SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

KLAUS BICHTELER
JEAN JACOD

Calcul de Malliavin pour les diffusions avec sauts : existence d'une densité dans le cas unidimensionnel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 132-157
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__132_0>

CALCUL DE MALLIAVIN POUR LES DIFFUSIONS AVEC SAUTS : EXISTENCE D'UNE DENSITE DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

Klaus BICHTELER et Jean JACOD

1 - INTRODUCTION.

L'un des objectifs du "calcul de Malliavin" est de redémontrer par des techniques probabilistes le théorème d'hyppoellipticité d'Hörmander. Plus précisément on considère un opérateur de diffusion sur $\mathbb{R}^d$:

$$(1.1) \qquad \mathcal{L} = \sum_{(i)} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \beta^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

et on s'intéresse au problème suivant :

Problème (1) : A quelles conditions sur (a,β) le semi-groupe engendré par $\mathcal{L}$ admet-il des densités, éventuellement C^∞ ?

Les idées de Malliavin ([6],[7]) ont été développées par Stroock ([11],[12]) et reposent sur une étude délicate du processus d'Ornstein-Uhlenbeck infini-dimensionnel (voir aussi Meyer [9]). Bismut a proposé dans [3] une autre méthode, basée sur le calcul des variations et la transformations de Girsanov. Cette méthode ne permet peut-être pas d'aborder des problèmes aussi généraux que ceux (dépassant largement le cadre du théorème d'Hörmander) étudiés par Stroock, mais pour l'étude du problème (1) elle semble plus simple.

Surtout, elle s'étend au cas des générateurs des "diffusions avec sauts" (au sens de Stroock [10]) :

$$(1.2) \qquad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathcal{K}, \quad \mathcal{K}f(x) = \int K(x,dy)\,[\,f(x+y) - f(x) - \sum \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, y_i 1_{\{|y|\le 1\}}]$$

où K est un noyau positif sur $\mathbb{R}^d$ intégrant la fonction $|y|^2 \wedge 1$ et ne chargeant pas $\{0\}$. Bismut a partiellement résolu dans [4] le :

Problème (1') : A quelles conditions sur (a,β,K) le semi-groupe engendré par $\mathcal{L}'$ admet-il des densités, éventuellement C^∞ ?

Les résultats de Bismut sont dans un sens très fins mais ils sont aussi très restrictifs:

dans le cas où $\mathcal{L}' = \mathcal{K}$ ($\mathcal{L} = 0$) et si $(\Omega,(X_t),P^x)$ est un processus de Markov de générateur $\mathcal{L}'$, ses conditions impliquent que la loi du processus X sous P^x est, pour chaque x, absolument continue par rapport à la loi d'un processus à accroissements indépendants fixe, dont on sait que le semi-groupe admet des densités : ainsi, la partie du problème (1') concernant l'existence de densités est-elle triviale.

Or, il y a une autre manière de poser le problème. Soit $W = (W^i)_{i\leq d}$ un brownien d-dimensionnel, et μ une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$, où $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace auxiliaire ; on suppose que la mesure intensité (ou compensateur) de μ est $\nu(dt\times dz) = dt\times G(dz)$, où G est une mesure positive infinie, σ-finie, sans atome, sur $(E,\underline{\underline{E}})$. On peut alors trouver :

$$(1.3)\quad \begin{cases} \text{- une fonction matricielle } b = (b^{ij}) \text{ sur } \mathbb{R}^d \text{ avec } \beta = b\,{}^tb \\ \text{- une fonction } c : \mathbb{R}^d\times E \to \mathbb{R}^d, \text{ avec} \\ \quad Kf(x) = \int_E G(dz)\ f\circ c(x,z)\ 1_{\{c(x,z)\neq 0\}}. \end{cases}$$

Dans ce cas, on sait (voir par exemple [5]) que si l'équation différentielle stochastique

$$(1.4)\quad \begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t + c(z,X_{t-})\ (d\mu - d\nu) \end{cases}$$

admet une solution et une seule pour chaque valeur initiale $x \in \mathbb{R}^d$, et si P^x désigne la loi de la solution X lorsque $X_0 = x$ sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$, alors le processus canonique de $\mathbb{D}$ et la famille des lois (P^x) constituent un processus de Markov de générateur $\mathcal{L}'$. Ainsi on peut poser le problème suivant :

<u>Problème (2)</u> : A quelles conditions sur (a,b,c) la loi de X_t, où X est la solution de (1.4), admet-elle une densité, éventuellement C^∞, pour tout $t>0$ et tout $x\in\mathbb{R}^d$?

Nous nous proposons de montrer qu'on peut résoudre le problème sous des conditions relativement simples sur (a,b,c). Bien entendu, seul le cas multi-dimensionnel, et à moindre degré le caractère C^∞, sont réellement intéressants, mais ils conduisent à des calculs fort longs et fastidieux, sinon difficiles. Il nous a donc semblé utile de traiter à part le problème de l'existence d'une densité dans le cas unidimensionnel, ce qui limite grandement les calculs (le cas général sera traité dans un article ultérieur : voir les commentaires à la fin).

Cela nous permettra de dégager les principes, très simples, de la méthode de Bismut (en particulier, on n'utilise pas les "flots d'équations différentielles stochastiques", qui jouent un grand rôle apparent dans [3]). Cela nous permettra aussi de dégager quelques unes des limitations intrinsèques, malheureusement considérables, de cette méthode, notamment lorsqu'on veut résoudre le problème (1') en passant par l'intermédiaire du problème (2) : voir les exemples à la fin du § 2.

L'un des outils, constamment utilisé, est la différenciation des solutions d'équations du type (1.4) lorsque les coefficients dépendent d'un paramètre : nous avons assemblé en annexe les résultats nécessaires.

2 - ENONCE DU RESULTAT PRINCIPAL.

Pour simplifier on suppose l'intervalle des temps fini, soit $[0,T]$. Pour permettre une étude plus facile des rapports entre les problèmes (1') et (2) de l'introduction, on introduit une équation (apparemment) plus compliquée que (1.4), avec deux mesures de Poisson. A cet effet, on se donne :

- un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$ avec une mesure positive σ-finie $\overline{G}$;
- un ouvert U de $\mathbb{R}$, sur lequel la mesure de Lebesgue est notée G.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t)_{t\leq T},P)$ une base stochastique, munie de

$$(2.1)\quad \begin{cases} W, \text{ un mouvement brownien ;} \\ \mu, \text{ une mesure de Poisson sur } \Omega\times[0,T]\times U, \text{ de compensateur } \nu(dt\times dz) = dt\times G(dz); \\ \overline{\mu}, \text{ une mesure de Poisson sur } \Omega\times[0,T]\times E, \text{ de compensateur } \overline{\nu}(dt\times dz) = dt\times\overline{G}(dz). \end{cases}$$

On utilise les notations usuelles : cf. [8], ou [5] pour les mesures aléatoires. Rappelons que l'intégrale stochastique d'un processus prévisible H par rapport à W est notée $H\bullet W$. Si V est une fonction sur $\Omega\times[0,T]\times U$, on pose

$$V * \mu_t(\omega) = \int_0^t \int_U \mu(\omega;ds\times dz)\, V(\omega,s,z)$$

si cette intégrale existe, et de même pour $V * \nu$, etc... L'intégrale stochastique de V par rapport à $\mu-\nu$ est notée $V * (\mu-\nu)$; pour qu'elle existe il suffit que V soit prévisible et que $V^2 * \nu_T<\infty$ p.s. Enfin si H est un processus intégrable, on note $H\bullet t$ le processus

$$(2.2)\qquad H\bullet t\ (\omega) = \int_0^{\bullet} H_s(\omega)\, ds.$$

On considère l'équation suivante :

$$(2.3)\qquad X = x_0 + a(X_-)\bullet t + b(X_-)\bullet W + c(X_-) * (\mu-\nu) + \overline{c}(X_-) * (\overline{\mu}-\overline{\nu}),$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est donné, et où on fait les hypothèses suivantes sur les coefficients :

(2.4) <u>Hypothèses</u> : a) a et b sont des fonctions réelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivées bornées.

b) c est une fonction deux fois dérivable sur $U\times\mathbb{R}$; les dérivées partielles c'_z, c''_{z^2}, c''_{zx} sont bornées ; il existe une fonction $\rho\in L^2(U,G)\cap L^4(U,G)$ telle que $|c(z,0)|\leq\rho(z)$, $|c'_x(z,x)|\leq\rho(z)$ et $|c''_{x^2}(z,x)|\leq\rho(z)$.

c) $\overline{c}$ est une fonction $\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{R}}$- mesurable sur $E\times\mathbb{R}$; $\overline{c}(z,.)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; il existe une fonction $\overline{\rho}\in L^2(E,\overline{G})\cap L^4(E,\overline{G})$ telle que $|\overline{c}(z,0)|\leq\overline{\rho}(z)$, $|\overline{c}'_x(z,x)|\leq\overline{\rho}(z)$ et $|\overline{c}''_{x^2}(z,x)|\leq\overline{\rho}(z)$. ■

(2.5) THEOREME : *On suppose* (2.4). *L'équation* (2.3) *admet une solution et une seule, et si on suppose*

condition (H) : *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $b(x) \neq 0$ *ou* $G(\{z : c'_z(z,x) \neq 0\}) = \infty$

alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, *la loi de* X_T *admet une densité sur* $\mathbb{R}$.

Avant de démontrer ce théorème on va donner quelques exemples d'application au problème (1') de l'introduction, ce qui en montrera les limitations. D'abord, l'opérateur infinitésimal associé à l'équation (2.3) est :

$$(2.6)\begin{cases} \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}, \text{ avec } \mathcal{L}f(x) = a(x)f'(x) + \frac{1}{2}b^2(x)f''(x) \\ \mathcal{K}f(x) = \int_U dz\,[f(x+c(z,x)) - f(x) - f'(x)c(z,x)\,1_{\{|c(z,x)|\leq 1\}}] \\ \overline{\mathcal{K}}f(x) = \int_E \overline{G}(dz)\,[f(x+\overline{c}(z,x)) - f(x) - f'(x)\overline{c}(z,x)\,1_{\{|\overline{c}(z,x)|\leq 1\}}] \end{cases}$$

On considère maintenant le problème inverse : on se donne $\mathcal{L}'$, et on veut retrouver l'équation correspondante (noter qu'il y a évidemment une infinité de choix possibles pour c et $\overline{c}$, permettant de retrouver $\mathcal{K} + \overline{\mathcal{K}}$).

