit :

$$E[|X_t^n - X_t|] = E[|X_o^n - X_o|] + E[L_t^o(X_n - X)] .$$

Le théorème découle du corollaire 2.1.

2ème étape : cas général. On pose :

$$F_n(x) = \int_o^x \exp(-2 \int_o^y \frac{b_n(u)}{\sigma_n^2(u)} du) \, dy$$

$$F(u) = \int_o^x \exp(-2 \int_o^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du) \, dy$$

$$Z_t^n = F_n(X_t^n)$$

$$Z_t = F(X_t) .$$

On a : $dZ_t^n = \bar{\sigma}_n(Z_t^n) \, dB_t$

$dZ_t = \bar{\sigma} (Z_t) \, dB_t$,

en posant : $\bar{\sigma}_n = (\sigma_n F_n') \circ F_n^{-1}$

$\bar{\sigma} = (\sigma F') \circ F^{-1}$.

On vérifie que $\bar{\sigma}_n$ et $\bar{\sigma}$ possèdent les même propriétés que σ_n et σ . De la première étape, on déduit :

$$\forall t \geq 0, \quad E[|Z_t^n - Z_t|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

On en déduit sans difficulté :

$$\forall t \geq 0, \quad E[|X_t^n - X_t|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Remarques : a) Par rapport aux résultats de Kawabata et Yamada ([3], p.431), il est intéressant de noter qu'il n'est pas nécessaire que les σ_n vérifient les mêmes hypothèses de régularité que σ. Comme nous l'avions déjà noté, il est indispensable que (σ,b) satisfasse des propriétés qui garantissent l'unicité trajectorielle pour (1) (hypothèse (A) ou (B) sur σ), mais il n'en va pas de même pour (σ_n,b_n).

b) Il est encore possible de donner une version "localisée" du théorème 2.2; on remplace par exemple l'hypothèse 2) par :

$$2) \begin{cases} \sigma_n \to \sigma & \text{dans } L^1 \text{ sur tout compact} \\ b_n \to b & \text{dans } L^1 \text{ sur tout compact.} \end{cases}$$

On modifie de même les autres hypothèses; la condition devient :

$$\forall\, r > 0, \quad \forall\, t \geq 0, \quad E[|X^n_{t\wedge\tau^n_r} - X_{t\wedge\tau^n_r}|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ,$$

où : $\tau^n_r = \inf \{s \mid \sup(|X^n_s|,|X_s|) > r\}$.

c) Les hypothèses du théorème 2.2 entraînent le résultat plus fort :

$$E[\sup_{o\leq s\leq t} |X^n_s - X_s|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Le passage de la conclusion du théorème à ce résultat se fait en utilisant des techniques classiques de majoration d'intégrales stochastiques (on traite d'abord le cas $b_n = b = 0$).

COROLLAIRE 2.3 : Soient σ, b_1, b_2 boréliennes, bornées. Supposons $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ et σ vérifie l'une des deux hypothèses (A) ou (B).

Pour $i = 1,2$, soit X^i solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b_i(X_t)\, dt$$

Alors, les conditions $b_1 \geq b_2$ et $X^1_o \geq X^2_o$ entraînent :

$$\forall\, t \geq 0, \quad X^1_t \geq X^2_t \ P \text{ p.s.}$$

Démonstration : On utilise le théorème 2.2 pour déduire, du théorème 1.4, le résultat du corollaire. Précisément, on choisit une fonction ϕ de classe C^∞ à support compact, et telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 1.$$

On pose : $\forall\, n \geq 1, \quad \phi_n(x) = n\, \phi(n\, x)$

puis : $b_1^{(n)} = \phi_n * b_1$

$b_2^{(n)} = \phi_n * b_2$.

Soient Y^n, Z^n définies par :

$$Y_t^n = X_o^1 + \int_o^t \sigma(Y_s^n)\, dB_s + \int_o^t b_1^{(n)}\, (Y_s)\, ds$$

$$Z_t^n = X_o^2 + \int_o^t \sigma(Z_s^n)\, dB_s + \int_o^t b_2^{(n)}\, (Z_s^n)\, ds$$

Pour chaque n, on peut appliquer à (Y^n,Z^n) le théorème 1.4 : P p.s., $\forall\, t \geq 0$, $Y_t^n \geq Z_t^n$.

Le théorème 2.2. entraîne

$$\forall\, t \geq 0, \quad Y_t^n \overset{P}{\to} X_t^1$$

$$Z_t^n \overset{P}{\to} X_t^2$$

On en déduit : P p.s. $\forall\, t \geq 0$, $X_t^1 \geq X_t^2$.

Pour finir, nous allons donner sans démonstration le résultat correspondant au cas où b est lipschitzienne et σ vérifie (A) (voir [3], p. 426). La démonstration de ce dernier résultat utilise les mêmes techniques que celle du théorème 2.2.

<u>THEOREME 2.4</u> : <u>Soient</u> σ_n, σ, b_n, b : $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>bornées</u>, <u>boréliennes</u>. <u>On se donne</u> X^n, X <u>vérifiant</u> :

$$dX_t^n = \sigma_n(t,X_t^n)\, dB_t + b_n(t,X_t^n)\, dt$$

$$dX_t = \sigma\,(t,X_t)\, dB_t + b\,(t,X_t)\, dt \ .$$

<u>Supposons de plus</u> : 1) σ <u>vérifie</u> (A) <u>et</u> b <u>lipschitzienne en la variable</u> x.

2) $\begin{cases} \sigma_n \to \sigma & \text{uniformément,} \\ b_n \to b & \text{uniformément.} \end{cases}$

3) $E[|X_o^n - X_o|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

<u>Alors</u> : $\forall\, t \geq 0$, $E[|X_t^n - X_t|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

REFÉRENCES

[1] M.T. BARLOW : One dimensional differential equation with no strong solution J. London Math. Soc. (2), 26 (1982), 330-347.

[2] N. IKEDA, S. WATANABE : Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland mathematical library-Kodansha (1981).

[3] S. KAWABATA, T. YAMADA : On some limit theorems for solutions of stochastic differential equations. Séminaire de probabilités XVI. Lecture Notes in Mathematics, 920, Springer Verlag, Berlin (1982).

[4] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités X. Lecture Notes in Mathematics, 511, p. 245-400, Springer Verlag, Berlin (1976).

[5] S. NAKAO : On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations. Osaka J. of Mathematics, 9 (1972), p. 513-518.

[6] Y. OKABE, A. SHIMIZU : On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto University, 15 (1975) p. 455-466.

[7] E. PERKINS : Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations. Séminaire de probabilités XVI, Lecture notes in Maths. 920 p. 201-208, Springer Verlag, Berlin (1982).

[8] D.W.STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Multidimensional diffusion processes, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 253 , Springer Verlag, Berlin (1979).

[9] A.Y. VERETENNIKOV : On the strong solutions of stochastic differential equations. Theory of probability and its applications, 29 (1979) p. 354-366.

[10] T. YAMADA : On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. J. Math . Kyoto University, 13 (1973), p. 497-512.

[11] T. YAMADA, S. WATANABE : On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto University 11 (1971), p. 155-167.

[12] M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales, Astérisque 52-53 (1978), p. 23.35.