SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Résultats d'Atkinson sur les processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 503-508
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__503_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

RESULTATS D'ATKINSON SUR LES PROCESSUS DE MARKOV

par P.A. Meyer

L'idée d'étudier les propriétés de commutation des projections en théorie des processus de Markov est due à Azéma [2], qui s'est occupé du cas homogène dans le temps, le plus difficile. Le cas non homogène dans le temps est beaucoup plus simple, et cependant moins bien connu : il a été étudié par Dynkin [3], [4], dont les résultats viennent d'être complétés par Atkinson [1]. On présente ici le beau résultat principal d'Atkinson.

NOTATIONS

On considère un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ (la tribu dégénérée est notée $\underline{\underline{D}}$), sur lequel est défini un processus de Markov (X_t) absolument général : X_t est à valeurs dans un espace d'états E_t qui peut dépendre de t, et on n'exige que la condition bien connue d'indépendance conditionnelle :

(1) $\underline{\underline{T}}(X_s,s\leq t)$ et $\underline{\underline{T}}(X_s,s\geq t)$ sont conditionnellement indépendantes / X_t

Noter que seule la tribu engendrée par X_t intervient dans (1) : on peut donc toujours prendre $E_t=(\Omega,\underline{\underline{G}}_t)$, où $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{T}}(X_t)$, X_t étant l'application identique de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ sur $(\Omega,\underline{\underline{G}}_t)$. C'est ce que fait Atkinson.

Rien ne nous empêche de supposer que $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}^\circ\vee\underline{\underline{D}}$, où $\underline{\underline{F}}^\circ$ est engendrée par tous les X_t. Nous le ferons dans toute la suite.

En ce qui concerne l'ensemble des temps du processus, seule sa structure d'ordre intervient dans la suite. Nous supposerons toujours que c'est un intervalle $[a,b]$, avec $0<a<b<\infty$, et nous conviendrons que $X_t=\partial$ pour $0\leq t<a$ et $b<t\leq\infty$. Alors les conventions usuelles

$$\inf(\emptyset)=+\infty \quad , \quad \sup(\emptyset)=0$$

deviennent inoffensives (ce qui n'est pas le cas lorsque l'ensemble des temps est $[0,\infty]$ au départ ! Atkinson est embarrassé par le rôle spécial des points $0,\infty$).

La tribu $\underline{\underline{T}}(X_s,s\leq t)\vee\underline{\underline{D}}$ (tribu du passé) est notée $\underline{\underline{F}}_t^\circ$, et l'on pose $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_{t+}^\circ$; c'est une filtration croissante satisfaisant aux conditions habituelles. De même, $\underline{\underline{T}}(X_s,s\geq t)\vee\underline{\underline{D}} = \hat{\underline{\underline{F}}}_t^\circ$ est la filtration décroissante du futur, et $\hat{\underline{\underline{F}}}_t=\hat{\underline{\underline{F}}}_{t-}^\circ$ satisfait aux conditions habituelles. L'ordre usuel sur $[0,\infty]$ étant isomorphe à l'ordre opposé, il y a parfaite symétrie entre le passé et le futur. Si I est un intervalle, on note $\underline{\underline{F}}_I^\circ$ la tribu $\underline{\underline{T}}(X_s,s\in I)\vee\underline{\underline{D}}$. Les notations E_t°,E_t ; $\hat{E}_t^\circ$, $\hat{E}_t$; E_I° désignent les opérateurs d'espérance conditionnelle associés.

Le résultat fondamental (et immédiat) de la théorie élémentaire est le suivant. Il permet d'éliminer entièrement le << processus >> et de travailler uniquement sur les filtrations.

LEMME 1. Si $s\leq t$, $\hat{E}^\circ_s$ et E°_t commutent, et leur produit est $E[\cdot|\underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]}]$.