<u>Exemple 1</u>. Soit $\mathcal{L}_1$ donné par

$$(2.7)\quad \mathcal{L}_1 f(x) = a(x)f'(x)+\tfrac{1}{2}b^2(x)f''(x) + \int g(x,y)\,dy\,[f(x+y) - f(x) - f'(x)y1_{\{|y|\leq 1\}}],$$

où g est une fonction sur $\mathbb{R}^2$, positive, telle que :

$$\int g(x,y)\,y^2 \wedge 1\,dy < \infty .$$

On va écrire $\mathcal{L}_1$ sous la forme (2.6), avec $\overline{c} = 0$. Parmi les multiples manières de construire c, nous n'en voyons qu'une, essentiellement, qui permette de transporter la régularité éventuelle de g sur c, et qui est la suivante : on pose

$$\text{si } y>0,\quad h_+(x,y) = \int_y^{\infty} g(x,u)\,du$$

$$\text{si } y<0,\quad h_-(x,y) = -\int_{-\infty}^{y} g(x,u)\,du\ ;$$

on prend $U =]-\infty,0[\ \cup\ ]0,\infty[$; sur $]0,\infty[$, $c(.,x)$ est l'inverse continu à droite de $h_+(x,.)$; sur $]-\infty,0[$, $c(.x)$ est l'inverse continu à gauche de $h_-(x,.)$.

A condition que les dérivées requises existent, on calcule facilement que si $z>0$, on a :

$$\begin{aligned} c'_z(z,x) &= -\,g(x,c(z,x))^{-1} \\ c'_x(z,x) &= -h'_{+x}(x,c(z,x))\,g(x,c(z,x))^{-1} \\ c''_{z^2}(z,x) &= -g'_y(x,c(z,x))\,g(x,c(z,x))^{-3} \\ c''_{zx}(zx) &= [g(x,c(z,x))\,g'_x(x,c(z,x)) - h'_{+x}(x,c(z,x))\,g'_y(x,c(z,x))]\,g(x,c(z,x))^{-3} \end{aligned}$$

$$c''_{x^2}(z,x) = [2\, g(x,c(z,x))\, g'_x(x,c(z,x))\, h'_{+x}(x,c(z,x)) - g(x,c(z,x))^2\, h''_{+x^2}(x,c(z,x)) - h'_{+x}(x,c(z,x))^2\, g'_y(x,c(z,x))]\, g(x,c(z,x))^{-3}$$

et des formules analogues si $z<0$, avec h_-.

Il reste alors à exprimer qu'on a (2.4) (avec $\bar{c}=0$), ce qui n'est pas simple ! remarquons toutefois que (2.4) se traduit par une série de conditions relativement anodines sur g, plus une condition extrêmement restrictive, due à ce que c'_z doive être bornée, et qui s'écrit :

(2.8) $\begin{cases} \text{il existe des fonctions } \alpha \text{ et } \beta \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } \alpha\leq\beta \text{ et une constante } \gamma>0, \text{ telles} \\ \text{que } g(x,y) \geq\gamma \text{ si } \alpha(x)<y<\beta(x) \text{ et } g(x,y) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Par contre, la condition (H) est extrêmement simple à exprimer :

(2.9) pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $b(x) \neq 0$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, dy = \infty$.

Exemple 2. Soit toujours $\mathcal{L}_1$ donné par (2.7), mais on suppose cette fois-ci que la condition (2.8) n'est pas satisfaite. Tirant partie de ce que dans (2.4) il n'y a pas de régularité requise "en z" sur $\bar{c}$, on peut décomposer g en $g = g_1 + g_2$, où g_1 vérifie (2.8). On construit c_i correspondant à g_i comme dans l'exemple précédent, et on considère l'équation (2.3) avec $c = c_1$ et $\bar{c} = c_2$. Il faut bien-sûr que la condition (2.9) soit satisfaite par g_1, et pas seulement par g.

Exemple 3. Soit $\mathcal{L}_2$ donné par

(2.10) $$\mathcal{L}_2 f(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n(x)[f(x+\beta_n(x)) - f(x) - f'(x)\beta_n(x)\, 1_{\{|\beta_n(x)|\leq 1\}}]$$

où les α_n sont positives, et $\sum\alpha_n(x)\, (\beta_n^2(x)\wedge 1)<\infty$. Le noyau K correspondant à cet opérateur est

(2.11) $$K(x,dy) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n(x)\, \varepsilon_{\beta_n(x)}(dy)$$

et si on le met sous la forme (1.3) il est clair que la fonction $c(.,x)$ ne prend que les valeurs $\beta_n(x)$. Elle ne peut donc pas être continue, sauf si elle est constante sur chaque composante connexe de U ; mais alors $c'_z(.,x) = 0$ sur chacune de ces composantes connexes, et on ne saurait avoir la condition (H).
Par conséquent, dans ce cas il n'est pas question d'appliquer le théorème (2.5), alors que le semi-groupe engendré par $\mathcal{L}_2$ peut fort bien admettre des densités.

Exemple 4. Soit $\mathcal{L}_3$ de la forme $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, somme de (2.7) et (2.10). Dans ce cas, il est naturel de définir (au moins si on a (2.8)) U et c comme dans l'exemple 1, et de mettre le noyau K donné par (2.11) sous la forme (1.3), avec la fonction $\bar{c}$. Comme ci-dessus, $\bar{c}(.,x)$ ne prend que les valeurs $\beta_n(x)$; comme la mesure $\bar{G}$ est fixe et qu'on doit avoir (1.3) pour tout x, il est facile de voir que $\bar{c}(z,x)$ ne peut être continue en x que sous l'hypothèse suivante :

(2.12) chaque fonction α_n est constante.

Dans ce cas, on peut prendre $E = \mathbb{N}$, $\bar{G}(dz) = \sum \alpha_n \varepsilon_n(dz)$ et $\bar{c}(n,x) = \beta_n(x)$.

La conclusion qu'on peut tirer de ces exemples est donc que le théorème (2.5) est plutôt inadapté à l'étude du problème (1'), dès que le noyau K a des atomes.

3 - PERTURBATION DE L'EQUATION.

§ 3-a. Pour obtenir le théorème (2.5), on s'appuie sur la propriété bien connue suivante : supposons qu'il existe une variable aléatoire intégrable δ et une constante C telles que

(3.1) $\forall f$, C^∞ à support compact, $|E[f'(X_T)\delta]| \leq C\, ||f||_\infty$;

si alors $\delta \neq 0$ p.s., la loi de X_T admet une densité (en fait, le résultat est classique si $\delta=1$; sinon, (3.1) implique que la loi de X_T sous la mesure $Q(d\omega) = P(d\omega)\delta(\omega)$ admet une densité ; mais si $\delta\neq 0$ p.s., on a $Q \sim P$, donc X_T admet aussi une densité sous P).

Raisonnons alors de manière heuristique. Pour chaque λ appartenant à un voisinage de 0, on va faire une perturbation sur les termes directeurs $W,\mu,\bar{\mu}$ de l'équation (2.4), en les remplaçant par W^λ, par μ^λ et par $\bar{\mu}^\lambda = \bar{\mu}$, cette perturbation étant nulle pour $\lambda = 0$. La solution de (2.3) devient alors X^λ. Cette perturbation est telles que la loi de $(W^\lambda, \mu^\lambda, \bar{\mu})$ soit équivalente à celle de $(W,\mu,\bar{\mu})$, avec une densité G_T^λ qu'on peut calculer ; de cette manière on a

(3.2) $$E[f(X_T^\lambda)\, G_T^\lambda] = E[f(X_T)]$$

pour toute fonction bornée f. Cette perturbation est aussi telle que G_T^λ et X_T^λ soient dérivables en λ pour $\lambda=0$, dans L^2 pour X_T^λ et dans tous les L^p pour G_T^λ ; on peut alors dériver (3.2) sous le signe espérance, ce qui donne en notant DX_T et DG_T les dérivées de X_T^λ et G_T^λ :

(3.2) $$E[f'(X_T)\, DX_T] = -\, E[f(X_T)\, DG_T].$$

On a donc (3.1) avec $C = E(|DG_T|)$ et $\delta = DX_T$, et il reste à montrer que DX_T est p.s. non nul.

Tout ceci va être explicité et rendu rigoureux dans ce qui suit.

§ 3-b. Le changement de probabilité. Il est facile de construire une fonction α : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui est C^∞, qui vérifie $\{\alpha>0\} = U$, qui est bornée ainsi que toutes ses dérivées, qui est intégrable (donc toutes ses puissances sont aussi intégrables) par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que $\alpha(z)$ soit majorée par la distance de z au complémentaire de U. On considère cette fonction fixée une fois pour toutes.

On fixe ensuite un processus u et une fonction v sur $\Omega \times [0,T] \times U$ jouissant des propriétés suivantes

(3.4) (a) u est prévisible borné

(b) v est prévisible, $v(\omega,t,.)$ est continûment dérivable, et
$|v(\omega,t,z)| \leq \alpha(z)$, $|v'(\omega,t,z)| \leq \frac{1}{2}\Lambda\ \alpha(z)$.■

Ces termes seront choisis judicieusement dans le § 4.

Pour chaque fonction prévisible $h : \Omega \times [0,T] \times U \longrightarrow U$, on note $h(\mu)$ la mesure aléatoire

$$h(\mu)(\omega;A) = \int \mu(\omega;dt\times dz)\ 1_A(t,h(\omega,t,z)), \quad A\subset[0,T]\times U,$$

et de même pour $h(\nu)$, etc... Soit $\Lambda = [-1,1]$. Si $\lambda \in \Lambda$ on pose

$$\gamma^\lambda(\omega,t,z) = z + v(\omega,t,z)\lambda.$$

D'après (3.4), la fonction $\gamma^\lambda(\omega,t,.)$ est une bijection de $\mathbb{U}$ sur lui-même. On pose

$$(3.5) \qquad \begin{cases} W_t^\lambda = W_t + \lambda\int_0^t u_s\, ds \\ \mu^\lambda = \gamma^\lambda(\mu) \end{cases}$$

$$(3.6) \qquad Y^\lambda(\omega,t,z) = 1 + v'(\omega,t,z)\lambda .$$

D'après (3.4) on a $|Y^\lambda - 1| \leq \alpha$, et $\alpha \in L^2(G)$, donc on peut définir la martingale locale

$$M^\lambda = -\lambda u\cdot W + (Y^\lambda - 1) * (\mu - \nu)$$

et son exponentielle de Doléans-Dade $G^\lambda = \mathcal{E}(M^\lambda)$. Le lemme suivant montre en particulier que G^λ est une martingale. Rappelons que pour tout processus H, on note $H^*(\omega) = \sup_{(s)} |H_s(\omega)|$.

