SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SIMONE CHEVET

Topologies métrisables rendant continues les trajectoires d'un processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 544-569

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__544_0>

TOPOLOGIES METRISABLES RENDANT CONTINUES LES TRAJECTOIRES D'UN PROCESSUS

par S. CHEVET

Le but de cet exposé est de présenter certains résultats de TSIRELSON ([10], [11]) sur les réalisations naturelles d'un processus réel et donc sur l'existence de métriques séparables sur l'espace des temps rendant continues les trajectoires du processus.

Cette étude a permis de donner de nouvelles propriétés sur les processus gaussiens et plus généralement sur les processus définis à partir d'une suite de variables indépendantes. On peut trouver aussi dans [9] une application aux séries lacunaires.

§ 1. Préliminaires

Dans tout ce qui suit Σ est un processus réel, c'est-à-dire une application d'un ensemble T dans un L^0 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Une réalisation de Σ est une application ξ de Ω dans $\mathbb{R}^T$ telle que, pour tout t de T, l'application coordonnée $\omega \to \xi(\omega)(t)$ est un élément de la P-classe $\Sigma(t)$. Les trajectoires de ξ sont les éléments $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire les fonctions réelles sur T, $t \to \xi(\omega)(t)$, $\omega \in \Omega$. Dans ce papier on ne différentiera pas deux réalisations P-indistinguables de Σ, c'est-à-dire deux réalisations ξ_1 et ξ_2 de Σ telles que $\{\omega\ ;\ \xi_1(\omega) \neq \xi_2(\omega)\}$ est P-négligeable.

<u>Définition</u> (1.1).- On dira que le processus Σ a une <u>réalisation naturelle</u> sur T s'il existe une distance <u>séparable</u> ρ sur T et une réalisation ξ de Σ à trajectoires continues sur (T, ρ) :

$$\forall \omega \in \Omega \quad , \quad \xi(\omega) \in \mathcal{C}(T, \rho).$$

(une distance est dite séparable si (T, d) est un espace topologique séparable).

ρ sera appelée distance associée à ξ .

On peut noter que ρ n'est pas unique car, si ρ_1 est une autre distance séparable sur T , $\rho + \rho_1$ est aussi une distance séparable sur T rendant continues les trajectoires de ξ .

Si C est une partie non vide de L^0 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dira que C est un <u>ensemble naturel</u> si le processus canonique $C \to L^0$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qu'il définit admet une réalisation naturelle.

<u>Premières propriétés</u>

(1.1) <u>Une réunion dénombrable d'ensembles naturels de</u> L^0 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ <u>est un ensemble naturel</u>.

Plus généralement si $(K_n)_n$ est une suite de parties de T de réunion T telle que pour tout n , $\Sigma \mid K_n$ admet une réalisation naturelle ξ_n sur K_n , alors Σ admet une réalisation naturelle sur T. En effet, en se ramenant au cas où les K_n sont disjoints 2 à 2 et en notant ρ_n une distance sur K_n associée à ξ_n ,

$$\rho(s, t) = \begin{cases} \dfrac{\rho_n(s, t)}{1 + \rho_n(s, t)}, & \text{si } s, t \in K_n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (s, t \in T)$$

définit une distance séparable sur T et Σ admet une réalisation à trajectoires ρ-continues.

<u>Exemple</u> (1.1).- Si $(\xi_n)_n$ est une suite de variables aléatoires réelles sur un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'application

$$\Sigma : (a_n)_n \longrightarrow \sum_n a_n \xi_n$$

de $\mathbb{R}_o^{N}$ dans L^0 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admet une réalisation naturelle car, trivialement, Σ admet une réalisation naturelle sur chacun des ensembles

$C_n := \{a \in \mathbb{R}_o^{\mathbb{N}} \ ; \ a_i = 0 \text{ si } i > n \ ; \ |a_i| \leqslant n \text{ si } i \leqslant n\}$.

On rappelle que, si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé de Radon[(1)], une partie

---

[(1)] C'est-à-dire Ω est un espace topologique séparé, P une probabilité de Radon sur Ω et $\mathcal{F}$ la tribu P-complétée de la tribu borélienne de Ω.

C de L^0 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dite <u>équi-Lusin-mesurable</u> si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de Ω de P-mesure supérieure à $1-\varepsilon$ telle que chaque f de C admet un représentant continu sur K_ε. On peut supposer K_ε P-<u>plein</u>, c'est-à-dire pour tout x de K_ε et tout voisinage ouvert V de x , $P(K_\varepsilon \cap V) > 0$.

(1.2) <u>Si Σ admet une réalisation naturelle ξ et si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé de Radon, alors $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T$ est P-Lusin mesurable et la loi de Σ se prolonge en une probabilité de Radon sur $\mathbb{R}^T$ portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables</u>.

En effet, si (T, ρ) est un espace métrique séparable, il existe une topologie métrisable séparable (non vectorielle) τ sur l'ensemble $\mathcal{C}(T, \rho)$ des fonctions continues sur (T, ρ) telle que :

(i) l'injection $\mathcal{C}(T, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}^T$ est continue ;

(ii) la tribu de Baire (ou borélienne) sur $\mathcal{C}_\tau(T, \rho)$ coïncide avec la tribu trace de la tribu produit sur $\mathbb{R}^T$.

En fait, si $(U_n)_n$ est une base dénombrable d'ouverts de T , la topologie τ est définie par la distance

$$\delta(f,g) = \sup \frac{1}{2^n} \left(|\psi'_n(f) - \psi'_n(g)| + |\psi''_n(f) - \psi''_n(g)|\right) \qquad (f,g \in \mathcal{C}(T,\rho))$$

où

$$\psi'_n(f) = \inf_{x \in U_n} \operatorname{Arctg} f(x) \ , \quad \psi''_n(f) = \sup_{x \in U_n} \operatorname{Arctg} f(x).$$

Par suite, si ρ est une distance séparable sur T associée à ξ , ξ définit une application P-Lusin mesurable de Ω dans $\mathcal{C}_\tau(T, \rho)$. Ce qui implique (1.2).

<u>Remarque</u> (1.1).- Σ admet une réalisation ξ P-Lusin mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^T$ si et seulement si $\Sigma(T)$ est équi-Lusin-mesurable.

<u>Remarque</u> (1.2).- On a une réciproque de (1.2). Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilis de Radon avec P portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, si, sur T, il existe une distance séparable d et si Σ admet une réalisation ξ P-Lusin mesurab alors ξ est naturelle (à l'indistinguabilité près).

En effet, il existe une suite croissante $(K_n)_n$ de compacts métrisables de Ω telle que $\xi \mid K_n$ est continue de K_n dans $\mathbb{R}^T$ et $P(\bigcup_n K_n) = 1$. Il suffit de considérer l'écart $\rho + d$ où

$$\rho(t, s) = \sup_n \frac{1}{2^n} \operatorname{Arctg}_{\omega \in K_n} |\xi(\omega)(t) - \xi(\omega)(s)| \qquad (s, t \in T).$$

ρ est une distance si Σ est injective.

Noter que, puisque l'on peut choisir les K_n pleins, on peut exiger de ρ qu'elle vérifie la propriété suivante :

(P) "pour tout réel $a \geqslant 0$, $\{(t,s) \in T \times T \; ; \; \rho(t,s) \leqslant a\}$ est fermé dans $(T,\tau) \times (T,\tau)$ où τ est la topologie induite de la topologie de la convergence en probabilité par l'application Σ ".

<u>Exemple</u> (1.2).- Soit $(\xi_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que

$$P(\xi_k = 0) = 1 - p_k \quad , \quad P(\xi_k = 1) = p_k$$

où $0 < p_k$ $(k \geqslant 0)$, $\sum_k p_k < +\infty$. Alors, pour tout $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum_i a_i \xi_i$ converge (en probabilité) et le processus

$$\Sigma : (a_n)_n \longrightarrow \sum_i a_i \xi_i$$

sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une réalisation naturelle.