DEMONSTRATION. Par un argument trivial de classes monotones, on se ramène à vérifier que $\hat{E}^\circ_s E^\circ_t[fgh]=E^\circ_t\hat{E}_s[fgh]$ lorsque $f\in b(\underline{\underline{F}}^\circ_s)$, $g\in b(\underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]})$, $h\in b(\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_t)$. Alors

$$E^\circ_t[fgh] = fgE^\circ_t[h]= fgE[h|X_t]$$

$$\hat{E}^\circ_s E^\circ_t[fgh] = E[f|X_s]gE[h|X_t]$$

expression symétrique en s et t, d'où la commutation. Il est bien connu que si deux opérateurs $E[\cdot|\underline{\underline{A}}]$ et $E[\cdot|\underline{\underline{B}}]$ commutent ($\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ contenant $\underline{\underline{D}}$), leur produit est $E[\cdot|\underline{\underline{A}}\cap\underline{\underline{B}}]$. Mais ici, $E[f|X_s]gE[h|X_t]$ est mesurable par r port à $\underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]}$, tribu contenue dans $\underline{\underline{F}}^\circ_t\cap\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_s$. On en déduit que

$$\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_s\cap\underline{\underline{F}}^\circ_t = \underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]}$$

Dans toute la suite, nous allons oublier le processus, pour ne plus consi dérer que les filtrations $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$, $(\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_t)$, l'une croissante, l'autre décroissante, toutes deux constantes pour t<a ou t>b , contenant toutes deux $\underline{\underline{D}}$.

Nous prenons pour axiome la propriété de commutation suivante (lemme 1)

(2) si $s\leq t$, $\hat{E}^\circ_s$ et E°_t commutent

et nous définissons $\underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]}$ comme $\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_s\cap\underline{\underline{F}}_t$. On peut être tenté d'adjoindre aussi l'axiome suivant, automatiquement satisfait dans la situation de départ :

propriété de génération : si $s\leq t$, $\underline{\underline{F}}^\circ_s$, $\underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]}$, $\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_t$ engendrent $\underline{\underline{F}}^\circ$,

mais l'analyse des démonstrations ci-dessous montre qu'on ne s'en sert pa

Même avec cette propriété, la situation est a priori plus générale que celle des " processus de Markov" , car si nous définissons $\underline{\underline{G}}_s=\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_s\cap\underline{\underline{F}}^\circ_s$, rie ne nous dit que $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ (par exemple) soit égal à $\bigvee_{s\leq t}\underline{\underline{G}}^\circ_s$,ce qui était le ca dans notre situation de départ.

Le lemme suivant va nous permettre de remplacer les filtrations $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ et $(\hat{F}^\circ_t)$ par leurs versions " habituelles" $(\underline{\underline{F}}_t)$ et $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$. Il y aurait sans dc lieu d'étudier aussi la version << non régularisée >> des théorèmes d'Atkinson, à la manière de Lenglart, mais je ne suis pas capable de le faire sans trop de fatigue.

LEMME 2. Les opérateurs $\hat{E}_s$ et E_t commutent si $s\leq t$.

DEMONSTRATION. Prendre des $s_n\uparrow\uparrow s$, des $t_n\downarrow\downarrow t$, et utiliser un peu de théori des martingales classique.

EMARQUES. a) Si l'on définit $\underline{\underline{F}}_{[s,t]}=\hat{\underline{\underline{F}}}_s\cap\underline{\underline{F}}_t$, cette tribu est plus grosse ue $\underline{\underline{F}}^\circ_{[s,t]}$, donc la propriété de génération est a fortiori satisfaite par es filtrations régularisées. De même, si l'on est parti d'une situation e << processus de Markov >> où les X_t engendrent $\underline{\underline{F}}$, et si l'on désigne ar $\bar{X}_t$ l'application identique de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ sur $(\Omega,\hat{\underline{\underline{F}}}^\circ_t\cap\underline{\underline{F}}_t)$, tribu plus grosse ue $\underline{\underline{T}}(X_t)$, il est clair que les $\bar{X}_t$ engendrent encore $\underline{\underline{F}}$ ($\bar{X}_t$ représente un erme en t).

b) Avec des notations évidentes, on peut établir non seulement a commutation de $E_t=E_{t+}$ avec $\hat{E}_s=\hat{E}_{s-}$, mais la commutation de tous les ouples $(E_{t-},\hat{E}_{s-}),(E_t,\hat{E}_{s+})$, et enfin $(E_{t-},\hat{E}_{s+})$ pourvu que $s<t$. Rien ne peret d'affirmer que E_{t-} et $\hat{E}_{t+}$ commutent, dans le cas limite où $s=t$, et tkinson donne un contre-exemple simple.