(3.7) LEMME : *Pour tout* $p \in [1,\infty[$, *on a* $|G^\lambda|^* \in L^p(P)$, *et la martingale*

$$DG = -u\cdot W + v' * (\mu-\nu)_\lambda$$

est la dérivée de $(G^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* 0, *au sens où* $|\frac{G^\lambda - 1}{\lambda} - DG|^* \to 0$ *dans* $L^p(P)$ *lorsque* $\lambda \to 0$.

Démonstration. G^{λ} est la solution de l'équation linéaire

$$G^{\lambda} = 1 - (G^{\lambda}_{-}\, u\, \lambda)\bullet W + G^{\lambda}_{-}(Y^{\lambda} - 1) * (\mu-\nu).$$

On applique alors le théorème (A.12) de l'annexe, avec $A^{\lambda} = 0$, $B'^{\lambda} = 0$, $B''^{\lambda} = -u\lambda$, $C'^{\lambda} = 0$ et $C''^{\lambda} = Y^{\lambda} - 1$: avec les notations de ce théorème, et pour $p = 2^{q}$ avec q quelconque dans $\mathbb{N}^{*}$, on a évidemment (i), et (ii) avec $\rho = \alpha$; on a (iii) pour B''^{λ} avec $DG'' = -u$ (trivial), et pour C''^{λ} avec $\rho = \alpha$ et $DC'' = v'$ (également trivial). On en déduit que $|G^{\lambda}|^{*} \in L^{p}(P)$ et que (G^{λ}) est dérivable dans $L^{p}(P)$ avec la dérivée $DG = -u\bullet W + v' * (\mu-\nu)$, pour tout $p = 2^{q}$ $(q \in \mathbb{N}^{*})$, donc aussi pour tout $p \in [1,\infty[$. ■

On a en particulier $E(G^{\lambda}_{T}) = 1$, et comme $\Delta M^{\lambda} \geq -1/2$ par construction, on a $G^{\lambda}_{T} > 0$ p.s. Donc $P^{\lambda} = G^{\lambda}_{T}\bullet P$ est une probabilité équivalente à P.

(3.8) LEMME : *La loi de* $(W^{\lambda},\mu^{\lambda},\overline{\mu})$ *sous la probabilité* $P^{\lambda} = G^{\lambda}_{T}\bullet P$ *est la même que la loi de* $(W,\mu,\overline{\mu})$ *sous* P.

Démonstration. Il suffit de montrer les trois assertions suivantes :

a) Pour P^{λ}, W^{λ} est une martingale (continue par construction) de variation quadratique t : c'est le théorème de Girsanov usuel.

b) Pour P^{λ}, la projection prévisible duale de μ^{λ} est ν. Mais d'après la définition de G^{λ} et le théorème de Girsanov pour les mesures ponctuelles [5], la projection prévisible duale de μ pour P^{λ} est $Y^{\lambda}\bullet\nu$, donc celle de $\mu^{\lambda} = \gamma^{\lambda}(\mu)$ est $\gamma^{\lambda}(Y^{\lambda}\bullet\mu)$. Mais d'après la formule du changement de variable, et comme $\gamma^{\lambda}(\omega,t,.)$ est une bijection sur U, on a
$$\gamma^{\lambda}(Y^{\lambda}\bullet\nu)(\omega;A) = \int 1_{A}(t,\gamma^{\lambda}(\omega,t,z))\, Y^{\lambda}(\omega,t,z)\, ds\; G(dz)$$
$$= \int dt \int_{U} 1_{A}(t,z+v(\omega,t,z)\lambda)\,[1 + v'(\omega,t,z)\lambda]\, dz = \int dt \int_{U} 1_{A}(t,z)\, dz.$$
Par suite, la projection prévisible duale de μ^{λ} pour P^{λ} est ν.

c) Pour P^{λ}, la projection prévisible duale de $\overline{\mu}$ est $\overline{\nu}$. Mais par construction M^{λ} et G^{λ} ne "sautent" pas en même temps que $\overline{\mu}$, donc on a de nouveau le résultat par le théorème de Girsanov. ■

On en déduit alors que si θ est une fonction mesurable des "trajectoires" de W, $\mu,\overline{\mu}$, on a

$$(3.9)\qquad E[\theta(W^{\lambda},\mu^{\lambda},\overline{\mu})\, G^{\lambda}_{T}] = E[\theta(W,\mu,\overline{\mu})].$$

§ 3-c. Perturbation de l'équation. On considère maintenant l'équation

$$(3.10)\quad \begin{aligned} X^\lambda = {} & x_0 + a(X^\lambda_-)\bullet t + b(X^\lambda_-)\bullet W + \lambda u\, b(X^\lambda_-)\bullet t + c(\gamma^\lambda(z),X^\lambda_-) * (\mu-\nu) \\ & - \lambda\int_0^\cdot ds \int_U G(dz)\, c(\gamma^\lambda(z),X^\lambda_-)\, v'(z) + \bar{c}(X^\lambda_-) * (\bar{\mu}-\bar{\nu}) \end{aligned}$$

(pour $\lambda = 0$ on retombe sur (2.3)).

(3.11) LEMME : *Pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *l'équation* (3.10) *admet une solution et une seule* X^λ, *qui vérifie* $|X^\lambda|^* \in L^2(P)$. *De plus* $(X^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est dérivable en* 0 *dans* $L^2(P)$ *(au sens du lemme* (3.7)), *et son processus dérivée* DX *est l'unique solution de l'équation linéaire :*

$$(3.12)\quad \begin{aligned} DX = {} & a'(X_-)DX_-\bullet t + b'(X_-)DX_-\bullet W + u\, b(X_-)\bullet t + c'_x(X_-)DX_- * (\mu-\nu) \\ & + c'_z(X_-)v * (\mu-\nu) - c(X_-)v' * \nu + \bar{c}'_x(X_-)DX_- * (\bar{\mu}-\bar{\nu}) \end{aligned}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème (A.10) de l'annexe, avec la remarque (A.4), pour $p = 2$ et les coefficients suivants qui font de (3.10) une équation de type (A.3) :

$$A^\lambda(\omega,t,x) = a(x) + \lambda u_t(\omega)b(x) - \lambda\int G(dz)\, c(z+v(\omega,t,z)\lambda,x)\, v'(\omega,t,z)$$

$$B^\lambda(\omega,t,x) = b(x)$$

$$C^\lambda(\omega,t,z,x) = c(z+v(\omega,t,z)\lambda,x)$$

$$\bar{C}^\lambda(\omega,t,z,x) = \bar{c}(z,x).$$

On utilise la nomenclature de l'hypothèse (Hp) de l'annexe. On note k une constante qui majore $|a'|$, $|b'|$, $|c'_z|$, $|c''_{z^2}|$, $|c''_{zx}|$ et $|u|$; quitte à remplacer la fonction ρ de (2.4) par $\rho\vee\alpha$, on peut supposer que $\alpha\leq\rho$. On va montrer qu'on a (Hp) pour $p = 2$, avec la fonction ρ pour C^λ et la fonction $\bar{\rho}$ pour $\bar{C}^\lambda$.

D'abord, les conditions (a) et (b-i) de (H2) découlent immédiatmenet de (2.4) : pour A^λ, noter que

$$(3.13)\quad |c'_x(z+v(z)\lambda,x)| \leq |c'_x(z,x)| + k|\lambda||v(z)| \leq (1+k)\,\rho(z)$$

et comme $\rho\alpha \in L^1(G)$ on peut dériver (en x) le dernier terme de A sous le signe somme.

Ensuite, les conditions (b-ii, iii, iv) découlent aussi immédiatement de (2.4) pour B^λ et $\bar{C}^\lambda$. Pour C^λ elles découlent des majorations :

$|D_x\, C^\lambda(z,x)| \leq (1+k)\, \rho(z)$ (utiliser (3.13)).

$|C^\lambda(z,x) - C^0(z,x)| \leq k|\lambda|\ |v(z)| \leq k\ |\lambda|\rho(z)$

$|D_x\, C^\lambda(z,x) - D_x\, C^0(z,x)| \leq k|\lambda|\,|v(z)| \leq k|\lambda|\ \rho(z)$

Pour A^λ, ces conditions découlent des majoration suivantes (rappelons que $|v'|\leq\alpha$) :

$|D_x\, A^\lambda(x)| \leq k + k^2 + (1+k)\, G(\rho\alpha)$ (utiliser (3.13)).

$|b(x)| \leq |b(0)| + k\ |x|$

(3.14) $|c(z+v(z)\lambda,x)| \leq k\ \alpha(z) + |c(z,x)| \leq k\alpha(z) + |x|\rho(z) + |c(z,0)|$

$\leq (k + 1 + |x|)\ \rho(z).$

(3.15) $|A^\lambda(x) - A^0(x)| \leq [k|b(0)| + k^2|x| + (k+1 + |x|)\, G(\rho\alpha)]\ |\lambda|$

$|D_x\, A^\lambda(x) - D_x A^0(x)| \leq k^2|\lambda| + |\lambda|\ (1+k)\, G(\rho\alpha)$ (utiliser (3.13)).

On a donc montré (H2-a,b), ce qui d'après le théorème (A.6) de l'annexe entraîne que (3.10) a une solution et une seule X^λ, qui vérifie $|X^\lambda|^* \in L^2(P)$.

Il reste à montrer la condition (H2-c). C'est évident pour B^λ et $\overline{C}^\lambda$, avec $DB=0$ et $D\overline{C}=0$ (en effet $|B^\lambda(X^0_-)| \leq |b(0)| + k|X^0|^*$ et $|C^\lambda(X^0_-)| \leq c'_z(z,X^0_{t-}(\omega))v(\omega,t,z)$; cela découle des majorations

$|C^\lambda(z,X^0_-)| \leq (k + 1 + (X^0)^*)\rho(z)$ (d'après (3.14)).

