RÉMI LÉANDRE

Un exemple en théorie des flots stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 158-161
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__158_0>

UN EXEMPLE EN THEORIE DES FLOTS STOCHASTIQUES

par R. LEANDRE

Considérons une équation différentielle stochastique

(1) $$dY_t = F(Y_t)dX_t \quad , \; Y_0=y$$

où l'inconnue Y est une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, où la semimartingale directrice continue X est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et où F est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans l'espace $M(n,p)$ des matrices à n lignes et p colonnes. On sait (d'après les travaux de nombreux auteurs : Malliavin, Bismut, Kunita...) que si la matrice F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction $Y_t(y,\omega)$ des trois variables (t,y,ω), qui possède les propriétés suivantes :

Pour tout ω, elle est continue en (t,y), et admet des dérivées partielles de tous ordres en y, qui sont elles aussi des fonctions continues du couple (t,y).

Pour tout y, on a $Y_0(y,\omega) = y$, et la fonction $Y_{\bullet}(y,.)$ est solution de l'e.d.s. (1).

Pour tout ω et tout t, $y \mapsto Y_t(y,\omega)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Ces résultats sont exposés par P.A. Meyer dans le Sém. Prob. XV, pages 103-118. Un procédé de localisation permet de se débarrasser en partie de la condition de Lipschitz globale, en introduisant une <u>durée de vie</u> $\zeta(\omega,y)$ (ou <u>temps d'explosion</u>) qui peut être finie. La fonction $\zeta(\omega,.)$ est alors s.c.i. strictement positive, et les propriétés précédentes ont lieu « avant ζ ».

Dans son exposé (p. 107), Meyer pose la question suivante : pour une e.d.s. (1) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est ce que la non-explosion au sens ordinaire ($\zeta(.,y) = +\infty$ p.s. pour tout y fixé) entraîne que $\zeta(\omega,.)$ est identiquement $+\infty$ pour presque tout ω ? Nous allons montrer ici que la réponse est négative.

Après avoir partiellement rédigé ce travail, nous avons appris qu'un exemple a déjà été publié par D. Elworthy : voir Stochastic dynamical systems and their flows, p. 91 , <u>Stochastic analysis</u>, Academic Press 1978. Le principe de cet exemple est exactement le même, mais l'équation n'est pas à valeurs dans un $\mathbb{R}^n$, et il faut un peu plus de travail pour l'y ramener . Nous avons inclus dans cette note une discussion un peu plus détaillée de l'exemple d'Elworthy .

REMARQUE. P.A. Meyer nous demande de signaler que le résultat du haut de la p. 115 du même exposé (croissance linéaire => $\zeta\equiv+\infty$) n'a pas été établi par lui, sa démonstration étant incomplète. Cependant, il semble qu'il ait été établi par Elworthy (brèves indications, l. 14 p. 82 de la référence mentionnée plus haut).

2. UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$.

Nous considérons sur $\mathbb{R}^n$ l'équation différentielle stochastique la plus simple de toutes

$$(2) \qquad dY_t = dB_t \quad , \qquad Y_0=y$$

où (B_t) est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ issu de 0 . La solution est évidemment

$$(3) \qquad Y_t(y,\omega) = y + B_t(\omega) \; .$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons aussi considérer (2) comme une e.d.s. <u>à valeurs dans la variété</u> U , le mouvement brownien directeur restant dans $\mathbb{R}^n$. La solution est toujours représentée par (3) avec $y\in U$, mais elle possède une durée de vie

$$\zeta(y,\omega) = \inf\{\ t \ :\ y+B_t(\omega)\in U^c\ \}$$

et il est clair que $\zeta(.,\omega)$ ne peut être identiquement égal à $+\infty$ pour <u>aucun</u> ω , si $U\neq\mathbb{R}^n$. En revanche, si le fermé U^c est <u>polaire</u>, on a $\zeta(y,.) = +\infty$ p.s. pour tout $y\in U$, et l'e.d.s. est non-explosive pour y fixé.

Cela ne répond pas à la question posée, car il s'agit d'une e.d.s. sur une variété, et non sur $\mathbb{R}^n$. Pour lever cette difficulté, on prend $n\geq 3$, U étant le complémentaire d'une <u>demi-droite fermée</u> ; alors il existe un difféomorphisme C^∞ $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ (si x est le vecteur unitaire de la demi-droite, les coordonnées polaires réalisent un difféomorphisme de U sur $]0,\infty[\ \times (S^{n-1}\setminus\{x\})$, difféomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$). Transportant alors l'e.d.s. sur $\mathbb{R}^n$, on a l'exemple désiré.