Noter qu'il existe des processus n'admettant pas de réalisation naturelle ; il suffit de considérer le processus de Poisson standard sur $[0, 1]$.

§ 2. <u>Propriétés générales</u>

On supposera dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un <u>espace de Lebesgue</u> au sens de Rohlin [5] , i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est isomorphe mod. 0 à $([0,1] , \mathcal{B}^\lambda , \lambda)$ où λ est une probabilité sur $[0, 1]$ et $\mathcal{B}^\lambda$ la tribu λ-complétée de la tribu borélienne sur $[0,1]$. Il est bien connu que, si Ω est un espace topologique séparé, P une probabilité de Radon sur Ω portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables et $\mathcal{F}$ la tribu P-complétée de la tribu borélienne sur Ω , alors $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de Lebesgue.

On ne considérera que des espaces des temps T sur lesquels il existe une distance séparable.

Théorème (2.1) (de caractérisation).- Soit $C \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et μ la probabilité sur $\mathbb{R}^C$ (muni de sa tribu produit) induite par le processus canonique $C \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) C est un ensemble naturel ;

(a') tout processus $\Sigma : T \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $\Sigma(T) \subset C$ admet une réalisation naturelle ;

(b) μ se prolonge en une probabilité de Radon $\overline{\mu}$ sur $\mathbb{R}^C$ portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables ;

(c) il existe $\varphi : C \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable tels que

$$\forall \eta \in C \quad , \quad \varphi(\eta) \circ \alpha \in \eta \ ;$$

(d) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A dans $\mathcal{F}$ tel que $P(A) \geqslant 1 - \varepsilon$ et $\{\eta \ 1_A \ ; \ \eta \in C\}$ est une partie séparable de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

(e) il existe $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ de P-mesure un, σ_1 une métrique séparable sur Ω_1 et λ une probabilité borélienne sur (Ω_1, σ_1) telles que P est la complétée de λ et telles que tout η de C coïncide presque sûrement sur Ω_1 avec une fonction continue sur Ω_1.

De plus, si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est aussi un espace probabilisé de Radon, ces assertions sont équivalentes à :

(f) C est équi-P-Lusin-mesurable.

Preuve .- Vu les propriétés des espaces de Lebesgue, on peut supposer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est égal à $([0,1], \mathcal{B}^\lambda, \lambda)$ avec λ une certaine probabilité borélienne sur $[0,1]$.

(a) $\Longleftrightarrow$ (a') $\Longleftrightarrow$ (f), grâce à (1.2) et aux remarques (1.1) et (1.2).

(e) $\Longrightarrow$ (f) trivialement.

(f) $\Longrightarrow$ (e) : soit $(K_n)_n$ une suite de compacts de $[0,1]$ disjoints 2 à 2 telle que $P(\bigcup_n K_n) = 1$ et telle que, pour tout n, tout η de C coïncide p.s. sur K_n avec une fonction continue sur K_n. (e) s'obtient aisément en prenant $\Omega_1 = \bigcup_n K_n$ et

$$\sigma_1 (\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_1,\ \omega_2 \text{ non dans un même } K_n \\ |\omega_1-\omega_2| , & \text{sinon} \end{cases}$$

(e) $\Longrightarrow$ (c) : soit $(K_n)_n$ une suite de compacts de (Ω_1,σ_1) disjoints 2 à 2 tels que $P(\bigcup_n K_n) = 1$ et tels que les restrictions à chaque K_n de l'application identique de Ω_1 dans $[0,1]$ soit continue.

Posons

$$\alpha(\omega) = \omega + 2n \quad \text{si} \quad \omega \in K_n ;$$

α est une application continue injective de l'ensemble fermé de $\mathbb{R}$ $\bigcup_n (K_n + 2n)$ dans (Ω_1, σ_1). Soit $\eta \in C$ arbitraire ; soit $\tilde{\eta}$ un élément de η continu sur (Ω_1,σ_1) ; alors $\varphi = \tilde{\eta} \circ \alpha^{-1}$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ et

$$\tilde{\eta}(\omega) = \varphi(\alpha(\omega)) \quad \text{p.s.}$$

(c) $\Longrightarrow$ (b), car la loi du processus est l'image de la probabilité $\alpha^{-1}(P)$ sur $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \longrightarrow (\varphi(\eta)(t))_{\eta \in C}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^C$.

(b) $\Longrightarrow$ (d). Soit les fonctions coordonnées $\tilde{\eta}$ sur $\mathbb{R}^C$ associées au $\eta \in C$:

$$\tilde{\eta}(\omega) = \omega(\eta) \qquad (\omega \in \mathbb{R}^C,\ \eta \in C).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire ; alors il existe un compact métrisable K de $\mathbb{R}^C$ tel que $\mu(K) \geqslant 1 - \varepsilon$. On peut trouver une suite $(\eta_n)_n$ d'éléments de C et un borélien B_o de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\tilde{B} := \{a \in \mathbb{R}^C ;\ (\tilde{\eta}_n(a))_n \in B_o\}$$

contient K et a même mesure que K. Comme K est métrisable et $\{\tilde{\eta}\, 1_K ;\ \eta \in C\} \subset \mathscr{C}(K)$, $\{\tilde{\eta}\, 1_{\tilde{B}} ;\ \eta \in C\}$ est une partie séparable de $L^\infty(\mathbb{R}^C ; \bar{\mu})$. Si

$$B := \{\omega \in \Omega ;\ (\eta_n(\omega))_n \in B_o\},$$

alors on peut vérifier que $\{\eta\, 1_B ;\ \eta \in C\}$ est une partie séparable de $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

(d) $\Longrightarrow$ (f), car toute partie séparable de $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est équi-Lusin-mesurable $\square$

<u>Remarque</u> (2.1).- Vu la remarque (1.2), on peut remplacer "Σ admet une réalisation naturelle" par : "il existe une métrique séparable ρ sur T et une réalisation de Σ à trajectoires ρ-Lipschitziennes". Par contre, dans (e), on ne peut remplacer "η coïncide p.s. sur Ω_1 avec une fonction σ_1-continue sur Ω_1" par "η coïncide p.s. sur

Ω_1 avec une fonction σ_1-Lipschitzienne". Si Σ est gaussien, la nouvelle condition (e), soit (e'), est équivalente à "$\Sigma(T)$ est réunion dénombrable de G.C. ensembles (ou, ce qui revient au même, de parties équimesurables au sens de Grothendieck)" ; mais il est bien connu qu'un G.B. ensemble disqué, qui n'est pas un G.C. ensemble, ne peut être réunion dénombrable de G.C. ensembles. Or on verra qu'un G.B. ensemble est un ensemble naturel ; donc (e) et (e') ne sont pas équivalentes.

Remarque (2.2).- Soit $C \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que, pour toute partie dénombrable D de C , on ait

$$P\left(\sup_{\alpha \in D} |\alpha| < +\infty\right) = 0 \text{ ou } 1.$$

On déduit aisément de l'assertion (d) que, si C est un ensemble naturel, C est réunion dénombrable de parties latticiellement bornées de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Mais il existe des ensembles naturels qui ne sont pas réunion dénombrable de parties latticiellement bornées ; il suffit de considérer l'exemple (1.2) et de noter que les parties A de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\Sigma(A)$ soit latticiellement bornée sont relativement compactes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Terminons ce paragraphe par la donnée de quelques propriétés des réalisations naturelles.