$|DC(z)| \leq k\alpha(z),$

$|C^\lambda\ (z,X^0_-) - C^0(z,X^0_-) - DC(z)\lambda| \leq \frac{k}{2}\ |\lambda|^2\ \alpha(z)$

(formule de Taylor au deuxième ordre). Enfin (A^λ) est L^2-dérivable, de dérivée

$DA = ub(X^0_-) - \int G(dz)\ c(z,X^0_-)\ v'(z)$; cela découle des majorations :

$$|A^\lambda\ (X^0_-)| \leq |A^0(X^0_-)| + |A^\lambda(X^0_-) - A^0(X^0_-)|$$

$$\leq |a(0)| + k(X^0)^* + k|b(0)| + k^2(X^0)^* + (k + 1 + (X^0)^*)G(\rho\alpha)$$ (utiliser 3.15)).

$|DA| \leq k\ |b(0)| + k^2|X^0|^* + (1 + |X^0|^*)\ G(\rho\alpha)$

$$|A^\lambda(X^0_-) - A^0(X^0_-) - DA.\lambda| = |\lambda|\ \left|\int G(dz)\,[C^\lambda(z,X^0) - C^0(z,X^0)]\ v'(z)\right|$$

$$\leq k\ |\lambda|^2\ G(\rho\alpha).$$

Enfin la formule (A.11) de l'annexe nous donne l'équation linéaire satisfaite par le processus dérivée DX : compte-tenu des valeurs précédemment calculées de DA,DB,DC,

$D\overline{C}$, cette équation est exactement (3.12). ■

La solution X est une fonction de $(W,\mu,\overline{\mu})$, car elle est mesurable par rapport à la tribu engendrée par ces termes (c'est une solution "forte") : on l'écrit $X = \theta(W,\mu,\overline{\mu})$. Si maintenant on pose $Y^\lambda = \theta(W^\lambda,\mu^\lambda,\overline{\mu})$, comme la loi de $(W^\lambda,\mu^\lambda,\overline{\mu})$ sous P^λ est la même que celle de $(W,\mu,\overline{\mu})$ sous P, il est évident que Y^λ est solution pour P^λ de la même équation que X pour P, mais relativement à W^λ, μ^λ, $\overline{\mu}$ (voir par exemple les théorèmes classiques sur les changements d'espace : [5]). Autrement dit, Y^λ est l'unique solution de l'équation suivante, écrite pour P^λ :

$$(3.16)\quad Y^\lambda = x_0 + a(Y^\lambda_-)\cdot t + b(Y^\lambda_-)\cdot W^\lambda + c(Y^\lambda_-) * (\mu^\lambda - \nu) + \overline{c}(Y^\lambda_-) * (\overline{\mu} - \overline{\nu})$$

(3.17) LEMME : *Les processus* Y^λ *et* X^λ *sont* P- *et* P^λ*-indistinguables.*
Démonstration. Considérons la solution X^λ de l'équation (3.10) . D'abord,

$$b(X^\lambda_-)\cdot W + \lambda\, ub(X^\lambda_-)\cdot t = b(X^\lambda_-)\cdot W^\lambda$$

au sens de l'intégrale stochastique par rapport à la P-semimartingale W^λ ; comme $P^\lambda \sim P$, c'est aussi l'intégrale stochastique par rapport à la P^λ-martingale W^λ, pour P^λ. Par ailleurs,

$$c(\gamma^\lambda(z), X^\lambda_-) * (\mu-\nu) = c(z,X^\lambda_-) * (\mu^\lambda - \gamma\cdot\lambda(\nu))$$

pour P, par définition de μ^λ et de $\gamma^\lambda(\nu)$. D'après [5, ch. 7] , ce processus s'écrit comme suit pour P^λ (car ν est la projection prévisible duale de μ^λ pour P^λ) :

$$c(z,X^\lambda_-) * (\mu^\lambda-\nu) + [\,c(\gamma^\lambda(z),X^\lambda_-)(Y^\lambda(z) - 1)] * \nu\ ,$$

où la seconde intégrale est de Stieltjes. Enfin, comme $\overline{\nu}$ est la projection prévisible duale de $\overline{\mu}$ pour P^λ, le même résultat montre que $\overline{c}(X^\lambda_-) * (\overline{\mu}-\overline{\nu})$ est défini indifféremment pour P et P^λ.

On a donc démontré que, pour P^λ , on a :

$$X = X_0 + a(X^\lambda_-)\cdot t + b(X^\lambda_-)\cdot W^\lambda + c(X^\lambda_-) * (\mu^\lambda - \nu) + \overline{c}(X^\lambda_-) * (\overline{\mu}-\overline{\nu})$$

Si on compare à (3.16), on voit que X^λ est P^λ-indistinguable, donc aussi P-indistinguable (car $P \sim P$), de Y^λ . ■

D'après (3.9), on a donc :

(3.18) COROLLAIRE : *Pour toute fonction mesurable bornée, on a*

$$E[f(X^\lambda_T)\, G^\lambda_T] = E[f(X^\lambda_T)]\ .$$

Terminons ce paragraphe par un résultat technique :

(3.19) LEMME : *On a l'égalité*

$c'_z\,(X_-)v * (\mu-\nu) - c(X_-)v' * \nu = c'_z(X_-)v * \mu$

Démonstration. Comme $|c'_z(z,X_-)\,v(z)| \leq k\,\alpha(z)$, la fonction $c'_z(z,X_-)\,v(z)$ est intégrable au sens de Stieltjes par rapport à μ et à ν . Il suffit donc de montrer que

$$c'_z(X_-)v * \nu + c(X_-)\,v' * \nu = 0 \qquad \text{p.s.}$$

Etant donné la forme de ν, il suffit donc de montrer que pour $dP\times dt$-presque tous (ω,t) et pour toute composante connexe $]\gamma,\beta[$ de U, on a :

$$(3.20)\qquad \int_\gamma^\beta dz\,[c'_z(z,X_{t-}(\omega))v(\omega,t,z) + c(z,X_{t-}(\omega))\,v'(\omega,t,z)] = 0$$

Comme $|c(z,x)| \leq \rho(z)(1+|x|)$ et $|v(z)| \leq \alpha(z)$ et $|v'(z)| \leq \alpha(z)$ et comme ρ^2,α et $\alpha\rho$ sont dans $L^2(G)$, on a $dP\times dt$-p.s :

$$(3.21)\qquad \int_\gamma^\beta dz[\,|c'_z(z,X_-)v(z)| + |c(z,X_-)v'(z)|\,] < \infty$$

$$(3.22)\qquad \int_\gamma^\beta dz\;c(z,X_-)^2 < \infty$$

Si $[\gamma',\beta'] \subset\,]\gamma,\beta[$, on a bien-sûr

$$\int_{\gamma'}^{\beta'} dz\;[c'_z(z,X_-)v(z) + c(z,X_-)v'(z)] = c(\beta',X_-)v(\beta') - c(\gamma',X_-)v(\gamma')$$

et d'après (3.21),cette expression tend vers une limite finie lorsque $\beta' \uparrow \beta$, $\gamma' \downarrow \gamma$, et cette limite est la valeur du premier membre de (3.20).

Supposons alors que $c(\gamma',X_-)v(\gamma')$ tende vers une limite non nulle. Examinons d'abord le cas où $\gamma>-\infty$. On a $|v(\gamma')| \leq \alpha(\gamma') \leq \gamma'-\gamma$, donc il existe une constante $K>0$ telle que $|c(\gamma',X_-)| \geq \frac{K}{\gamma'-\gamma}$ pour tout γ' assez proche de γ: cela contredit (3.21). Examinons ensuite le cas où $\gamma = -\infty$. On a $|v(\gamma')| \leq \alpha(\gamma')$ donc il existe une constante $K>0$ telle que $|c(\gamma',X_-)| \geq K$ pour tout γ' assez proche de $-\infty$: cela contredit encore (3.21). On en déduit que nécessairement $c(\gamma',X_-)v(\gamma')$ tend vers 0 quand $\gamma' \downarrow \gamma$, et on montre de même que $c(\beta',X_-)v(\beta') \to 0$ quand $\beta' \uparrow \beta$. Par suite on a (3.20), d'où le résultat. ■

4 - DEMONSTRATION DU THEOREME (2.5).

D'après (3.7) et (3.11), on peut dériver (3.18) sous le signe somme en $\lambda = 0$ dès que f est dérivable à dérivée bornée, ce qui donne :

(4.1) $$E[f'(X_T)\, DX_T] = -E[f(X_T)\, DG]$$

et on a donc (3.1) avec $C = E(|DG_T|)$. Pour obtenir le résultat, il suffit donc de montrer qu'on peut choisir la perturbation (c'est-à-dire u et v vérifiant (3.4)) de sorte que

(4.2) $$DX_T \neq 0 \quad \text{p.s.}$$

On va d'abord calculer explicitement DX_T en fonction de u et v. Soit

(4.3) $$\begin{cases} H = u\, b(X_-)\bullet t + c'_z(X_-)v * \mu \\ K = a'(X_-)\bullet t + b'(X_-)\bullet W + c'_x(X_-)*(\mu-\nu) + \bar{c}'_x(X_-)*(\overline{\mu-\nu}), \end{cases}$$

de sorte que, compte-tenu du lemme (3.19), la formule (3.12) s'écrit :

$$DX = H + DX_- \bullet K.$$

On sait résoudre explicitement cette équation, qui généralise l'équation de Doléans-Dade ([13], [5]) ; on définit d'abord les temps d'arrêt

$$S_0 = 0, \quad S_{n+1} = \inf(t>S_n = t \leq T,\ \Delta K_t = -1)$$

(avec $\inf(\emptyset) = \infty$). On sait alors que, comme H est à variation finie, et avec la convention $\Delta H_0 = H_0$ (= 0 ici), on a

(4.4) $$DX_t = \mathcal{E}(K-K^{S_n})_t\, [\Delta H_{S_n} + \int_{]S_n,t]} (1+\Delta K_s)^{-1}\, \mathcal{E}(K-K^{S_n})^{-1}_{s-}\, dH_s]$$

$$\text{si } S_n \leq t < S_{n+1} \quad \text{et} \quad t \leq T.$$

Commes les temps S_n sont totalement inaccessibles, on a $P(S_n = T) = 0$; comme $\mathcal{E}(K - K^{S_n})_T \neq 0$ si $S_n < T < S_{n+1} = \infty$, pour obtenir (4.2) il suffit de montrer que :

(4.5) $$\begin{cases} Y_n \neq 0 \quad \text{p.s. sur } \{S_n < T < S_{n+1} = \infty\}, \text{ où} \\ \qquad Y_n = \Delta H_{S_n} + \int_{S_n}^{T} (1+\Delta K_s)^{-1}\, \mathcal{E}(K - K^{S_n})^{-1}_{s-}\, dH_s \end{cases}$$

pour tout $n \geq 0$ (en posant $Y_n = \infty$ si l'intégrale ci-dessus n'a pas de sens, une éventualité qui ne peut pas se produire si $S_n < T < S_{n+1}$).

