

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

S. D. CHATTERJI

S. RAMASWAMY

## Mesures gaussiennes et mesures produits

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 570-580

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_570\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__570_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MESURES GAUSSIENNES ET MESURES PRODUITS.

S.D. Chatterji et S. Ramaswamy.

### §1. Introduction.

Les considérations de cette note ont comme origine la question élémentaire suivante : soit  $\gamma$  une mesure gaussienne non-singulière dans  $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ ; est-il vrai qu'il existe toujours une mesure de probabilité produit  $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \dots$  sur  $\mathbb{R}^\infty$  qui est équivalente à  $\gamma$  (en symboles,  $\nu \sim \gamma$ ) ? Si c'était ainsi, alors l'application d'un théorème bien connu de Kakutani sur l'équivalence ( $\sim$ ) et l'orthogonalité ( $\perp$ ) de deux mesures produits sur  $\mathbb{R}^\infty$ , nous donnerait immédiatement le théorème de Feldman-Hajék sur la dichotomie des mesures gaussiennes sur  $\mathbb{R}^\infty$  (et donc, en général; cf. [3] pour ces théorèmes) c.à.d. le fait que si  $\gamma_1, \gamma_2$  sont deux mesures gaussiennes quelconques sur  $\mathbb{R}^\infty$  alors ou bien  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  ou  $\gamma_1 \perp \gamma_2$ .

Malheureusement, nous constatons ici qu'il existe des mesures gaussiennes non singulières  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  qui sont orthogonales à toute mesure produit  $\nu$ ; les exemples de tels  $\gamma$  sont même très faciles à construire. D'autre part, nous donnons un exemple d'une mesure produit  $\nu$  qui est orthogonale à toute mesure gaussienne produit (et vraisemblablement orthogonale à toute mesure gaussienne, produit ou non — ce que nous pensons pouvoir vérifier bientôt). Nous montrons aussi que si une mesure gaussienne  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  est orthogonale à la mesure (gaussienne) produit formée des mesures marginales unidimensionnelles correspondantes alors  $\gamma$  est orthogonale à toute autre mesure gaussienne produit; nous ne savons pas si une telle mesure gaussienne  $\gamma$  est orthogo-

nale à toute mesure produit, gaussienne ou non ayant les marginales équivalentes à celles de  $\gamma$ . Néanmoins, nous savons (grâce à un exemple communiqué par M. V. Losert de l'Univ. de Vienne) qu'il existe des mesures  $\mu$  (non-gaussienne), orthogonale à la mesure produit formée par ses mesures marginales unidimensionnelles mais équivalente à une autre mesure produit ayant les marginales équivalentes à celles de  $\mu$ .

Plusieurs problèmes touchant aux questions d'équivalence et d'orthogonalité des mesures produits et gaussiennes restent ouvertes. Certains sont formulés explicitement (comme au-dessus) et certains autres se présenteront naturellement aux lecteurs à cause de la nature très incomplète de nos résultats. Une autre question plus importante qui reste posée et qui était, à l'origine, notre point de départ est celle-ci : si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux mesures de probabilité stables et symétriques dans  $\mathbb{R}^\infty$ , est-il vrai qu'il y a une dichotomie: ou bien  $\mu_1 \sim \mu_2$  ou  $\mu_1 \perp \mu_2$ ?

## §2. Les résultats.

Toutes les mesures dans  $\mathbb{R}^\infty$  ou  $\mathbb{R}^n$  seront définies sur les tribus boréliennes respectives. Si  $x = (x_j) \in \mathbb{R}^\infty$ , posons  $\pi_n(x) = x_n$  et  $\pi^{(n)}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ ; alors  $\pi_n : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\pi^{(n)} : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Une mesure  $\mu$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  s'appelle non-singulière si, pour tout  $n$ , la mesure marginale  $\pi^{(n)}\mu$  dans  $\mathbb{R}^n$  est équivalente à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ ; elle s'appelle gaussienne si, pour tout  $n$ , la mesure  $\pi^{(n)}\mu$  est une mesure gaussienne dans  $\mathbb{R}^n$ . Les mesures  $\mu_n = \pi_n\mu$  dans  $\mathbb{R}$  s'appellent les mesures marginales unidimensionnelles de  $\mu$ . Une mesure  $\nu$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  du type  $\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \dots$  où chaque  $\nu_j$  est une mesure dans  $\mathbb{R}$ , s'appelle une mesure

produit dans  $\mathbb{R}^\infty$ .