Notons pour la suite que, si ψ est le difféomorphisme inverse de φ, l'équation s'écrit sur $\mathbb{R}^n$ $d(\psi(Z_t)) = dB_t$, $Z_0=z$, à transformer par la formule d'Ito pour la mettre sous la forme résolue (1) - cela fait apparaître en général la semimartingale directrice supplémentaire t, provenant des crochets de B_t . La solution est donnée explicitement par $Z_t = \varphi(\ \psi(z)+B_t\ )$.

3. LE CAS DE $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, l'exemple d'Elworthy consiste à prendre pour U le complémentaire de l'origine. La situation est géométriquement plus compliquée, car $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^2$; on peut s'en tirer en remarquant que $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ est difféomorphe à un cylindre, et en " déroulant" ce cylindre sur $\mathbb{R}^2$. Mais il est plus instructif (comme l'a suggéré Emery) d'obtenir la forme explicite de l'équation (1), qui dans ce cas est particulièrement simple.

Considérons (B_t) comme un mouvement brownien complexe. La fonction exponentielle $\psi(z)=e^z$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ réalise le "déroulement du cylindre" , et l'équation différentielle $d(e^{Z_t})=dB_t$ s'écrit simplement sous la forme (1)

$$(4)\qquad dZ_t = e^{-Z_t}dB_t \qquad Z_0=z$$

parce que B est une martingale conforme, et ψ est holomorphe. La solution peut être donnée explicitement :

$$Z_t(z,\omega) = \log (e^z + B_t(\omega))$$

la valeur du log choisie étant telle que $\log(e^{z_0})=z_0$, et suivie par continuité le long de la trajectoire .

Dans (4), la fonction qui figure au second membre est à croissance très rapide à l'infini : on rencontre le même phénomène avec la fonction à croissance quadratique $\psi(z)=z^2$. En effet, l'équation

$$(5)\qquad dZ_t = -Z_t^2 dB_t$$

admet pour solutions explicites

$$(6)\qquad Z_t(z,\omega) = \frac{z}{1+zB_t(\omega)}$$

non explosives pour z fixé (le point $-1/z$ étant polaire), mais à durée de vie non identiquement infinie.

4. LE CAS DE $\mathbb{R}$.

Nevenons à l'équation (1), et considérons l'équation

$$(7)\qquad dY_t^k = F_k(Y_t^k)dX_t \qquad Y_0^k=y$$

où F_k est une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, égale à F sur $[-k,+k]$, nulle hors de $[-k-1, k+1]$. On peut choisir les flots correspondants $Y_t^k(y,\omega)$, et le flot $Y_t(y,\omega)$ de l'équation (1), de telle sorte que, pour presque tout ω, et tout t

- $y \mapsto Y_t^k(y,\omega)$ soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, égal à l'identité hors de l'intervalle $[-k-1, k+1\ ]$;
- On a pour tout k et tout $y\in]-k,+k[$

$$T^k(y,\omega) = \inf\{\ t : |Y_t(y,\omega)| \geqq k\ \} = \inf\{\ t : Y_t^k(y,\omega)| \geqq k\ \}$$

$$Y_t(y,\omega) = Y_t^k(y,\omega) \quad \text{si} \quad t \leqq T^k(y,\omega)\ .$$

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ égal à l'identité au voisinage de l'infini est nécessairement une application croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour $y \in [y_1, y_2] \subset]-k,+k[$

$$|Y_t^k(y,\omega)| \geqq k \Rightarrow Y_t^k(y_2,\omega) \geqq k \ \text{ ou } \ Y_t^k(y_1,\omega) \leqq -k$$

et par conséquent $T^k(y,\omega) \leqq T^k(y_1,\omega) \vee T^k(y_2,\omega)$. Laissant $[y_1, y_2]$ fixe et faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\zeta(y,\omega) \leqq \zeta(y_1,\omega) \vee \zeta(y_2,\omega) \quad \text{si} \quad y_1 \leqq y \leqq y_2$$

d'où il résulte aussitôt que, si $\zeta(y,\omega) < \infty$ pour y rationnel, on a aussi $\zeta(y,\omega) < \infty$ pour y réel. La non-explosion pour chaque y fixé entraîne donc que $\zeta(\cdot,\omega)$ est p.s. une fonction finie.

Note du séminaire. Le cas de $\mathbb{R}$ est aussi traité par Kunita (1981) : On backward stochastic differential equations. A paraître dans Stochastics. Voir aussi sur les sujets ci-dessus un article à paraître de Carverhill et Elworthy : Flows of stochastic dynamical systems : the functional analytic approach (1982 ; à paraître).