Passons maintenant au choix de u et v. Soit d'abord g une fonction C^∞ à dérivées bornées, telles que

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Puis on définit u et v prévisibles par

$$(4.6)\quad \begin{cases} u_0 = 0,\ v(.,0,z) = 0\ ; \\ u_s = \operatorname{sgn}[b(X_{s-})]\ \operatorname{sgn}[\mathcal{E}(K-K^{S_n})_{s-}] \\ v(s,z) = \eta(z)\ g\circ c'_z\ (z,\boldsymbol{X}_{s-})\ g[1 + c'_x(z,X_{s-})]\ \operatorname{sgn}[\mathcal{E}(K - K^{S_n})_{s-}] \end{cases} \Bigg\}\ \text{si } S_n < s \leq S_{n+1}$$

où η est une fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de classe C^2, avec $\{\eta>0\} = U$, et $\eta \leq \alpha$, et "assez petite" pour que (3.4) soit satisfaite : étant donné que c''_{z^2} et c''_{zx} sont bornés, c'est clairement possible.

On a donc (3.4), et il reste à prouver que $Y_n \neq 0$ p.s. sur $\{S_n<T<S_{n+1}\}$. On va calculer Y_n. Rappelons qu'on peut représenter la mesure de Poisson μ comme suit : il existe un processus optionnel β à valeurs dans $U \cup |\Delta|$, tel que

$$\mu(\omega;dt\times dz) = \sum_{s>0,\beta_s(\omega)\in U} \varepsilon_{(s,\beta_s(\omega))}(dt\times dz)$$

et on a une formule analogue pour $\overline{\mu}$ avec un processus $\overline{\beta}$ à valeurs dans $E \cup \{\Delta\}$. De plus, comme μ et $\overline{\mu}$ sont des mesures de Poisson indépendantes, les ensembles $\{s : \beta_s \in U\}$ et $\{s : \overline{\beta}_s \in E\}$ sont p.s. disjoints.

Si $0 < S_n \leq T$, on a donc d'après (4.3) et (4.6) :

$$-1 = \Delta K_{S_n} = \begin{cases} c'_x(\beta_{S_n}, X_{S_n-}) & \text{si } \beta_{S_n} \in \mathbb{U} \\ \overline{c}'_x(\overline{\beta}_{S_n}, X_{S_n-}) & \text{si } \overline{\beta}_{S_n} \in E \end{cases}$$

$$\Delta H_{S_n} = \begin{cases} c'_z(\beta_{S_n},\boldsymbol{X}_{S_n-})\ \eta(\beta_{S_n})\ g\circ c'_z(\beta_{S_n},X_{S_n-})\ g[1 + c'_x(\beta_{S_n},\boldsymbol{X}_{S_n-})]\ \operatorname{sgn}[\mathcal{E}(K - K^{S_{n-1}})_{S_n-}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \beta_{S_n} \in \mathbf{U} \\ 0 \quad \text{si } \overline{\beta}_{S_n} \in E \end{cases}$$

Mais $g(0) = 0$, donc dans les deux cas on a $\Delta H_{S_n} = 0$. Par ailleurs H ne saute qu'aux instants de saut de μ, donc dans l'intégrale (4.5) on peut remplacer $1 + \Delta K_s$ par 1 chaque fois que $\beta_s \notin U$, donc en particulier lorsque $\overline{\beta}_s \in E$. Par suite on a

$$(4.7)\quad \begin{cases} Y_n = \int_{S_n}^{T} |b(X_{s-})/\mathcal{E}(K-K^{S_n})_{s-}|\ ds + h_n * \mu_T, \text{ où} \\ h_n(s,z) = [1 + c'_x(z,X_{s-})]^{-1}\ \mathcal{E}(K-K^{S_n})^{-1}_{s-}\ v(s,z)\ c'_z(z,X_{s-})\ 1_{\{S_n<s\leq T\wedge S_{n+1}\}}. \end{cases}$$

On a alors $h_n \geq 0$ d'après (4.6). Posons enfin

$$B = \{x : b(x) \neq 0\} , \quad B' = \{x : G(\{z : c'_z(z,x) \neq 0\}) = +\infty\},$$

$$A_n = \{(\omega,s,z) : h_n(\omega,s,z) > 0\} ,$$

$$S'_n = \inf(t>S_n : h_n * \mu_t >0) = \inf(t>S_n : 1_{A_n} * \mu_t > 0).$$

D'après les définitions de v et S_{n+1}, on a

$$(4.8) \quad S_n(\omega) < s \leq T , s < S_{n+1}(\omega) \implies \{(\omega,s,z) \in A_n \iff c'_z(z,X_{s-}(\omega)) \neq 0\} .$$

Par ailleurs $1_{A_n} * \mu_{S'_n} \leq 1$ par définition de S'_n, donc $E(1_{A_n} * \nu_{S'_n}) \leq 1$ et quitte à enlever un ensemble négligeable on peut supposer qu'on a identiquement $1_{A_n} * \nu_{S'_n}(\omega)<\infty$. Cela entraîne

$$\int G(dz) 1_{A_n}(\omega,s,z) < \infty \text{ pour presque tout } s \in]S_n(\omega),S'_n(\omega)] \cap [0,T] .$$

Etant donné (4.8), on obtient donc

$$(4.9) \int_{S_n \wedge T}^{S'_n \wedge S_{n+1} \wedge T} 1_{B'}(X_{s-})\, ds = 0$$

Plaçons-nous sur l'ensemble $\{S_n < T < S_{n+1} = \infty\}$. Si $S'_n = S_n$, il est clair que la seconde intégrale de (4.7), donc Y_n aussi, est strictement positive. Si $S'_n > S_n$, comme $B \cup B' = \mathbb{R}$ d'après l'hypothèse (H) du théorème, (4.9) implique que

$$\int_{S_n}^{T} 1_B(X_{s-})\, ds > 0,$$

et ceci entraîne à l'évidence que la première intégrale de (4.7), donc Y_n aussi, est strictement positive. On a donc montré (4.5), et le théorème est complètement démontré.

5 - EXTENSIONS.

Si on veut obtenir une densité C^∞ il faut généraliser ainsi (3.1) : pour tout n il existe une constante C_n avec

$$(5.1) \qquad \forall f, C^\infty \text{ à support compact}, \quad |E[f^{(n)}(X_T)]| \leq C_n \|f\|_\infty.$$

Dans le cas multi-dimensionnel, (5.1) entraîne encore l'existence d'une densité C^∞ si on remplace $f^{(n)}$ par toutes les dérivées partielles possibles d'ordre n ; et dans ce cas, même pour l'existence d'une densité, il ne suffit pas d'avoir l'équivalent de (3.1) avec une matrice aléatoire δ, mais il faut avoir (5.1) pour $n = 1$, et toutes les dérivées partielles du premier ordre.

Pour obtenir (5.1) avec $n = 1$, l'idée consiste à appliquer (3.18) avec $f(X_T^\lambda)$ remplacé par $f(X_T^\lambda)/DX_T^\lambda$, où DX^λ est construit à partir de $(W^\lambda, \mu^\lambda, \bar{\mu})$ comme DX à partir de $(W, \mu, \bar{\mu})$; puis on dérive, en espérant que tout marche bien : si D^2X désigne la dérivée de (DX^λ), on obtient

$$E[f'(X_T)] = E[f(X_T)\, D^2X_T/(DX_T)^2] - E[f(X_T)\, DG_T/DX_T]$$

d'où (5.1) pour $n = 1$ si tout est intégrable. Si maintenant on veut obtenir (5.1) pour $n = 2$, l'expression précédente montre qu'il faut pouvoir appliquer (3.18) (et dériver) pour $f(X_T^\lambda)$ remplacé par $f(X_T^\lambda)D^2X_T^\lambda/(DX_T^\lambda)^3$ et par $f(X_T^\lambda)DG_T^\lambda/(DX_T^\lambda)^2$.

Cette procédure d'itération est très simple dans son principe, et elle marche bien, quoiqu'elle donne lieu à des calculs plutôt compliqués (lorsqu'il n'y a pas de sauts, et dans le cas unidimensionnel, cette itération reste simple : voir [2]) : nous espérons le prouver dans un article actuellement en préparation.

ANNEXE

DIFFERENTIABILITE DANS L^p ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Cette note est la $n^{\text{ième}}$ sur la stabilité (avec comme corollaire la différentiabilité) pour les solutions d'équations différentielles stochastiques. Et les ingrédients sont toujours les mêmes : un peu de majorations type "Burkhölder-Davis-Gundy", et beaucoup de lemme de Gronwall.

La seule excuse est que nous avons besoin de ces résultats dans le corps de cet article, et qu'il faut bien démontrer les résultats utilisés. La seule originalité vient de ce qu'on étudie des équations avec mesure de Poisson. Il va sans dire que nous ne démontrons que le strict nécessaire (à ceci près que nous considérons le cas multi-dimensionnel, en vue d'un article à venir sur le calcul de Malliavin multidimensionnel).

1 - LES RESULTATS.

On suppose l'intervalle des temps fini, soit $[0,T]$. On part d'une base stochastique $(\Omega, \underline{F}, (\underline{F}_t)_{t\leq T}, P)$ et d'un espace mesurable auxiliaire $(E, \underline{E})$ muni d'une mesure positive σ-finie G. On se donne :

$$(A.1)\quad \begin{cases} W = (W^i)_{i\leq n} \text{ un brownien n-dimensionnel ;} \\ \mu \text{ une mesure de Poisson homogène sur } [0,T]\times E, \text{ de mesure intensité (ou} \\ \text{compensateur, ou projection prévisible duale) } \nu(dt\times dz) = dt\times G(dz). \end{cases}$$

On utilise les mêmes notations que dans le reste de l'article (cf. § 2) : $\underline{\underline{P}}$ est la tribu prévisible de $\Omega \times [0,T]$. Si $H = (H^i)_{i\leq n}$ est un processus prévisible convenable, on note $H\bullet W$ l'intégrale stochastique par rapport à W (qui sera toujours ici $\sum_{(i)} H^i\bullet W^i$), et on note $H\bullet t$ le processus intégral (vectoriel) défini par (2.2) lorsqu'il est bien défini.