Proposition 1.

Il existe une mesure gaussienne non-singulière  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  qui est orthogonale à toute mesure de probabilité produit dans  $\mathbb{R}^\infty$ .

Démonstration :

Soit  $\eta_0, \eta_1, \dots$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de loi gaussienne standardisée  $N(0,1)$ , définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \Sigma, P)$ . Posons :  $\xi_n = \eta_0 + (1/n) \cdot \eta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; soit  $\gamma$  la mesure de probabilité induite dans  $\mathbb{R}^\infty$  par l'application  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ ,  $\xi(\omega) = (\xi_n(\omega))$ . Evidemment,  $\gamma$  est une mesure gaussienne non-singulière car les mesures marginales  $\pi^{(n)} \gamma$  sont des lois de  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , ces dernières étant clairement gaussiennes et non-singulières; la non-singularité se vérifie immédiatement du fait qu'une relation  $\sum_{i=1}^n c_i \xi_i = 0$  p.s. entraînerait  $c_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Montrons que  $\gamma$  est orthogonale à toute mesure de probabilité produit.

En effet, soit  $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \dots$  une mesure de probabilité produit dans  $\mathbb{R}^\infty$  et  $E \subset \mathbb{R}^\infty$  l'ensemble de tous les  $x = (x_n)$  t.q.  $\lim_n x_n$  existe et est un nombre fini. Comme  $E$  est un ensemble appartenant à la tribu asymptotique  $T$  de  $\mathbb{R}^\infty$  (c.à.d.  $T = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  où  $F_n$  est la tribu dans  $\mathbb{R}^\infty$  engendrée par toutes les fonctions  $\pi_k$ ,  $k \geq n$ ) la loi de tout ou rien (de Kolmogorov) donne que  $\nu(E) = 0$  ou  $1$ . D'autre part, comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \eta_0(\omega)$  (P) p.s., on a que  $\gamma(E) = 1$ . Ainsi, si  $\nu(E) = 0$  alors  $\nu \perp \gamma$ ; si, par contre,  $\nu(E) = 1$ , posons  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  pour  $x \in E$  et  $= \infty$  autrement.

Il est clair que  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est  $\mathcal{T}$  mesurable; donc par la même loi de tout ou rien,  $f$  est,  $\nu$  p.s., une constante c.à.d. il existe  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$  t.q. si  $F = \{x : f(x) = \alpha\}$  alors  $\nu(F) = 1$ . Mais,  $\gamma(F) = P\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \alpha\}$   
 $= P\{\omega : \eta_0(\omega) = \alpha\} = 0$   
 d'où l'on a encore que  $\nu \perp \gamma$ . C.Q.F.D.

Remarques :

(i) L'orthogonalité de la mesure gaussienne  $\gamma$  ci-dessus par rapport aux mesures de probabilité produits était facile à obtenir à cause du fait que la tribu asymptotique  $\mathcal{T}$  n'était pas triviale pour  $\gamma$ . Il doit être possible de construire des mesures  $\gamma$  comme dans la prop. 1 ayant la propriété que  $\mathcal{T}$  soit  $\gamma$ -triviale aussi.

(ii) Si dans la prop. 1, l'on n'exige pas que la mesure gaussienne  $\gamma$  soit non-singulière, alors la construction de  $\gamma$  devient encore plus banale. En effet, il suffit de prendre  $\gamma$  comme la mesure induite par une suite de variables aléatoires  $(\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$  où les  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  sont réparties selon une loi gaussienne quelconque. On utilisera le lemme élémentaire suivant pour ce raisonnement : si  $m$  est une mesure de probabilité non-atomique dans  $\mathbb{R}^2$ , concentrée sur le diagonal  $D = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ , alors  $m \perp m_1 \otimes m_2$  pour deux mesures de probabilités quelconques  $m_1, m_2$  dans  $\mathbb{R}$ .

Proposition 2.

Soit  $\gamma$  une mesure gaussienne quelconque dans  $\mathbb{R}^\infty$  t.q.

$\gamma \perp \gamma' = \gamma_1 \otimes \gamma_2 \otimes \dots$  où  $\gamma_n = \pi_n \gamma$  est la n-ième mesure marginale unidimensionnelle de  $\gamma$ . Alors  $\gamma$  est orthogonale à toute mesure gaussienne produit.