Proposition (2.1).- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Lebesgue et $\Sigma : T \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus admettant une réalisation naturelle ξ. Alors :

(1) $\{\omega \; ; \xi(\omega)(t) = \xi(\omega)(t') , \forall (t, t') \ni \Sigma(t) = \Sigma(t')\}$ est de P-mesure un.

(2) Deux réalisations naturelles de Σ sont indistinguables.

(3) Pour tout borélien B de $\mathbb{R}^T$, $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

(4) Si T est un espace vectoriel et si Σ est linéaire, alors, pour presque tout ω, $\xi(\omega) \in T^*$.

(5) Si T est muni d'une tribu $\mathcal{G}$ et si $\Sigma : (T, \mathcal{G}) \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est mesurable, alors $\xi(\omega)(t)$ est mesurable simultanément par rapport aux deux variables ω et t.

(6) Si T est muni d'une métrique complète d, si Σ est continu en probabilité, alors il existe $T_o \subset T$ maigre tel que ξ a ses trajectoires continues sur $(T \setminus T_o, d)$.

(7) Si T est muni d'une métrique séparable d et si Σ est continu en probabilité sur (T, d) alors ξ est d-séparable.

Preuve.- Comme dans le théorème (2.1), on peut supposer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un $([0,1], \mathcal{B}^\lambda, \lambda)$.

(1), (2), (3), (4) sont immédiates puisque $\xi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^T$ est P-Lusin mesurable.

(5) : soit K un compact métrisable plein de Ω de mesure proche de un tel que ξ soit continu sur K. Définissons $J_n : L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\int_K \exp(-n\ |\omega - \omega'|) \operatorname{Arctg}(g(\omega') - J_n(g, \omega))\, dP(\omega') = 0$$

$(g \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P), \omega \in K)$; alors J_n est continue de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \times K$ dans $\mathbb{R}$ et donc $\xi_n(\omega, t) = J_n(\Sigma(t), \omega)$ est mesurable sur $(T \times K, \mathcal{G} \otimes \mathcal{F})$. D'où (5), car $\xi(\omega)(t) = \lim\limits_n \xi_n(\omega, t)$.

(6) D'après la remarque (1.2), on peut supposer que "la" distance ρ associée à la réalisation naturelle ξ vérifie la propriété suivante :

(P) : "pour tout $a > 0$, $\{(t,s) \in T \times T\ ;\ \rho(t,s) \leqslant a\}$ est fermé dans $(T,d) \times (T,d)$".

Soit $\{t_n\ ;\ n \geqslant 1\}$ une partie dénombrable de T dense dans (T, ρ) ; soit, pour tous entiers $\ell \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, V_n^ℓ la ρ-boule fermée de rayon $1/\ell$ et de centre t_n et U_n^ℓ l'intérieur de V_n^ℓ pour la distance d. Alors, par la théorème de Baire,

$$T_o = T \setminus \bigcap_\ell \Big(\bigcup_n U_n^\ell\Big)$$

est un ensemble maigre et $T \setminus T_o$ est dense dans T. Mais, en tout point t de $T \setminus T_o$, toute fonction ρ-continue est d-continue. D'où (6).

(7) Soit ρ la distance définie par la réalisation naturelle ξ ; alors la distance $\rho_1 = \rho + d$ est séparable et ξ à trajectoires continues sur (T, ρ_1). Par suite ξ est d-séparable $\square$

Remarque (2.3).- Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé de Radon arbitraire, les propriétés (1), (2), (3), (4) sont encore vraies.

Proposition (2.2).- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Lebesgue et $\Sigma : T \to L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus. Si $\tilde{\Sigma}$ est le symétrisé de Σ, Σ admet une réalisation naturelle si et seulement si $\tilde{\Sigma}$ en admet une.

Par définition, le symétrisé $\tilde{\Sigma}$ de Σ est l'application $\tilde{\Sigma}$ de T dans $L^0 (\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, P \otimes P)$ qui à $t \in T$ fait correspondre la $P \otimes P$ - classe de $(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \xi(\omega_1)(t) - \xi(\omega_2)(t)$, où ξ est une réalisation arbitraire de Σ.

La preuve de la proposition (2.9) utilise la notion de fonction canonique au sens de Ito-Saks, [3]. Faisons donc quelques rappels sur les fonctions canoniques:

(a) Soit n un entier $\geqslant 1$ arbitraire et λ_n la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^n$; si A est une partie mesurable de $]0,1[^n$, on dit que x est un point de densité de A si

$$\frac{1}{(2r)^n} \lambda_n ([x-r, x+r]^n \cap A) \longrightarrow 1 \text{ , quand } r \overset{>}{\to} 0 .$$

La topologie de densité τ_d sur $]0,1[^n$ est la topologie dont les ouverts non vides sont les parties A de $]0,1[^n$ dont tout point est un point de densité de A. Cette topologie est plus fine que la topologie usuelle sur $]0,1[^n$; et, pour tout x de $]0,1[^n$, la famille de toutes les parties A de $]0,1[^n$ telles que $x \in A$ et que x soit un point de densité de A est une base de voisinages de x pour cette topologie ; en fait, si K est une partie mesurable de $[0,1]$ avec $\lambda_n (K) > 0$, alors il existe un τ_d-ouvert contenu dans K et de même mesure que K.

(b) Soit F dans $L^0 [0,1]^n$ et $f \in F$. Si $t \in]0,1[^n$ on dit que $\tilde{F}(t)$ est défini et égal à $a \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, t est un point de densité de $\{u \ ; \ |f(u)-a| \leqslant \varepsilon\}$; autrement dit si $\tilde{F}(s)$ admet une limite égale à a quand $s \to t$ pour τ_d. Il est trivial que $\tilde{F}$ ne dépend pas du représentant f dans la classe F ; et il est bien connu que $\tilde{F}$ est défini presque partout et appartient à la classe F. $\tilde{F}$ est appelée fonction canonique associée à F.

On vérifie aisément que :

(1) Si A est une partie équi-Lusin-mesurable de $L^0 ([0,1]^n , \lambda_n)$, alors il existe $\Omega_1 \subset [0,1]$ de λ_n-mesure un sur lequel tous les $\tilde{f}$, $f \in A$ sont définis.

(2) Si $f \in L^\infty([0,1]^n)$, $||f||_{L^\infty}$ est égale à la borne supérieure des valeurs de $\tilde{f}$ sur son ensemble de définition.

<u>Preuve de la proposition</u> (2.2). (Esquisse).- On se ramène au cas où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ n'est autre que l'espace de Lebesgue $([0,1]\ , dx)$. Il suffit de vérifier que, si C est une partie équi-Lusin-mesurable de $L^0([0,1], d^2x)$,

$C_1 := \{\eta_1 \in L^0\ [0,1],\ \exists\, \eta_2 \in L^0\ [0,1]\ :\ \eta_1 \oplus \eta_2 \in C\}$ est équi-Lusin-mesurable.

Ici $\eta_1 \oplus \eta_2\, (\omega_1, \omega_2) = \eta_1(\omega_1) + \eta_2(\omega_2)$.