RIBUS ET PROJECTIONS

Tous les processus réels Z que nous considérerons seront nuls hors de a,b], sauf mention expresse du contraire. Tous les temps d'arrêt seront valeurs dans $[a,b]\cup\{+\infty\}$. Nous désignons par Z^p,Z^o la projection prévi-ible, resp. optionnelle, d'un processus mesurable positif Z, et de même $^p,\mu^o$ la projection duale prévisible, resp. optionnelle d'une mesure aléa-oire (positive) intégrable μ (nous ne considérerons que des mesures léatoires portées par $[a,b]$).

En renversant le sens du temps, nous désignerons par $Z^{\hat{p}}$, $Z^{\hat{o}}$ la projec-ion coprévisible, cooptionnelle , d'un processus mesurable positif Z. ous n'avons pas besoin d'insister sur ces définitions, puisqu'elles en-rent en fait dans la théorie générale des processus, au sens usuel du erme. La seule chose à noter, c'est que le préfixe co- et le signe ^ ervent à distinguer les notions relatives à la filtration (décroissante) $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$) : une seule exception, nous ne parlons pas de << co-temps-d'arrêt >> ais de temps cooptionnels. Il est entendu que ceux-ci prennent leurs va-eurs dans $\{0\}\cup[a,b]$. Quant au reste, les notations parlent d'elles mêmes.

HEOREME 1. Soit Z un processus mesurable borné. Alors $Z^{o\hat{p}}=Z^{\hat{p}o}$, $Z^{\hat{o}p}=Z^{p\hat{o}}$.(1)
EMONSTRATION. Prouvons par exemple la première égalité. Il suffit de trai-er le cas où Z est continu à droite. Alors Z^o, $Z^{\hat{p}}$, puis $Z^{o\hat{p}}$, $Z^{\hat{p}o}$ sont con-inus à droite hors d'un ensemble évanescent. D'autre part, la propriété de ommutation des espérances conditionnelles à temps fixe montre que pour out t on a p.s. $Z^{o\hat{p}}_t=Z^{\hat{p}o}_t$. Ces deux processes sont donc indistiguables, et 'est terminé.

Le résultat nouveau d'Atkinson, par rapport à Azéma, concerne les utres couples de projections. Avec cette généralité, il n'y a rien à spérer du couple $(p,\hat{p})$, puisque la commutation n'a même pas lieu pour

). On abrège $(Z^o)^{\hat{p}}$ en $Z^{o\hat{p}}$, et de même dans toute la suite.

les espérances conditionnelles à t fixe. En revanche :

THEOREME 2. Pour tout processus mesurable borné Z, on a $Z^{o\hat{o}}=Z^{\hat{o}o}$.

Ce théorème est loin d'être évident, et nous allons le démontrer en un série d'étapes, dont certaines ont leur intérêt propre. Nous commençons p remarquer qu'en fait il suffit de vérifier le résultat analogue pour les mesures aléatoires bornées. En effet, si les processus $Z^{o\hat{o}}$ et $Z^{\hat{o}o}$ ne sont pas indistinguables, d'après le théorème de section (trivial : non adapt il existe une mesure aléatoire λ portée par $[a,b]$, possédant les propriét suivantes :

- Pour tout ω , on a $\lambda(\omega,[a,b]) \leq 1$,
- $E[\int Z_s^{o\hat{o}}\lambda(ds)\ ] \neq E[\int Z_s^{\hat{o}o}\ \lambda(ds)]$

Mais cette relation s'écrit $E[\int Z_s\lambda^{o\hat{o}}(ds)] \neq E[\int Z_s\lambda^{\hat{o}o}(ds)]$, et entraîne donc $\lambda^{o\hat{o}}\neq\lambda^{\hat{o}o}$. En sens inverse, si l'on établit que $\lambda^{o\hat{o}}=\lambda^{\hat{o}o}$, on a donc prouvé le théorème 2.