Soit Λ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ on considère les "coefficients" suivants :

$$(A.2)\quad \begin{cases} A^\lambda = (A^{\lambda,i})_{i\leq d}, \ \underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{R}}}^d\text{-mesurable : } \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ B^\lambda = (B^{\lambda,ij})_{i\leq d, j\leq n}, \ \underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{R}}}^d\text{-mesurable : } \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^n \\ C^\lambda = (C^{\lambda,i})_{i\leq d}, \ \underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{R}}}^d\text{-mesurable : } \Omega\times[0,T]\times E\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \end{cases}$$

et on étudie l'équation suivante :

$$(A.3)\qquad X^\lambda = x + A^\lambda(X^\lambda_-)\bullet t + B^\lambda(X^\lambda_-)\bullet W + C^\lambda(X^\lambda_-)*(\mu-\nu)$$

où $x\in\mathbb{R}^d$ est fixé et où la solution $X^\lambda = (X^{\lambda,i})_{i\leq d}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Dans (A.3) il faudrait écrire $A^\lambda(\omega,t,X^\lambda_{t-}(\omega))$, etc...

(A.4) REMARQUE : On pourrait considérer une équation du type (A.3), mais faisant intervenir une famille finie (μ_α) de mesures de Poisson, de compensateurs ν_α :

$$X^\lambda = x + A^\lambda(X^\lambda_-)\bullet t + B^\lambda(X^\lambda_-)\bullet W + \sum_{(\alpha)} C^\lambda_\alpha(X^\lambda_-) * (\mu_\alpha-\nu_\alpha).$$

On aurait exactement les mêmes résultats que ceux qui suivent (on pourrait d'ailleurs ramener l'équation ci-dessus à (A.3)). ■

Commençons par énoncer un théorème d'existence et d'unicité (classique dans L^2). Pour cela, rappelons que pour tout processus H,

$$|H|^*_t(\omega) = \sup_{s\leq t}|H_s(\omega)| , \qquad |H|^* = |H|^*_T$$

(la "valeur absolue" d'un vecteur ou d'une matrice sera la somme des valeurs absolues de ses composantes). De même si U est une fonction sur $\Omega\times[0,T]\times E$ on pose

$$(A.5)\qquad |U|^*(\omega) = \sup_{s\leq T, z\in E} |U(\omega,s,z)|.$$

(A.6) THEOREME : *Soit* p *de la forme* $p=2^q$, *où* $q \in \mathbb{N}^*$. *Supposons qu'il existe une fonction strictement positive* ρ *sur* E *appartenant à* $L^2(G)\cap L^p(G)$, *avec :*

(*i*) $|A^\lambda(0)|^*$, $|B^\lambda(0)|^*$, $|\frac{1}{\rho}\, C^\lambda(0)|^*$ *sont dans* $L^p(P)$;

(*ii*) $A^\lambda(\omega,t,.)$, $B^\lambda(\omega,t,.)$, $C^\lambda(\omega,t,z,.)$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}^d$, *et les modules des dérivées* $|D_x A^\lambda|$, $|D_x B^\lambda|$, $|\frac{1}{\rho} D_x C^\lambda|$ *sont bornés uniformément en* ω,t,z,x.

Alors, l'équation (A.3) *admet une solution et une seule* X^λ, *qui vérifie* $|X^\lambda|^* \in L^p(P)$.

(A.7) REMARQUE : On aurait un résultat analogue pour tout $p \in [2,\infty[$, en utilisant une interpolation. Mais nous n'aurons l'usage que du cas p = 2, du cas p = 4, et du cas où les résultats sont vrais pour tout p réel dans $[2,\infty[$. ■

Passons à la dérivabilité : il s'agit de dérivabilité au sens de Fréchet, pour la topologie de la convergence uniforme en temps, dans L^p.

(A.8) DÉFINITION :

a) Une famille $(H^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de processus réels est L^p-dérivable en 0, de dérivée $DH = (DH^i)_{i\leq m}$, si

(i) $|H^\lambda|^*$ et $|DH|^*$ sont dans $L^p(P)$,

(ii) $E(|H^\lambda - H^0 - DH.\lambda|^{*p}) = o(|\lambda|^p)$ quand $\lambda \to 0$.

b) Une famille $(U^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fonctions réelles sur $\Omega \times [0,T] \times E$ est ρ-L^p-dérivable en 0, de dérivée $DU = (DU^i)_{i\leq m}$, si ρ est une fonction strictement positive sur E et si

(i) $|\frac{1}{\rho}U^\lambda|^*$ et $|\frac{1}{\rho}DU|^*$ sont dans $L^p(P)$,

(ii) $E(|\frac{1}{\rho}[U^\lambda - U^0 - DU.\lambda]|^{*p} = o(|\lambda|^p)$ quand $\lambda \to 0$. ■

Ces notions s'étendent de manière triviale aux processus ou fonctions multidimensionnels.

(A.9) <u>Hypothèse (Hp)</u>

a) $A^\lambda(\omega,t,.)$, $B^\lambda(\omega,t,.)$, $C^\lambda(\omega,t,z,.)$ sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}^d$ pour tous ω,t,z,λ, et deux fois dérivables pour $\lambda = 0$ et tous ω,t,z.

b) Il existe une constante $\zeta > 0$ et une fonction strictement positive ρ sur E appartenant à $L^2(G) \cap L^{2p}(G)$, telles que

(i) $|A^0(0)|^*$, $|B^0(0)|^*$, $|\frac{1}{\rho} C^0(0)|^*$ sont dans $L^{2p}(P)$;

(ii) $|D_x A^\lambda|$, $|D_x B^\lambda|$, $|\frac{1}{\rho} D_x C^\lambda|$, $|D^2_{x^2} A^0|$, $|D^2_{x^2} B^0|$, $|\frac{1}{\rho} D^2_{x^2} C^0|$ sont majorés par ζ uniformément en ω, t, z, x, λ.

(iii) $|A^\lambda(x) - A^0(x)|^*$, $|B^\lambda(x) - B^0(x)|^*$, $|\frac{1}{\rho}[C^\lambda(x) - C^0(x)]|^*$ sont majorés par $\zeta|\lambda|(1 + |x|)$ pour tous ω, x, λ.

(iv) $|D_x A^\lambda - D_x A^0|^*$, $|D_x B^\lambda - D_x B^0|^*$, $[|\frac{1}{\rho} D_x C^0]|^*$ sont majorés par $\zeta|\lambda|$ pour tous ω, x, λ.

c) Les familles de processus $\{A^\lambda(X^0_-)\}_{\lambda \in \Lambda}$ et $\{B^\lambda(X^0_-)\}_{\lambda \in \Lambda}$ sont L^p-dérivables en 0 ; il existe une fonction strictement positive ρ' sur E, appartenant à $L^2(G) \cap L^p(G)$, telle que la famille $\{C^\lambda(X^0_-)\}_{\lambda \in \Lambda}$ soit ρ'-L^p-dérivable en 0. ■

(A.10) THEOREME : *Soit* p *de la forme* $p = 2^q$ *, où* $q \in \mathbb{N}^*$ *. Supposons qu'on ait* (Hp) *. Alors pour chaque* $\lambda \in \Lambda$ *l'équation* (A.3) *a une solution et une seule* X^λ *, et la famille* $(X^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *est* L^p*-dérivable en* 0 *. Le processus dérivée* DX *est l'unique solution de l'équation linéaire*

$$\text{(A.11)} \qquad DX = [DA + D_x A^0(X^0_-).DX_-]\bullet t + [DB + D_x B^0(X^0_-).DX_-]\bullet W$$
$$+ [DC + D_x C^0(X^0_-).DX_-] * (\mu-\nu) .$$

Ainsi, comme d'habitude, (A.11) revient à dériver "naïvement" l'équation (A.3). Si on veut être plus précis, $DA^{i,k}$ représente "$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} A^{\lambda,i}(X^0_-)|_{\lambda=0}$" et de même pour $DB^{ij,k}$, $DC^{i,k}$, $DX^{i,k}$. L'équation (A.11) s'écrit alors

$$DX^{i,k} = [DA^{i,k} + \sum_{\ell \leq d} \frac{\partial}{\partial x_\ell} A^{0,i}(X^0_-)(DX^{k,\ell})_-]\bullet t$$
$$+ \sum_{j \leq n} [DB^{ij,k} + \sum_{\ell \leq d} \frac{\partial}{\partial x_\ell} B^{0,ij}(X^0_-)(DX^{k,\ell})_-]\bullet W^j$$
$$+ [DC^{i,k} + \sum_{\ell \leq d} \frac{\partial}{\partial x_\ell} C^{0,i}(X^0_-)(DX^{k,\ell})_-] * (\mu-\nu) .$$

(A.12) THEOREME : *Supposons que les coefficients soient de la forme*

$$(A.13)\qquad \begin{cases} A^{\lambda}(\omega,t,x) = A'^{\lambda}(\omega,t) + A''^{\lambda}(\omega,t).x \\ B^{\lambda}(\omega,t,x) = B'^{\lambda}(\omega,t) + B''^{\lambda}(\omega,t).x \\ C^{\lambda}(\omega,t,z,x) = C'^{\lambda}(\omega,t,z) + C''^{\lambda}(\omega,t,z).x \end{cases}$$

(donc $A'^{\lambda} = (A'^{\lambda,i})_{i\leq d}$ et $A''^{\lambda} = (A''^{\lambda,ik})_{i,k\leq d}$ et de même pour les autres coefficients).

Les conclusions du théorème (A.10) *sont valides si* $p = 2^q$ $(q\in\mathbb{N}^*)$ *dès qu'on a :*

(i) Il existe $\rho \in L^2(G)\cap L^{4p}(G)$ *avec* $|A'^0|^*$, $|B'^0|^*$, $|\frac{1}{\rho}C'^0|^* \in L^{4p}(P)$.

(ii) Il existe $\rho \in L^2(G)\cap L^{4p}(P)$ *avec* $|A''^{\lambda}|$, $|B''^{\lambda}|$, $|\frac{1}{\rho}C''^{\lambda}|$ *bornés uniformément en* ω,t,z,λ.

(iii) Il existe $\rho \in L^2(P)\cap L^{4p}(G)$ *tel que* $(A'^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, $(B'^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, $(A''^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, $(B''^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ *soient* L^{4p}*-dérivables en* 0 *et que* $(C'^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ *et* $(C''^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ *soient* ρ-L^{4p}*-dérivables en* 0.