Démonstration :

Nous simplifions le problème en utilisant le lemme suivant qui ramène la mesure  $\gamma$  à un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^\infty$ . Ce lemme nous était communiqué par M. R.L. Karandikar de Indian Statistical Institute, Calcutta.

Lemme 1.

Soit  $m$  une mesure de probabilité quelconque dans  $\mathbb{R}^\infty$  t.q.  
 $\alpha_n = \int \pi_n^2 dm < \infty$  pour tout  $n = 1, 2, \dots$  (où  $\pi_n(x) = x_n$  si  $x = (x_j)$ ).  
 Alors, si  $I = \{j : \alpha_j = 0\}$  et  $E = \{x = (x_j) : x_j = 0 \text{ pour } j \in I \text{ et } \sum_{j \notin I} x_j^2 / (\alpha_j \cdot 2^j) < \infty\}$ , l'on a  $m(E) = 1$ .

La démonstration du lemme est immédiate à partir du fait que

$$\int \sum_{j \notin I} \pi_j^2 / (\alpha_j \cdot 2^j) dm = \sum_{j \notin I} 2^{-j} < \infty .$$

Comme  $E$  possède une structure hilbertienne naturelle (et évidente), les lemmes 1 et 2 qui suivent achèveront la démonstration de la proposition 2.

Introduisons d'abord les notations suivantes : soit  $H$  un espa-

ce hilbertien séparable (sur le corps  $\mathbb{R}$ ) et  $(e_n)_{n \geq 1}$  une base orthonormale dans  $H$ . Soit  $G$  l'ensemble des mesures gaussiennes dans  $H$ ; chaque mesure  $\gamma \in G$  est caractérisée par un vecteur  $a \in H$  (la moyenne) et un opérateur positif nucléaire  $A$  dans  $L(H)$  (l'opérateur de covariance). Nous écrirons,  $\gamma = N(a, A)$ . Si  $\gamma_1 = N(a_1, A_1)$  et  $\gamma_2 = N(a_2, A_2)$  alors il est bien connu que  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  si et seulement si  $(a_1 - a_2) \in \text{Im} A_2^{\frac{1}{2}}$  (ou  $\text{Im} A_1^{\frac{1}{2}}$ ) et s'il existe un opérateur symétrique inversible  $T$  dans  $L(H)$  t.q.  $T-I$  est de type Hilbert-Schmidt et  $A_1^{\frac{1}{2}} T A_1^{\frac{1}{2}} = A_2$ . (Pour ces faits concernant les mesures gaussiennes dans  $H$ , on peut consulter l'ouvrage [4] de Skorohod (1974), p. 14-18, p. 85-95). Par  $G_a$  nous notons les mesures  $\gamma = N(a, A)$  t.q.  $A$  soit diagonalisé par les éléments de la base  $e = (e_n)$  c.à.d.  $Ae_n = c_n e_n$ ,  $c_n \in \mathbb{R}$ ; une telle mesure gaussienne  $\gamma$  est caractérisée par le fait que les variables aléatoires  $\xi_n$ , définies sur l'espace de probabilité  $(H, \gamma)$  par  $\xi_n(x) = \langle x | e_n \rangle$ , sont stochastiquement indépendantes.

Avec ces notations, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.

Soit  $\gamma = N(a, A)$  une mesure gaussienne dans l'espace hilbertien séparable  $H$  de base orthonormale  $(e_n)$ . Supposons que  $Ae_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ . Pour qu'il existe une mesure gaussienne  $\nu \in G_a$  t.q.  $\gamma \sim \nu$ , il est nécessaire que

$$\sum_{i \neq j} \frac{|\langle Ae_i | e_j \rangle|^2}{\langle Ae_i | e_i \rangle \langle Ae_j | e_j \rangle} < \infty \quad \dots (1)$$

Aussi, si  $\gamma \sim \nu$  pour un  $\nu \in G_e$  alors  $\gamma \sim \gamma' \in G_e$  où  $\gamma' = N(a, A')$  avec

$$A' e_i = \langle A e_i | e_i \rangle \cdot e_i, \quad i \geq 1.$$

Démonstration du lemme 2 :