Par (1), il existe $A_o \subset [0,1]^2$ de $P \otimes P$-mesure un sur lequel tous les $\tilde{\eta}$, $\eta \in C$ sont définis. Soit

$$A_1 = \{\omega_1\ ;\ P\{\omega_2\ ;\ (\omega_1,\omega_2) \in A_o\} = 1\}\ ,\ A_2 = \{\omega_2\ ;\ P\{\omega_1\ ;\ (\omega_1,\omega_2) \in A_o\} = 1\}$$

et

$$A = A_o \cap (A_1 \times A_2).$$

A est de mesure un et, pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in A$, tout $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2 \in C$, on a :

$$\tilde{\eta}_1(\omega_1) + \tilde{\eta}_2(\omega_2) = \tilde{\eta}(\omega_1,\omega_2).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. C étant équimesurable, alors, par le théorème (2.1), il existe B τ_d-ouvert dans $[0,1]^2$ avec $P(B) > 1-\varepsilon$ tel que $\{\eta\, 1_B\ ;\ \eta \in C\}$ soit une partie séparable de $L^\infty([0,1]^2)$. En posant

$$B_1 = \{\omega_1\ ;\ (\omega_1, \overline{\omega}_2) \in B \cap A\}$$

avec $\overline{\omega}_2$ choisi tel que $P(B_1) \geqslant 1 - \varepsilon$, on peut vérifier que

$\{\omega_1 \to \tilde{\eta}(\omega_1, \overline{\omega}_2)\, 1_{B_1}(\omega_1)\ ;\ \eta \in \eta_1 \oplus \eta_2 \in C\}$ est séparable dans $L^\infty\ [0,1]$;

par suite $\{\eta_1\, 1_{B_1}\ ;\ \eta_1 \oplus \eta_2 \in C\}$ est une partie séparable de $L^\infty\ [0,1]$. D'où la proposition $\square$

§ 3. Exemples

1. On a besoin de quelques définitions :

Définition (3.1).- Soit (T, ρ) un espace métrique et Σ un processus sur T. On dit que Σ vérifie la condition de limite dégénérée (finie) si, pour toute suite $(t_n)_n$ d'éléments de T ρ-convergente vers un élément t de T , il existe des nombres (finis) a et b tels que

(1) $\overline{\lim_n}\ \Sigma(t_n) - \Sigma(t) = a$ et $\underline{\lim_n}\ \Sigma(t_n) - \Sigma(t) = b.$

Si Σ est continu en probabilité et si Σ vérifie la condition de limite dégénérée, on a $a > -\infty$ et $b < +\infty$ dans (1).

On dit que Σ vérifie l'équi-condition de limite dégénérée (finie) si, pour toutes suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ de T telles que $\rho(s_n, t_n) \to 0$, il existe un nombre a (fini) tel que

$$\overline{\lim}\ \Sigma(t_n) - \Sigma(s_n) = a.$$

Noter que, si (T, ρ) est un espace vectoriel métrique et si Σ est linéaire, l'équi-condition de limite dégénérée est équivalente à la condition de limite dégénérée.

Enfin, si $A \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que A vérifie l'une des quatre propriétés énoncées ci-dessus si le processus identité $\Sigma : A \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifie la même propriété avec A muni de la topologie induite par la convergence en mesure.

Exemples

(3.1) Tout espace gaussien vérifie l'équi-condition de limite dégénérée. Plus généralement :

(3.2) Si L est le sous-espace fermé de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ engendré par une suite ξ_n de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la tribu asymptotique ne contient que des éléments de P-mesure 0 ou 1, L vérifie l'équi-condition de limite dégénérée.

(3.3), [2]. Soit (T, d) un espace métrique séparable ; soit Σ un processus sur T du type suivant : il existe une suite $(X_n)_n$ de processus indépendants sur T telle que, pour tout t de T, la série $\sum_n X_n(t)$ converge en probabilité vers $\Sigma(t)$. Si, pour tout t de T, il existe un voisinage V_t de t tel que chaque X_n admet une réalisation à trajectoires uniformément continues sur V_t, alors Σ vérifie l'équi-condition de limite dégénérée sur chaque V_t.

Comme exemple, on peut citer le processus

$$\Sigma : t \longrightarrow \int \exp (i < x,t >) \, dm (x)$$

sur $\mathbb{R}^n$ obtenu à partir d'une mesure aléatoire m sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs indépendantes et symétriques, c'est-à-dire d'une application m de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ dans un $L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que, pour toute suite $(B_k)_k$ de boréliens de $\mathbb{R}^n$ disjoints 2 à 2, $(m (B_k))_k$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et symétriques et la série $\sum_k m (B_k)$ converge en probabilité vers $m (\bigcup_k B_k)$ (cf [17]).

On peut noter :

(3.4) Soit (T, ρ) un espace métrique. Si $\Sigma : T \to L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un processus vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée sur (T, ρ) et si $\Sigma (T)$ est latticiellement bornée (dans $L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$), alors Σ vérifie aussi l'équi-condition de limite dégénérée <u>finie</u>.

(3.5) Soit L un sous espace vectoriel de $L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant la condition de limite dégénérée ; alors, pour tout A de $\mathcal{F}$ de P-mesure strictement positive, l'ensemble

$$\{g \; ; \; g \in L \; ; \; ||1_A g||_{L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)} < + \infty\}$$

est réunion dénombrable de parties de $L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée <u>finie</u>.

(3.6) Si $\Sigma : (T, \rho) \to L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifie l'équi-condition de limite dégénérée <u>finie</u> sur (T, ρ), le processus symétrisé $\tilde{\Sigma}$ de Σ vérifie aussi cette propriété.

<u>Théorème</u> (3.1).- <u>Soit</u> (T, d) <u>un espace métrique séparable</u> ; <u>soit</u> $\Sigma : T \to L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ <u>un processus continu en probabilité sur</u> (T, ρ) <u>et vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée finie sur</u> (T, ρ). <u>Alors</u> Σ <u>admet une réalisation naturelle</u>.

La preuve du théorème (1.3) utilise des propriétés de l'oscillation des trajectoires des processus vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée ; ces propriétés sont analogues à celles des processus gaussiens (cf [4], [12]). Plus précisément, on a la

Proposition (3.1).- Soit (T, d) un espace métrique séparable, S une partie dénombrable de T dense dans T et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé arbitraire. Soit $\Sigma : T \to L^0 (\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée sur (T, ρ) et ξ une réalisation de Σ. On a les propriétés suivantes :

(1) La d-oscillation de ξ sur S est presque sûrement non aléatoire ; autrement dit, il existe $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ de probabilité un et $\alpha : T \to [0,\infty]$ tels que :

$$\forall \omega \in \Omega_1 , \forall t \in T , \quad \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{(s,s')\in T\times T \\ d(s,t) < \varepsilon \\ d(s',t)< \varepsilon}} |\xi (\omega)(s) - \xi (\omega)(s')| = \alpha(t) ;$$

de plus, si Σ est symétrique (i.e. Σ et $- \Sigma$ ont même loi), alors, pour tout ouvert non vide U de T, on a l'alternative suivante : ou $\alpha \equiv + \infty$ sur U ; ou, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{t ; t \in U \cap S ; \alpha(t) < \varepsilon\}$ est non vide.

(2) Si Σ est continu en probabilité sur (T, d), α ne dépend pas du choix de la partie dénombrable S dense dans T.

Preuve .- On note $W_S (t,\omega)$ la d-oscillation de $\xi(\omega)(.)$ sur S au point t. Soit, pour tout ouvert non vide U de T,

$$\alpha (\omega, U) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{\substack{(s,s')\in U\times U \\ d(s,s') < \varepsilon}} |\xi (\omega)(s) - \xi (\omega)(s')| \qquad (\omega \in \Omega).$$

$\alpha (., U)$ est presque sûrement non aléatoire grâce à l'équi-condition de limite dégénérée. Maintenant, si $(U_n)_n$ est une base dénombrable d'ouverts de T, il est facile de voir que :

$$\forall t \in T , \forall \omega \in \Omega, \quad W_S (t,\omega) = \inf \{ \alpha (\omega, U_i) ; U_i \supset \{t\}\}.$$

La première partie de (1) s'en déduit aisément. La deuxième partie de (1) se montre comme dans [1].