2 - LES DEMONSTRATIONS

La base des démonstrations est le lemme suivant, inspiré de [1] pour la partie (c).

(A.14) LEMME : *Soit* $p = 2^q$ *avec* $q\in\mathbb{N}^*$. *Il existe une constante* β_p *ne dépendant que de* T *et de la dimension des processus ci-dessous, telle que*

a) H *processus mesurable* $\Rightarrow E[|\int_0 H_s\, ds|_t^{*\,p}] \leq \beta_p \int_0^t ds\, E(|H|_s^{*\,p})$

b) H *processus prévisible* $\Rightarrow E(|H\cdot W|_t^{*\,p}) \leq \beta_p \int_0^t ds\, E(|H|_s^{*\,p})$

c) H *processus prévisible*, U *fonction* $\underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{E}}$*-mesurable sur* $\Omega\times[0,T]\times E$, *et* $|U(\omega,t,z)|\leq|H_t(\omega)|\rho(z)$ *avec* $\rho\in L^2(G)\cap L^p(G)$ $\Rightarrow$

$$E(|U * (\mu-\nu)|_t^{*})^p \leq \beta_p[G(\rho^2)^{p/2} + G(\rho^p)]\int_0^t ds\, E(|H|_s^{*\,p}).$$

Démonstration. (a) est évident, et (b) découle des inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy, car $[H\cdot W, H\cdot W] = \sum_{i\leq n}(H^i)^2\cdot t$, et des inégalités de Hölder. Pour (c), on ne considèrera pas que le cas unidimensionnel. Soit $M = U * (\mu-\nu)$, qui existe dès que $E(|H|^{*2}) < \infty$ et $G(\rho^2) < \infty$. On a

$$(A.15)\qquad [M,M] = U^2 * \mu = N + U^2 * \nu$$

si $N = U^2 * (\mu-\nu)$. Donc $\langle M,M\rangle = U^2 * \nu$ et pour $p = 2$, (c) découle de l'inégalité de Doob (avec $\beta_2 = 2$).

Supposons (c) vraie pour $p = 2^q$, et soit $p' = 2^{q+1} = 2p$. D'après (c) appliqué à U^2 et à p, on a

$$E(|N|_t^{*p}) \leq \beta_p [G(\rho^4)^{p/2} + G(\rho^{2p})] \int_0^t ds\, E(|H|_s^{*\,2p}),$$

et (A.15) implique

$$[M,M]^p \leq 2^{p-1}|N|^p + 2^{p-1}(U^2 * \nu)^p \leq 2^{p-1}\{|N|^{*p} + [\int_0^{\cdot} |H_s|^2 ds\, G(\rho^2)]^p\}.$$

D'après l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy , il existe une constante c_p telle que

$$E(|M|_t^{*p'}) \leq c_p E([M,M]_t^p) \leq c_p 2^{p-1}\{\beta_p[G(\rho^4)^{p/2} + G(\rho^{2p})] \int_0^t ds\, E(|H|_s^{*2p})\}$$

$$+ G(\rho^2)^p T^{p/p-1} \int_0^t ds\, E(|H|_s^{*2p})\}$$

et on en déduit le résultat pour p', car il existe une constante γ indépendante de ρ telle que $G(\rho^4)^{p/2} + G(\rho^{2p}) \leq \gamma[G(\rho^2)^p + G(\rho^{2p})]$. ■

<u>Démonstration du théorème (A.6)</u> . Comme λ est fixé, on ne l'écrira pas. (ii) entraine que les coefficients de l'équation sont uniformément lipschitziens (au sens de [5] pour C), donc avec (i) on sait que cela entraine l'existence et l'unicité de la solution X. De plus X est la limite uniforme en t, dans L^2, de la suite X^m construite ainsi :

$$\text{(A.16)} \quad \begin{cases} X^0 = x \\ X^{m+1} = x + A(X^m_-)\cdot t + B(X^m_-)\cdot W + C(X^m_-) * (\mu-\nu) \end{cases}$$

En particulier, $|X^0|^* \in L^p$. Comme (i) et (ii) entrainent que $|A(x)|^*$, $|B(x)|^*$, $|\frac{1}{\rho}C(x)|^*$ sont dans L^p, et comme $X^0 = x$, une application du lemme (A.15) entraine que $|X^1|^* \in L^p$.

Soit α la borne intervenant dans la condition (ii) et

$$\gamma = \alpha^p \beta_p 6^{p-1} [2 + G(\rho^2)^{p/2} + G(\rho^p)],$$

où β_p figure dans (A.15). Soit $0 = s_0 < \ldots < s_r = T$ avec $s_{i+1} - s_i \leq 1/2\gamma$

Posons

$$Y_t^{m,i} = X_{t\vee s_i}^m - X_{t\vee s_i}^{m-1} - X_{s_i}^m + X_{s_i}^{m-1}$$

$$y_{m,i}(t) = E(|Y^{m,i}|_t^{*p}) \ , \quad x_{m,i} = E(|X^m - X^{m-1}|_{s_i}^{*p}).$$

D'après (A.3), on a

$$\text{(A.17)} \quad Y^{m+1,i} = [A(X_-^m) - A(X_-^{m-1})] \, 1_{]s_i,T]} \cdot t + [B(X_-^m) - B(X_-^{m-1})] \, 1_{]s_i,T]} \cdot W$$
$$+ [C(X_-^m) - C(X_-^{m-1})] \, 1_{]s_i,T]} * (\mu-\nu)$$

tandis que si $t > s_i$, on a

$$|A(X_{t-}^m) - A(X_{t-}^{m-1})| \leq \alpha \{|Y_{t-}^{m,i}| + |X_{s_i}^m - X_{s_i}^{m-1}|\} ,$$

et des majorations analogues pour B et C. Une application du lemme (A.15) entraine alors (car $|\sum_{1\leq i\leq 6} a_i|^p \leq 6^{p-1} \sum_{1\leq i\leq 6} |a_i|$), d'après (A.17) :

$$y_{m+1,i}(t) \leq 6^{p-1} \alpha^p \beta_p [2 + G(\rho^2)^{p/2} + G(\rho^p)] \left[\int_{s_i}^t y_{m,i}(s)\, ds + (t-s_i)x_{m,i}\right]$$

lorsque $t > s_i$. Donc

$$\text{(A.18)} \qquad y_{m+1,i}(s_{i+1}) \leq \frac{1}{2} y_{m,i}(s_{i+1}) + \frac{1}{4\gamma} x_{m,i}.$$

Remarquons enfin que, comme $|X^0|^*, |X^1|^* \in L^p$, on a $y_{1,i}(s_{i+1}) < \infty$, tandis que

$$\text{(A.19)} \qquad x_{m,0} = 0 \ , \quad x_{m,i+1} \leq 2^{p-1}(x_{m,i} + y_{m,i}(s_{i+1})).$$

En utilisant (A.18) et (A.19) on vérifie aisément, par récurrence sur i, que $\sum_{m\geq 1} x_{m,i} < \infty$. Comme $E(|X|^{*p} \leq 2^{p-1}(\sum_{m\geq 1} x_{m,r} + |x|^p)$, on a le résultat. ∎

On va démontrer maintenant le théorème (A.10) sous l'hypothèse (Hp), et aussi sous une autre hypothèse (H'p) légèrement différente, ce qui permettra d'obtenir (A.12) comme un corollaire.

Hypothèse (H'p) : La même chose que (Hp), sauf que dans (b) on impose $\rho \in L^2(G) \cap L^{4p}(G)$, et on remplace (i,iii,iv) de (b) par : il existe des variables Z^λ telles que $\sup_\lambda (E|Z^\lambda|^{4p}) < \infty$, et on a

(i) $|A^0(0)|^*$, $|B^0(0)|^*$, $|\frac{1}{\rho} C^0(0)|^*$ sont dans $L^{4p}(P)$;

(iii) $|A^\lambda(x) - A^0(x)|^*$, $|B^\lambda(x) - B^0(x)|^*$, $|\frac{1}{\rho} [C^\lambda(x) - C^0(x)]|^*$ sont majorés par $Z^\lambda|\lambda|\ (1+|x|)$ pour tous ω,x,λ;

(iv) $|D_x A^\lambda - D_x A^0|^*$, $|D_x B^0|^*$, $|\frac{1}{\rho}[D_x C^\lambda - D_x C^0(x)]|^*$ sont majorés par $Z^\lambda|\lambda|$ pour tous ω,x,λ. ∎

(A.20) LEMME : *Soit* $p = 2^q$, $q \in \mathbb{N}^*$, *et supposons* (Hp) *ou* (H'p) .

a) L'équation (A.3) *admet une solution et une seule* X^λ *, qui vérifie* $|X^\lambda|^* \in L^{2p}(P)$ *sous* (Hp), *et* $|X^\lambda|^* \in L^{4p}(P)$ *sous* (H'p).

b) On a $E(|X^\lambda - X^0|^{*2p}) = O(|\lambda|^{2p})$ *quand* $\lambda \to 0$.

<u>Démonstration</u> . a) découle de (A.6), en remarquant que d'après les conditions (i) et (iii) de (Hp) (resp. (H'p)) on a $|A^\lambda(0)|^*$, $|B^\lambda(0)|^*$, $|\frac{1}{\rho} C^\lambda(0)|^* \in L^{2p}$ (resp. L^{4p}).

b) Soit $x_\lambda(t) = E(|X^\lambda - X^0|_t^{*\,2p})$. On a

$$X^\lambda - X^0 = [A^\lambda(X_-^\lambda) - A^\lambda(X^0)] \cdot t + [B^\lambda(X_-^\lambda) - B^\lambda(X_-^0)] \cdot W + [C^\lambda(X_-^\lambda) - C^\lambda(X^0)] * (\mu-\nu)$$
$$+ [A^\lambda(X_-^0) - A^0(X_-^0)] \cdot t + [B^\lambda(X_-^0) - B^0(X_-^0)] \cdot W + [C^\lambda(X_-^0) - C^0(X_-^0)] * (\mu-\nu)$$

Soit $\beta = 6^{2p-1} \beta_p [2 + G(\rho^2)^p + G(\rho^{2p})]$. Les conditions (b-ii, iii) de (Hp) entrainent, grâce au lemme (A.15), que

$$x_\lambda(t) \leq [\beta\ \zeta^{2p} \int_0^t x_\lambda(s)\,ds + T\,\zeta^{2p}\ |\lambda|^{2p}\ E([1 + |X^0|^*]^{2p})] .$$

Si au contraire on a (H'p), il vient

$$x_\lambda(t) \leq \beta [\zeta^{2p} \int_0^t x_\lambda(s)\,ds + T|\lambda|^{2p}\ E([1 + |X^0|^*]^{2p}\ (Z^\lambda)^{2p})] .$$

Dans ce dernier cas, on applique l'inégalité de Hölder et (a), pour obtenir dans les deux cas une constante γ telle que

$$x_\lambda(t) \leq \gamma \int_0^t x_\lambda(s)\,ds + \gamma\ |\lambda|^{2p}$$

et on sait que $x_\lambda(t) < \infty$ pour tout t. Le lemme de Gronwall permet alors de conclure. ∎

Démonstration du théorème (A.10), sous (Hp) ou (H'p). On a vu que $|X^\lambda|^* \in L^{2p}(P)$. L'équation (A.11) est une équation du type (A.3), avec les coefficients (indépendants de λ) :

$$\tilde{A}(\omega,t,y) = DA(\omega,t) + D_x A^0(\omega,t,X^0_{t-}(\omega))\, y, \qquad y \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m,$$

et de même pour $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$. On a $\tilde{A}(0) = DA$ et $D_y\tilde{A}(y) = D_x A^0(X^0_-)$, et de même pour $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$, et donc (Hp-b,ii) et (Hp-c) impliquent que ces coefficients vérifient les hypothèses de (A.6) : donc l'unique solution DX de (A.11) vérifie $|DX|^* \in L^p(P)$.