Soit  $\gamma \sim \nu \in G_e$  et  $\nu = N(a_1, A_1)$ ; par hypothèse,  $A_1 e_i = \lambda_i e_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_i \lambda_i < \infty$ . Comme  $\gamma \sim \nu$ , il existe un opérateur symétrique inversible  $T \in L(H)$  t.q.  $A_1^{\frac{1}{2}} T A_1^{\frac{1}{2}} = A$  et  $(T-I)$  est de type Hilbert-Schmidt. On en déduit sans peine que  $\ker(A) = \ker(A_1)$  d'où  $\lambda_i > 0$ ,  $i \geq 1$ ; aussi,

$$\begin{aligned} \langle A e_i | e_j \rangle &= \langle A_1^{\frac{1}{2}} T A_1^{\frac{1}{2}} e_i | e_j \rangle \\ &= \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle T e_i | e_j \rangle \end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned} T e_i &= \sum_j \langle T e_i | e_j \rangle e_j \\ &= \sum_j \frac{\langle A e_i | e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} e_j \end{aligned}$$

Comme  $\sum_i \|(T-I) e_i\|^2 < \infty$ , on aura

$$\sum_{i \neq j} \frac{|\langle A e_i | e_j \rangle|^2}{\lambda_i \lambda_j} < \infty \quad \dots (2)$$

et 
$$\sum_i \left| \frac{\langle A e_i | e_i \rangle}{\lambda_i} - 1 \right|^2 < \infty \quad \dots (3)$$



La relation (3) dit exactement que  $\nu \sim \gamma'$  (cf. [3], p. 174) ce qui démontre la dernière partie de l'affirmation du lemme 2. Donc  $\gamma \sim \gamma'$ ; en remplaçant  $\nu$  par  $\gamma'$  dans le raisonnement conduisant à (2) (et, donc, en remplaçant  $\lambda_i$  par  $\langle Ae_i | e_i \rangle$  dans ce dernier), on obtient (1). C.Q.F.D.

Conclusion de la démonstration de la proposition 2 :

Soit  $\gamma$  une mesure gaussienne dans  $\mathbb{R}^\infty$  ayant la propriété que  $\gamma \perp \gamma' = \gamma_1 \otimes \gamma_2 \otimes \dots$  avec  $\gamma_n = \pi_n \gamma$ . Les deux mesures gaussiennes sont portées par l'espace hilbertien  $E$  du lemme 1. Si  $\nu$  est une mesure gaussienne produit sur  $\mathbb{R}^\infty$  alors ou bien  $\nu(E) = 0$  et donc  $\gamma \perp \nu$  ou bien  $\nu(E) = 1$ ; dans ce dernier cas, si l'on prend la base orthonormale  $(e_n)_{n \in \mathbb{I}}$  (cf. définition de  $E$  dans le lemme 1) où  $e_n$  est le vecteur  $c_n(0, \dots, 1, 0, \dots)$ , 1 à la  $n$ -ième place, (et  $c_n \in \mathbb{R}$  t.q.  $\|e_n\| = 1$ ), l'on serait exactement dans la situation envisagée par le lemme 2. Donc, si  $\gamma \sim \nu$  alors  $\gamma \sim \gamma'$ , une contradiction. Par le théorème de dichotomie de Feldman-Hajék, on conclut que  $\gamma \perp \nu$ .

C.Q.F.D.

Nous ne savons pas si une mesure gaussienne  $\gamma$  comme dans la proposition 2 est aussi orthogonale à toute mesure produit  $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \dots$  telle que  $\nu_n \sim \gamma_n$ . Ceci n'est certainement pas vrai si  $\gamma$  n'est pas gaussienne comme montre l'exemple suivant dû à M. V. Losert :

Exemple :

Pour simplifier, on va considérer les mesures dans  $X = \{0,1\}^\infty$ ; prenons  $\lambda = \otimes \lambda_n$  avec  $\lambda_n(\{0\}) = \lambda_n(\{1\}) = \frac{1}{2}$  et  $\mu = f \cdot \lambda$ ,  $f > 0$  p.p. ( $\lambda$ ),

$\int f d\lambda = 1$ . Alors  $\mu \sim \lambda$ ; nous allons voir que si  $f$  est choisie adéquatement alors  $\mu \perp \bigotimes_n \mu_n$  où  $\mu_n = \pi_n \mu$ . En effet, si  $q_n = \mu_n(\{0\}) = \int_{\{x: \pi_n(x)=0\}} f d\lambda$ ,

il suffit d'avoir  $\sum_n (q_n - \frac{1}{2})^2 = \infty$  pour que  $\lambda \perp \bigotimes_n \mu_n$ ; c'est un corollaire d'un théorème de Kakutani déjà mentionné et souvent redécouvert (cf. par ex. [1] et [3]). Aussi,  $\lambda_n \sim \mu_n$  dès que  $0 < q_n < 1$ ; on aura alors  $\mu \perp \bigotimes_n \mu_n$  mais  $\mu \sim \bigotimes_n \lambda_n$  avec  $\lambda_n \sim \mu_n$ .