On a (2) car, si S' est une autre partie dénombrable de T dense dans T on voit facilement que, pour tout t de T,

$$W_S (t,\omega) = W_{S'}(t, \omega) \text{ p.s. } \square$$

Avant de donner l'esquisse de la preuve du théorème (3.1), on va faire quelques remarques sur la proposition ci-dessus :

Remarque (3.1).- La proposition (3.2) est encore valable si l'on remplace "Σ vérifie l'équi-condition de limite dégénérée "par" il existe une base dénombrable d'ouverts de T sur lesquels Σ vérifie l'équi-condition de limite dégénérée".

Remarque (3.2).- On suppose que, dans la proposition (3.1), (T, d) est un espace homogène topologique relativement à un groupe G opérant sur T et que Σ est G-stationnaire, symétrique et continu en probabilité sur (T, d) (Σ est G-stationnaire si, pour tout g de G, les processus Σ et $\Sigma \circ g$ ont mêmes lois sur T). Alors, grâce à (2), on peut montrer comme dans [12] que α est constante ; d'où $\alpha \equiv +\infty$ ou $\alpha \equiv 0$, compte tenu de (1).

Preuve du théorème (3.1) (esquisse).- Vu la proposition (2.2) et l'exemple (3.6) il suffit de montrer le théorème dans le cas où Σ est symétrique. Avec les notations de la proposition (3.1), α est à valeurs réelles et

$$\rho\,(s,t) := d\,(s,t) + |\alpha(s) - \alpha(t)| \qquad (s,t) \in T \times T$$

définit une distance séparable sur T. Dans [10], Tsirelson démontre le théorème (3.1) en vérifiant qu'il existe une réalisation ξ à trajectoires ρ-continues (cf aussi [7]) ; mais je ne suis pas convaincue de la validité de sa preuve. Cependant on peut aussi montrer le théorème (3.1) en établissant, comme dans [8], la

Proposition (3.2).- Soit Σ comme dans le théorème (3.1) mais avec $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ quelconque (i.e. non nécessairement de Lebesgue) ; on suppose de plus que Σ est symétrique. Alors il existe une distance séparable ρ sur T , une suite $(\Omega_n)_n$ de parties mesurables de Ω avec $P\,(\Omega_n) \geqslant 1 - 2^{-n}$ si $n \geqslant 1$ et une réalisation ξ de Σ telle que les ensembles

$$\{\xi\,(.)(\omega)\ ;\ \omega \in \Omega_n\} \qquad , n \geqslant 1$$

soient équi-ρ-continus $\square$

Comme applications directes du théorème (3.1) on peut citer :

<u>Corollaire</u> (3.1).- Soit (T,ρ) un espace métrique séparable ; soit $\Sigma : (T,\rho) \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus continu en probabilité vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée. Alors, si $\Sigma(T)$ est latticiellement borné, Σ admet une réalisation naturelle.

<u>Corollaire</u> (3.2), [7] , [8] .- Soit E un e.l.c.s. et μ une probabilité de Radon gaussienne sur E ; alors μ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables.

<u>Corollaire</u> (3.3), [13, 14] .- Soit Σ un processus stationnaire sur $\mathbb{R}$ continu en probabilité. On a les propriétés suivantes:

1) Σ admet une réalisation naturelle si et seulement si Σ admet une réalisation à trajectoires continues sur $\mathbb{R}$;

2) Si Σ vérifie l'équi-condition de limite dégénérée dans un voisinage de 0 et si ξ est une réalisation séparable de Σ , alors (à l'indistinguabilité près) :

ou les trajectoires de ξ sont continues sur $\mathbb{R}$,

ou les trajectoires de ξ sont non bornées sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.

Le corollaire (3.3), qui est bien connu dans le cas de processus gaussiens stationnaires, s'applique au cas des processus stationnaires sur $\mathbb{R}$ qui sont transformés de Fourier de mesure aléatoire à valeurs indépendantes et symétriques (cf exemple (3.3)).

<u>Remarque</u> (3.3).- Soit (T,d) un espace métrique séparable tel que (T,d) soit un espace homogène topologique relativement à un groupe G opérant sur T. Si Σ est G-stationnaire, symétrique, continu en probabilité sur (T,ρ), alors l'assertion (2) du corollaire (3.3) reste vraie à condition de remplacer $\mathbb{R}$ par (T,ρ) et intervalle par ouvert (pour le cas gaussien, on peut consulter [12]). L'assertion (1) est vraie pour $T = \mathbb{R}^n$, G le groupe des translations (cf partie (6) de la proposition (2.1)).

2. Maintenant, on étudie plus particulièrement le cas des processus définis à partir d'une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de v.a.r. indépendantes sur un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit L le sous-espace vectoriel fermé de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ engendré par les ξ_n, $n \geq 1$ et muni de la topologie de la convergence en mesure. On peut noter que, si les ξ_n sont aussi symétriques, il existe des opérateurs linéaires continus P_m de L dans L tels que

$$P_m \; \xi_k = \begin{cases} \xi_k & \text{si} \quad k \leq m \\ & \\ 0 & \text{si} \quad k > m \end{cases} ;$$

les P_m ont en outre les propriétés suivantes

(p_1) $\quad \forall f \in L$, $P_n f \to f$ p.s. ;

(p_2) $\quad$ pour toute suite $(f_n)_n$ dans L telle que $\sup_n |f_n| < +\infty$ p.s., on a :

$$\sup_m \sup_k |P_m f_k| < +\infty \quad \text{p.s.} .$$

On a alors les théorèmes suivants :

<u>Théorème</u> (3.2).- <u>On suppose que les distributions des</u> ξ_n <u>sont continues</u>. <u>Soit</u> C <u>une partie de</u> L. <u>Les conditions suivantes sur</u> C <u>sont équivalentes</u> :

(1) $\quad$ C <u>est un ensemble naturel</u> ;

(2) $\quad$ <u>Il existe des réels</u> d_k <u>(constantes de centrage)</u> <u>et</u> $\Omega_1 \subset \Omega$ <u>de P-mesure un tels que chaque</u> η <u>de</u> C <u>admet la représentation</u>

$$(*) \qquad \eta = b_0(\eta) + \sum_{k\geq 1} b_k(\eta) \quad (\xi_k(.) - d_k)$$

<u>où les</u> $b_k(\eta)$, $k \geq 0$ <u>sont des réels tels que la série à droite converge en tout point de</u> Ω_1 ;

(3) $\quad$ C <u>est réunion dénombrable de parties latticiellement bornées</u>.

<u>Remarque</u> (3.4).- Les distributions des ξ_n étant non dégénérées, les réels $b_k(\eta)$ dans la représentation (*) sont déterminés de manière unique. Le théorème est faux si on ne suppose pas les distributions des ξ_n continues comme le montre l'exemple (1.2).

Théorème (3.3).- On suppose toujours que les distributions des ξ_n sont continues. Soit $(f_n)_n$ une suite de fontions sur un ensemble T telle que, pour tout t de T, la suite $(\sum_{k\leq n} f_k(t)\,\xi_k)_n$ converge en probabilité, on note Σ (t) sa limite. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1') Σ admet une réalisation naturelle sur T ;

(2') il existe $\Omega_1 \in \mathfrak{F}$ de probabilité un tel que, pour tout ω de Ω_1 et tout t de T, la série $\sum_k f_k(t)\,\xi_k(\omega)$ converge ;

(3) il existe $f : T \to [1,\infty[$ et $\beta : \Omega \to [1,\infty[$ mesurable telles que :

$$P\,\{\omega\ ;\ |\sum_k f_k(t)\,\xi_k(\omega)| \leqslant \beta(\omega)\,f(t)\} = 1\ ;$$

(4') il existe une distance séparable ρ sur T telle que

$$\sup_m \sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ 0<\rho(t,s)\leqslant 1}} \frac{1}{\rho(s,t)}\,\Big|\sum_1^m \xi_k(\omega)f_k(t) - \sum_1^m \xi_k(\omega)f_k(s)\Big| < +\infty \quad \text{p.s..}$$

Preuve du théorème (3.2)

(1) $\Longrightarrow$ (2), d'après la remarque (2.2) ; car, les distributions des ξ_n étant continues, on a, pour toute suite $(f_n)_n$ dans L,

(.) $$P\,(\sup_n |f_n| < +\infty) = 0 \text{ ou } 1,\ [15].$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) d'après le corollaire (3.1) ci-dessus et (1.1).