Soit alors

$$Y^\lambda = X^\lambda - X^0 - DX.\lambda, \qquad y_\lambda(t) = E(|Y|^{*\,p}_t).$$

Il nous reste à montrer que $y_\lambda(T) = o(|\lambda|^p)$ quand $\lambda \to 0$. Mais on a

$$Y^\lambda = \xi^\lambda + \eta^\lambda + \phi^\lambda + \psi^\lambda,$$

où :

$$\xi^\lambda = D_x A^0(X^0_-)Y_- \bullet t + D_x B^0(X^0_-)Y_- \bullet W + D_x C^0(X^0_-)Y_- * (\mu-\nu)$$

$$\eta^\lambda = [A^\lambda(X^0_-) - A^0(X^0_-) - DA.\lambda] \bullet t + [B^\lambda(X^0_-) - B^0(X^0_-) - DB.\lambda] \bullet W$$
$$+ [C^\lambda(X^0_-) - C^0(X^0_-) - DC.\lambda] * (\mu-\nu)$$

$$\phi^\lambda = [D_x A^\lambda(\hat{X}^\lambda_-) - D_x A^0(X^\lambda_-)]\,(X^\lambda_- - X^0_-)\bullet t + [D_x B^\lambda(\tilde{X}^\lambda_-) - D_x B^0(\tilde{X}^\lambda_-)]\,(X^\lambda_- - X^0_-)\bullet W$$
$$+ [D_x C^\lambda(\check{X}^\lambda_-) - D_x C^0(\check{X}^\lambda_-)]\,(X^\lambda_- - X^0_-) * (\mu-\nu)$$

$$\psi^\lambda = [D_x A^0(\hat{X}^\lambda_-) - D_x A^0(X^0_-)]\,(X^\lambda_- - X^0_-)\bullet t + [D_x B^0(\tilde{X}^\lambda_-) - D_x B^0(X^0_-)]\,(X^\lambda_- - X^0_-)\bullet W$$
$$+ [D_x C^0(\check{X}^\lambda_-) - D_x C^0(X^0_-)\;(X^\lambda_- - X^0_-)] * (\mu-\nu)$$

où pour chaque (ω,t), les vecteurs $\hat{X}^\lambda(\omega,t)$, $\tilde{X}^\lambda(\omega,t)$, $\check{X}^\lambda(\omega,t)$ sont sur les segments d'extrémités $X^0(\omega,t)$ et $X^\lambda(\omega,t)$ (appliquer le formule des accroissements finis à $A^\lambda(X^\lambda_-) - A^\lambda(X^0_-)$, ...).

Soit $\beta = \beta_p\, 3^{p-1}\,[2 + G(\rho^2)^{p/2} + G(\rho^p)]$ et $\beta' = \beta_p\, 3^{p-1}[2 + G(\rho'^2)^{p/2} + G(\rho'^p)]$, où ρ et ρ' interviennent dans les conditions (b) et (c) de (Hp) ou (H'p). D'après le lemme (A.15) et la condition (b,ii), on a

(A.21) $$E(|\xi^\lambda|^{*\,p}_t) \le \beta\, \zeta^p \int_0^t y_\lambda(s)\, ds.$$

De même si

$$\tilde{Z}^\lambda = \mathrm{Max}\ \{|A^\lambda(X^0_-) - A^0(X^0_-) - DA.\lambda|^*\ ,\ |B^\lambda(X^0_-) - B^0(X^0_-) - DB.\lambda|^*,$$

$$|\tfrac{1}{\rho}.[C^\lambda(X^0_-) - C^0(X^0_-) - DC.\lambda]|^*\}\ ,$$

on a d'après (A.15) : $E(|\eta|^{*p}) \leq \beta' T\, E(|\tilde{Z}^\lambda|^p)$. La condition (c) implique que $E(|\tilde{Z}^\lambda|^p) = o(|\lambda|^p)$, donc

(A.22) $\quad E(|\eta^\lambda|^{*p}) = o(|\lambda|^p) \qquad$ si $\quad \lambda \to 0$.

D'après (A.15) et la condition (ii) de (Hp) ou (H'p), on a

(A.23) $\quad E(|\psi^\lambda|^{*p}) \leq \beta\, \zeta^p\, T\, E(|X^\lambda - X^0|^{*\,2p}) = O(|\lambda|^{2p}) = o(|\lambda|^p)$

car $|\hat{X}^\lambda - X^0|$, $|\tilde{X}^\lambda - X^0|$, $|\check{X}^\lambda - X^0|$ sont majorés par $|X^\lambda - X^0|$, et on peut appliquer (A.20,b).

Enfin la condition (iv) de (Hp) avec (A.15) et (A.20,b) entraine

$$E(|\phi^\lambda|^{*p}) \leq \beta\, T\, \zeta^p\, |\lambda|^p\, E(|X^\lambda - X^0|^{*p}) = o(|\lambda|^p),$$

tandis que si on a (iv) de (H'p), il vient

$$\begin{aligned} E(|\phi^\lambda|^{*p}) &\leq \beta\, T|\lambda|^p\, E(|X^\lambda - X^0|^{*p}\, (Z^\lambda)^p) \\ &\leq \beta\, T|\lambda|^p\, E(|X^\lambda - X^0|^{*2p})^{1/2}\, E(|Z^\lambda|^{2p})^{1/2} = o(|\lambda|^p). \end{aligned}$$

En rassemblant ceci avec (A.21), (A.22) et (A.23), on voit que

$$y_\lambda(t) \leq \beta\, \zeta^p \int_0^t y_\lambda(s)\, ds + \gamma(\lambda),$$

où $\gamma(\lambda) = o(|\lambda|^p)$. Comme $y_\lambda(t) < \infty$ pour tout t, le lemme de Gronwall donne le résultat. ■

Démonstration du théorème (A.12). Il suffit de montrer que les hypothèses impliquent (H'p). On peut choisir une fonction ρ qui convient pour (i), (ii) et (iii). La condition (Hp-a) est triviale, ainsi que (i) (resp.(ii) de (H'p-b), qui provient de (i) (resp. (ii) de (A.12)). Enfin, (Hp-c) et les conditions (iii) et (iv) de (H'p-b) découlent à l'évidence de (A.12-iii) : prennons l'exemple d'un des coefficients, soit A^λ ; on a $|X^0|^* \in L^{4p}(P)$ d'après le théorème (A.6), et (A''^λ) est L^{4p}-dérivable, donc $(A''^\lambda.X^0_-)$ est clairement L^{2p}-dérivable, donc $(A^\lambda.X^0_-))$ aussi. Par ailleurs si $\tilde{Z}^\lambda = |A''^\lambda - A''^0 - DA''.\lambda|^*$ on a

$$|D_x A^\lambda - D_x A^0|^* = |A''^\lambda - A''^0|^* \leq |\lambda|(|DA''|^* + \frac{\tilde{Z}^\lambda}{|\lambda|})$$

et (A.12,iii) entraine que $\sup_\lambda E(|Z^\lambda|^{4p}/|\lambda|^{4p}) < \infty$ et $|DA''|^* \in L^{4p}(P)$, donc A vérifie (H'p-b,iv) ; on montre de même qu'on a (H'p-b,iii). ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. BICHTELER : Stochastic integrators with stationary independent icrements. Z. für Wahr 58, 529-548, 1981.

[2] K. BICHTELER, D. FONKEN : A simple version of the Malliavin Calculus in dimension one. A paraître.

[3] J.M. BISMUT : Martingales, the Malliavin Calculus and Hypoellipticity under general Hörmander's conditions. Z.W. 56, 469-505, 1981.

[4] J.M. BISMUT : Calcul des variations stochastiques et processus de sauts. A paraître.

[5] J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales. Springer Lect. Notes in Math. 714, 1979.

[6] P. MALLIAVIN : Stochastic calculus of variations and hypoelliptic Operators. Conf. Stoch. Diff. Equa. Kyoto, 195-263, Wiley, 1978.

[7] P. MALLIAVIN : C^k-hypoellipticity with degeneracy ; Stochastic Analysis. (Friedman et Pinsky ed.) Acad. Press, 199-214, 1978.

[8] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba. X, Springer Lect. Notes in Math. 511, 245-400, 1976.

[9] P.A. MEYER : Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Séminaire Proba. XVI, Springer Lect. Notes in Math. 920, 95-132, 1982.

[10] D.W. STROOCK : Diffusion processes associated with Lévy generators. Z.W. 32, 209-244, 1975.

[11] D.W. STROOCK : The Malliavin calculus and its applications to second order parabolis differential equations. Math. Systems Theory, 14 (25-65) et 14 (141-171), 1981.

[12] D.W. STROOCK : The Malliavin Calculus and its applications. In "Stochastic integrals", Lect. Notes in Math. 851, 394-432, 1981.

[13] C. YOEURP, M. YOR : Espace orthogonal à une semi-martingale et applications. 1977 (non paru).

K. BICHTELER : Department of Mathematics
The University of Texas
AUSTIN, Texas, 78712 U.S.A.

J. JACOD : Département de Mathématiques
et Informatique
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX - FRANCE