Pour la construction de  $f$ , posons

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x : \pi_1(x) = 1\}, \\ A_n &= \{x : \pi_n(x) = 1, \pi_j(x) = 0, 1 \leq j < n\} \\ f &= \sum_n \alpha_n \cdot 1_{A_n}, \quad \alpha_n = c \cdot 2^n \cdot n^{-3/2}, c \cdot \sum_n n^{-3/2} = 1. \end{aligned}$$

Comme les  $A_n$  sont disjoints et  $\lambda(\bigcup_n A_n) = 1$ , on a que  $f > 0$  p.p. ( $\lambda$ ); aussi  $\int f d\lambda = 1$ . De plus,

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_n \alpha_n \cdot \int_{\{x: \pi_k(x)=0\}} 1_{A_n} d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n \cdot 2^{-n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) c \cdot \sum_{n=1}^{k-1} n^{-3/2} + c \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} \\ &= (c/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} + (c/2) \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} - (c/2) k^{-3/2} \\ &\sim \left(\frac{1}{2}\right) + ck^{-\frac{1}{2}} - (c/2) k^{-3/2} \end{aligned}$$

d'où  $\sum_k (q_k - \frac{1}{2})^2 = \infty$ .

Proposition 3.

Il existe une mesure de probabilité  $\nu = m \otimes m \otimes \dots$  où  $m$  est une mesure de probabilité dans  $\mathbb{R}$  de la forme  $m(dx) = p(x)dx$ ,  $p(x) > 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ , telle que  $\nu$  est orthogonal à toute mesure gaussienne produite.

Démonstration :

Pour une mesure  $\mu$  quelconque dans  $\mathbb{R}^{\infty}$ , posons  $E(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^{\infty} : \mu \sim \mu_x\}$  où  $\mu_x(A) = \mu(A-x)$ . Il est clair que  $E(\mu)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}^{\infty}$  et que si  $\mu \sim \nu$  alors  $E(\mu) = E(\nu)$ .

Dans [2], l'on trouve une mesure de probabilité  $\nu$  du type demandé telle que  $E(\nu) = \mathcal{L}^1$ . Mais, si  $\gamma = \otimes \gamma_n$ ,  $\gamma_n = N(\alpha_n, \sigma_n^2)$  alors l'on sait que  $E(\gamma) = \{x = (x_n) : \sum_n |x_n/\sigma_n|^2 < \infty\}$  (on peut supposer que  $\sigma_n^2 > 0$ ; autrement,  $\nu \perp \gamma$  trivialement; pour  $E(\gamma)$  cf [3] p. 174). Un raisonnement élémentaire montre que ce dernier ensemble ne peut jamais être égal à  $\mathcal{L}^1$ . Donc  $\nu$  n'est pas équivalente à  $\gamma$ ; mais comme il s'agit des mesures de probabilité produits, le théorème de Kakutani mentionné déjà donne que  $\nu \perp \gamma$ . C.Q.F.D.

Références.

- [1] Chatterji, S.D. Certain induced measures and fractional dimensions of their "support". Z.W. 3 (1964), 184-192.

- [2] Chatterji, S.D. et Mandrekar, V. Quasi-invariance of measures under translations. *Math. Zeit.* 154 (1977), 19-29.
- [3] Chatterji, S.D. et Mandrekar V. Equivalence and singularity of Gaussian measures and applications. *Probabilistic analysis and related topics*, vol. 1 (Ed. A.T. Bharucha-Reid) Academic Press, N.Y. (1978), 169-197.
- [4] Skorohod, A.V. *Integration in Hilbert space*. Springer-Verlag, Berlin (1974).

Département de Mathématiques	Tata Institute of Fundamental
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne	Research
61, av. de Cour	School of Maths.
1007 Lausanne	Colaba, Bombay (400005)
Suisse	Inde