(1) $\Longrightarrow$ (2). Soit (1). Compte tenu de la remarque 2.1, il existe une distance séparable ρ sur C et une réalisation ξ de Σ à trajectoires ρ-lipschitziennes. Grâce à (.), il existe $\varepsilon_0 > 0$ (qu'on peut supposer égal à 1) tel que, pour toute partie dénombrable D de C,

$$\sup_{\substack{(f,g)\in D\times D\\ 0<\rho(f,g)<1}} \frac{1}{\rho\,(f,g)}\,|\xi(\omega)(f) - \xi(\omega)(g)| < +\infty \quad \text{p.s..}$$

Soit $(\tilde\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde P)$ l'espace produit de $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ avec lui-même et $\alpha \to \tilde\alpha$ l'application de $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ dans $L^0(\tilde\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde P)$ définie par :

$$\tilde\alpha\,(\omega_1\ ;\ \omega_2) = \alpha\,(\omega_1) - \alpha\,(\omega_2) \qquad (\omega_1 \in \Omega\ ,\ \omega_2 \in \Omega).$$

Alors, grâce à (p_2), on a aussi :

$$\sup_m \sup_{\substack{(f,g)\in D\times D \\ 0<\rho(f,g)<1}} \frac{1}{\rho(f,g)} |P_m(\tilde{f}) - P_m(\tilde{g})| < +\infty \qquad \text{p.s..}$$

D'où, pour tout m, $\Sigma_m : \eta \to P_m(\tilde{f})$ de C dans L $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$ admet une réalisation naturelle ξ_m à trajectoires ρ-lipschitziennes sur C telle que, pour presque tout $\tilde{\omega}$ de $\tilde{\Omega}$, on ait

$$(**) \quad \sup_m \sup_{\substack{(f,g)\in C\times C \\ 0<\rho(f,g)<1}} \frac{1}{\rho(f,g)} |\xi_m(\tilde{\omega},f) - \xi_m(\tilde{\omega},g)| < +\infty .$$

On en déduit que

$$\tilde{P} \ \{\tilde{\omega}\ ;\ \forall f \in C,\ \xi_m(\tilde{\omega},f) \longrightarrow \xi(\tilde{\omega},f)\} = 1.$$

Mais, pour presque tout $\tilde{\omega}$ de $\tilde{\Omega}$ et tout m, on a

$$\forall f \in C, \quad \xi_m(\tilde{\omega},f) = \sum_{k=1}^{m} b_k(\tilde{f})\ \tilde{\xi}_k(\tilde{\omega}).$$

Par suite, par un raisonnement classique, on obtient l'affirmation (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Il suffit de vérifier que le symétrisé $\tilde{C}$ de C est un ensemble naturel ; mais cette propriété se déduit du lemme suivant appliqué à

$$S = \text{span}\ \{\tilde{\xi}_n\}, \quad \Gamma = \tilde{C}, \quad \chi(n,\gamma) = P_n(\gamma) \ \text{ si } n \geqslant 1, \quad \gamma \in \Gamma,$$

et Σ l'opérateur identité de $\tilde{C}$ dans $L^0(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$ □

<u>Lemme</u> [10].- Soit (S,d) un espace métrique séparable ; soit $\Sigma : S \to L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un processus vérifiant l'équi-condition de limite dégénérée sur (S,d) et ayant une réalisation naturelle ξ. On suppose qu'il existe un espace topologique Γ contenant S, une application χ de N x Γ dans S et un élément A de $\mathfrak{F}$ de mesure strictement positive tels que

(i) pour tout γ de Γ, la suite $(\chi(n,\gamma))_n$ converge vers γ dans Γ ;

(ii) pour tout γ de Γ et tout ω de A, la suite $(\xi(\omega)\ (\chi(n,\gamma))_n$ converge.

Alors il existe un processus $\Sigma' : \Gamma \longrightarrow L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ayant une réalisation naturelle ξ' telle que, pour presque tout ω de Ω, on ait :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \xi(\omega)\ (\chi(n,\gamma)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi'(\omega)(\gamma).$$

Preuve (esquisse).- On peut supposer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un $([0,1], \mathcal{B}^\lambda, \lambda)$. Soit K un compact métrisable contenu dans A et de P-mesure > 0. En appliquant, pour chaque γ de Γ, le théorème de Baire à la suite de fonctions continues $(\xi(.,\chi(n,\gamma)))_n$ sur K puis l'équicondition de limite dégénérée on montre que, pour tout $\delta > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $P(B) \geq 1-\delta$ et

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad , \quad \overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}} \quad \sup_{\omega \in B} |\xi(\omega)(\chi(n_1,\gamma)) - \xi(\omega)(\chi(n_2,\gamma))| = 0.$$

(C'est en quelque sorte une propriété d'Egoroff uniforme). Le lemme s'en déduit immédiatement $\square$

Preuve du théorème (3.3).- Il s'obtient à partir du théorème (3.2) où $C = \Sigma(T)$. Trivialement (1') $\Longrightarrow$ (1), (3') $\Longrightarrow$ (3) et (2') $\Longrightarrow$ (2). Réciproquement (2') $\Longrightarrow$ (2) ; car, grâce à la continuité des lois des ξ_n, on en déduit que, pour tout t de T,

(i) $\forall k \geq 1, \quad b_k(t) = f_k(t)$

(ii) la suite $(\sum_{k\leq n} b_k(t)\, d_k)_n$ converge vers $b_0(t)$;

ici on a posé $b_k(t) = b_k(\Sigma(t))$, si $t \in T$, $k \geq 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1'), (3'), (4'). Soit (2). On sait déjà qu'on a (2') et donc (i) et (ii). D'après la preuve du théorème (3.2), il existe $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable, ρ un écart séparable sur T et $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ de probabilité un tels que, pour tout ω de Ω_1, on ait :

$$\sup_m |b_0(t)+\sum_{k\leq m} b_k(t)(\xi_k(\omega)-d_k)-b_0(s)-\sum_{k\leq m} b_k(s)\,(\xi_k(\omega)-d_k)| \leq a(\omega)\,\rho(s,t)$$

dès que $\rho(s,t) < 1$. D'autre part,

$$\rho_1(t,s) = \sup_n |b_0(t) + \sum_{k\leq m} d_k\, f_k(t) - b_0(s) - \sum_{k\leq m} d_k\, f_k(s)| \qquad (s,t) \in T\times T$$

définit un écart séparable car l'espace c_0 des suites convergeant vers zéro est séparable. Alors $\rho_2 := \rho + \rho_1$ est un écart séparable sur T et, pour tout ω de Ω_1, tous s,t de T tels que $\rho_2(s,t) < 1$, on a :

$$\sup_m \left| \sum_{k\leq m} f_k(t)\,\xi_k(\omega) - \sum_{k\leq m} f_k(s)\,\xi_k(\omega)\right| \leq (a(\omega)+1)\,\rho_2(s,t).$$

D'où (4'), car, en ajoutant éventuellement à ρ_2 une distance séparable, on peut supposer que ρ_2 est une vraie distance. On obtient aussi (3') vu que (2') $\Longleftrightarrow$ (2) est vérifiée.

Maintenant on a (3') : Soit $(t_n)_n$ une suite d'éléments de T telle que $\{t_n , n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans (T,ρ_2) ; soit $(A_n)_n$ une suite de parties de T disjointes 2 à 2 et telles que

$$\forall n , \quad A_n \subset \{t ; \rho_2 (t,t_n) < 1\} .$$

Soit aussi $(\lambda_n)_n$ une suite de réels > 0 telle que $\sum_n \lambda_n \Sigma(t_n)$ converge presque sûrement ; si f est la somme de cette série, on obtient (3') en posant :

$$\beta(\omega) = \max (f(\omega), a(\omega) + 1) \qquad f(t) = \sum_n \left(\frac{1}{\lambda_n} + \rho(t,t_n)\right) 1_{A_n} (t) \square$$

<u>Remarque</u> (3.5).- Dans [9] Tsirelson a obtenu des résultats analogues pour des processus lacunaires $\Sigma : T \to L^0 ([0,1], dx)$ de la forme suivante :

$$\Sigma(t)(u) = \sum_{k\geq 1} a_k(t) \cos (n_k u) + b_k(t) \sin (n_k u)$$

où $\inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1$ et, pour tout t de T, $\sum_{k\geq 1} a_k^2 (t) + b_k^2 (t) < + \infty$. Cela tient aux propriétés suivantes de Σ :

(i) Σ vérifie une condition de limite dégénérée affaiblie ;

(ii) Si $P_n (\Sigma(t)) := \sum_{k\leq n} a_k(t) \cos (n_k u) + b_k(t) \sin (n_k u)$, P_n vérifie les propriétés (p_1) et (p_2) ; plus précisément on a :

(iii) S'il existe une partie mesurable A de $[0,1]$ de mesure > 0 telle que, pour tout t de T , $|\Sigma (t)| \leq 1$ p.s. sur A, alors il existe $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable tel que

$$\forall t \in T , \quad |\Sigma (t)|\leq F \quad \text{et} \quad \sup_n |P_n (\Sigma(t))| \leq F.$$

De plus

$$\int_0^1 \exp (\alpha F(\omega) d\omega < + \infty \text{ pour un réel } \alpha > 0.$$

On termine ce paragraphe en énonçant quelques corollaires des théorèmes (3.2) et (3.3).

Corollaire (3.4).- Soit Σ un processus gaussien d'espace des temps T. Alors Σ admet une réalisation naturelle si et seulement s'il existe $f : T \to [1,\infty[$ telle que le processus $t \longrightarrow \frac{\Sigma(t)}{f(t)}$ a une réalisation à trajectoires bornées (autrement dit, si et seulement si $\Sigma(T)$ est réunion dénombrable de parties latticiellement bornées (i.e. de G.B. ensembles au sens de [16])).

Le corollaire suivant est une variante du Corollaire (3.2) (dans [7], Sato l'a montré directement à partir du Corollaire (3.2)).

Corollaire (3.5), [11] .- Soit E un e.l.c.s. et γ une probabilité gaussienne sur la tribu sur E engendrée par toutes les formes linéaires continues sur E. Soit $(\xi_n)_n$ une suite de v.a.r. gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace probabilisé de Radon (de Lebesgue) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

S'il existe un compact K de E tel que $\gamma^*(K) > 0$, alors il existe une suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E et une application $\xi : \Omega \to E$ P-Lusin mesurable telle que

(1) l'image de P par ξ est une probabilité de Radon sur E prolongeant γ ;

(2) pour presque tout ω, la série $e_0 + \sum_k \xi_k(\omega)\, e_k$ converge dans E vers $\xi(\omega)$.

Remarque (3.6).- Comme γ se prolonge en une probabilité de Radon sur E, il résulte de [18] (cf aussi [6]) que l'espace autoreproduisant centré $\mathcal{H}$ associé à γ est contenu dans E, séparable et que la moyenne m de γ est dans E. Alors, en fait, dans le corollaire ci-dessus on peut prendre pour e_0 la moyenne de γ et pour $(e_n)_{n\geqslant 1}$ n'importe quelle base orthonormale de $\mathcal{H}$.

§ 4.- Quelques remarques sur les processus gaussiens

Soit $\Sigma : T \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus gaussien avec $\Sigma(T)$ latticiellement borné ; donc Σ admet une réalisation naturelle ξ par le corollaire (3.1).

Théorème (4.1). Soit $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ de probabilité 1 et $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

(1) Si f ne peut se mettre sous la forme $f = \lim\limits_k \Sigma(t_k)$ avec $\{t_k \; ; \; k \in \mathbb{N}\} \subset T$ (donc si f non gaussienne et même non mesurable), alors il existe une partie finie S de Ω_1 telle que

$$(*) \qquad \inf_{t \in T} \max_{\omega \in S} |f(\omega) - \xi(\omega,t)| > 0 \; ;$$

(2) Si $f = \lim\limits_k \Sigma(t_k)$ avec $\{t_k, k \in \mathbb{N}\} \subset T$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie S de Ω_1 et $\delta > 0$ tels que

$$(t \in T, \max_{\omega \in S} |f(\omega) - \xi(\omega,t)| \leqslant \delta) \Longrightarrow E\,|f - \Sigma(t)| \leqslant \varepsilon \quad .$$

(Par $f = \lim\limits_k \Sigma(t_k)$ on entend que f est limite en probabilité de la suite $(\Sigma(t_k))_k$)

On peut donner une interprétation topologique de ce théorème : Soit $\mathcal{M}$ l'espace quotient de $\mathbb{R}^\Omega$ par la relation d'égalité P-presque sûre que l'on note $\mathcal{R}$. Si M est une partie de $\mathbb{R}^\Omega$ et si $\alpha \in M$, on dit que α appartient à la fermeture ponctuelle de M s'il existe $\Omega_1' \in \mathcal{F}$ de probabilité 1 et une suite $(\alpha_n)_n$ dans M tels que, pour toute partie finie S de Ω_1 ,

$$\inf_k \sup_{\omega \in S} |\alpha_k(\omega) - \alpha(\omega)| = 0$$

(i.e. tels que α appartient à la fermeture dans $\mathbb{R}^{\Omega_1}$ de $\{\alpha_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$).
On vérifie aisément que l'on définit ainsi une topologie τ sur $\mathbb{R}^\Omega$ dont les fermés sont $\mathcal{R}$-saturés. La topologie sur $\mathcal{M}$ quotient de cette topologie τ par $\mathcal{R}$ est appelée topologie "ponctuelle". Sur $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathcal{M}$, la topologie ponctuelle est moins fine que la topologie de convergence en mesure.

Le théorème (4.1) dit que, sur un G.B. ensemble C, la topologie ponctuelle coïncide avec la topologie de convergence en mesure et que la fermeture de C dans $\mathcal{M}$ coïncide avec sa fermeture dans $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (muni de la topologie de convergence en mesure).

La preuve du théorème (4.1) s'appuie sur les deux lemmes suivants de [10] :

Lemme (4.1).- Soit m(.) la moyenne de $\Sigma(.)$ et $\sigma(.)$ la variance de $\Sigma(.)$. Soit $T_1 \subset T$. Alors, pour presque tout $\tilde{\omega} = (\omega_n)_n$ dans $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}}, P^{\otimes \mathbb{N}})$, on a :

a) $\max_{i=1\ldots n} \xi(\omega_i, t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ uniformément sur T_1, si $\inf_{t\in T_1} \sigma(t) > 0$;

b) $\lim_{n\to\infty} \inf_{t\in T_1} \max_{i=1,\ldots,n} |\xi(\omega_i, t)| \geqslant \inf_{t\in T_1} (E|\Sigma(t)|^2)^{1/2}$.

Lemme (4.2).- Soit $\mathcal{U}$ un filtre sur T. Si $(E|\Sigma(t)|^2)^{1/2} \to 0$ suivant $\mathcal{U}$ alors, pour presque tout ω de Ω,

$$\overline{\lim_{\mathcal{U}}}\ \xi(\omega,t) \geqslant 0 \geqslant \underline{\lim_{\mathcal{U}}}\ \xi(\omega,t).$$

Preuve du théorème (4.1).- Soit

$$\mathcal{U} = \{U_{S,\varepsilon} \;;\; S \subset \Omega_1 \;;\; S \neq \emptyset \;;\; S \text{ fini} \;;\; \varepsilon > 0\}$$

avec

$$U_{S,\varepsilon} := \{t \in T \;;\; \sup_{\omega\in S} |f(\omega) - \xi(\omega,t)| \leqslant \varepsilon\} .$$

Ou l'un des éléments de $\mathcal{U}$ est vide et on a (*). Ou tous les éléments de $\mathcal{U}$ sont non vides et donc $\mathcal{U}$ est une base de filtre. On va montrer que f est mesurable et que $\Sigma(t)$ converge en probabilité vers f suivant $\mathcal{U}$. Tout d'abord, on a

$$(1) \qquad \inf_{U\in\mathcal{U}} \sup_{(t,s)\in U\times U} E|\Sigma(t) - \Sigma(s)|^2 = 0 \;;$$

sinon il existe $\varepsilon > 0$ et, pour tout U de $\mathcal{U}$, (t_U, s_U) dans U x U tels que :

$$\forall U \in \mathcal{U},\quad E|\Sigma(t_U) - \Sigma(s_U)|^2 \geqslant \varepsilon \;;$$

donc, par le lemme (4.1), il existe un entier n et Λ dans $\mathcal{F}^{\otimes n}$ de mesure strictement positive tels que, pour tout $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de Λ

$$\inf_{U\in\mathcal{U}} \max_{i=1,\ldots,n} |\xi(\omega_i, t_U) - \xi(\omega_i, s_U)|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \;;$$

on obtient une contradiction avec la définition de $U_{S,\frac{\varepsilon}{6}}$ lorsque $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ avec $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\} \in \Omega_1^n \cap \Lambda$.

(1) est donc vérifiée ; par suite, il existe g dans $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $\Sigma(t)$ converge vers g en probabilité suivant $\mathcal{U}$. En appliquant le lemme (4.2) au processus gaussien $t \to \Sigma(t) - g$ on obtient alors :

$$\overline{\lim_{\mathcal{U}}}\ \xi\ (\omega,t) \geqslant g(\omega) \geqslant \underline{\lim_{\mathcal{U}}}\ \xi\ (\omega,t) \text{ p.s..}$$

D'où

$$g(\omega) = f(\omega) = \lim \xi\ (\omega,t) \qquad \text{p.s.}$$

car, par définition de $\mathcal{U}$, on a, pour tout ω de Ω_1, convergence de ξ (t, ω) vers $f(\omega)$ suivant $\mathcal{U}$. Et le théorème est établi □

On termine ce papier par un exemple :

<u>Corollaire</u> (4.1).- Il existe un compact Q séparable <u>non</u> métrisable et un processus gaussien centré Σ continu en probabilité sur Q tel que :

(a) Σ admet une réalisation naturelle ξ à trajectoires bornées et non continues sur Q ;

(b) Σ admet une réalisation ξ_o à trajectoires continues sur Q.

<u>Preuve</u> (esquisse).- Soit $(\eta_n)_n$ un processus gaussien sur un $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $\sup_n |\eta_n| < +\infty$ p.s. On suppose que $(\eta_n)_n$ ne définit pas un G.C. ensemble (au sens de [16]) ; c'est-à-dire, si C est la fermeture dans $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de $\{\eta_n ; n \in \mathbb{N}\}$, le processus identité $C \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ n'admet pas de réalisation à trajectoires continues. Soit

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega \ ;\ \sup_k |\eta_k(\omega)| < +\infty\} ;$$

soit Q la fermeture dans $\mathbb{R}^{\Omega_1}$ de l'ensemble $\{\eta_k |\Omega_1 ; k \in \mathbb{N}\}$ ($\eta_k | \Omega_1$ est la restriction de η_k à Ω_1). Q est ainsi un compact séparable.

D'après le théorème ci-dessus tout η de Q est mesurable, gaussien ; ainsi on peut définir canoniquement un processus gaussien Σ de Q dans $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ce processus est continu en probabilité toujours grâce au théorème (4.1) ; et il admet une modification naturelle ξ car $\Sigma(Q) \subset C$ est latticiellement borné.

D'autre part

$$\xi_o(\omega, \varphi) := \varphi(\omega) \qquad\qquad (\varphi \in Q\ ,\ \omega \in \Omega_1)$$

définit une réalisation de Σ à trajectoires continues sur Q. On peut alors vérifier que (ξ, ξ_o, Q) vérifie les propriétés du Corollaire □

REFERENCES

[1] X. FERNIQUE, Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lecture Notes in Math. 480, (1975), 1-91.

[2] X. FERNIQUE, Régularité de fonctions aléatoires non gaussiennes, Ecole d'Eté de Saint-Flour 1981,(à paraître).

[3] K. ITO, Canonical measurable random functions, Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related topics,(Tokyo, 1969), 369-377.

[4] K. ITO et M. NISIO, On the oscillation of Gaussian processes, Math. Scand. 22, (1968), 209-223.

[5] V.A. ROHLIN, On the fundamental ideas of measure theory, Translations Amer. Math. Soc. série 1, vol. 10 (Functional Analysis and Measure Theory), (1962), 1-54.

[6] H. SATO et Y. OKAZAKI, Separabilities of a Gaussian Radon measure, Ann. Inst. H. Poincaré A 11, (1975), 287-298.

[7] H. SATO, Souslin support and Fourier expansions of a Gaussian Radon measure, Lecture Notes in Math. 860, (1980), 299-313.

[8] M. TALAGRAND, La τ-régularité des mesures gaussiennes, Z. Wahrs. verw. Geb. 57, (1981), 213-221.

[9] B.S. TSIRELSON, Some properties of Lacunary series and Gaussian measures that are connected with uniform versions of the Egorov and Lusin properties, Theory Prob. and Appl. 20, (1975), 652-655.

[10] B.S. TSIRELSON, Natural modification of random processes and its application to random functional series and to Gaussian measures, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel Mat. Inst. Steklov (LOMI) 55, (1975), 35-63 (en Russe).

[11] B.S. TSIRELSON, Complement to a paper on natural modifications, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad LOMI 72, (1976), 201-211 (en Russe).

[12] N.C. JAIN et G. KALLIANPUR, Oscillation function of a multiparameter Gaussian process, Nagoya Math. J. 47, (1972), 15-28.

[13] Yu.K. BELYAEV, Local properties of the sample functions of stationary Gaussian processes, Theory Prob. and Appl. 5, (1960), 117-120.

[14] Yu.K. BELYAEV, Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes, Proc. 4th Berkeley Symposium, vol. 2, (1961), 23-33.

[15] J. HOFFMANN-JORGENSEN, Integrability of semi-norms, the 0-1 law and the affine kernel for product measures, Studia Math. 61, (1977), 137-159.

[16] R.M. DUDLEY, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Funct. Anal. 1, (1967), 290-330.

[17] A. PREKOPA, On stochastic set functions, Acta Math. Acad. Scient. Hung. 7, (1956) 215-262 et 8, (1957), 337-400.

[18] C. BORELL, Gaussian Radon measures on locally convex spaces, Math. Scand. 38, (1976), 265-284.

Université de Clermont II
B.P. 45
63170 AUBIERE