Passons alors à la démonstration proprement dite. Nous commençons par deux lemmes faciles.

LEMME 3. Soient Θ une mesure aléatoire intégrable, U un processus borné t que $U^{o\hat{o}}=U^{\hat{o}o}$. Alors on a

$$E[\int U_s\ \Theta^{o\hat{o}}(ds)] = E[\int U_s\ \Theta^{\hat{o}o}(ds)]$$

DEMONSTRATION. Evidente.

LEMME 4. Soit α une mesure aléatoire intégrable, à la fois optionnelle et cooptionnelle. Soit $H=[u,v]$ un intervalle contenu dans $[a,b]$. Alors le processus

$$U_t = \alpha(H)I_H(t)$$

est tel que $U^{\hat{o}o}=U^{o\hat{o}}$.

DEMONSTRATION. Nous écrivons $U_t=X_t+Y_t+Z_t$, où ces trois processus sont nuls pour $t\notin H$, et pour $t\in H$

$$X_t = \alpha([u,t[) \ ,\quad Z_t= \alpha(]t,v]) \ ,\quad Y_t=\alpha(\{t\}) \ .$$

Le processus (X_t) est adapté et continu à gauche, donc prévisible, et en particulier optionnel ($X=X^o=X^p$) . Alors $X^{\hat{o}}=X^{p\hat{o}}=X^{\hat{o}p}$ est prévisible (th.] et en particulier optionnel. Donc $X^{\hat{o}o}=X^{\hat{o}}=X^{o\hat{o}}$.

De même, $Z^{o\hat{o}}=Z^{\hat{o}o}$.

Quant à Y, il vaut X_+-X (donc il est optionnel) et aussi Z_--Z (donc : est cooptionnel), donc $Y^{o\hat{o}}=Y^{\hat{o}o}=Y$. L'énoncé s'obtient par addition.

Voici les deux lemmes cruciaux :

LEMME 5. Soient $H=[u,v]$ un intervalle contenu dans $[a,b]$, f une v.a. bornée, g la v.a. $E[f|\underline{\underline{F}}_H]$. Alors les processus

$$Y_t = fI_H(t) \quad , \quad Z = gI_H(t)$$

ont tels que $Y^{\hat{o}o} = Z^{\hat{o}o}$, $Y^{o\hat{o}} = Z^{o\hat{o}}$.

EMONSTRATION. Démontrons par exemple la première relation : pour consruire $Y^{\hat{o}} = L$, nous considérons la martingale **renversée** continue à gauche $[f|\hat{\underline{\underline{F}}}_t]$, et nous avons $L_t = E[f|\hat{\underline{\underline{F}}}_t]I_H(t)$. De même, $Z^{\hat{o}} = M$ est donné par $_t = E[g|\hat{F}_t]I_H(t)$. Vérifier que $L^o = M^o$ revient à vérifier que, pour tout emps d'arrêt T (à valeurs dans $[a,b]\cup\{\infty\}$)

$$E[L_T I_{\{T\in H\}}] = E[M_T I_{\{T\in H\}}]$$

ela découlera par convergence dominée des relations

$$E[L_u I_{\{T=u\}}] = E[M_u I_{\{T=u\}}]$$

$$E[L_p I_{\{p<T\leq q\}}] = E[M_p I_{\{p<T\leq q\}}]$$ (prendre pour p et q des éléments consécutifs de la n-ième subdivision dyadique de $[u,v]$)

r $\{p<T\leq q\}\in\underline{\underline{F}}_q$, et $E[L_p|\underline{\underline{F}}_q] = E[f|\hat{\underline{\underline{F}}}_p|\underline{\underline{F}}_q] = E[f|\underline{\underline{F}}_{[p,q]}]$, tandis que $E[M_p|\underline{\underline{F}}_q]$ $E[f|\underline{\underline{F}}_{[u,v]}|\underline{\underline{F}}_{[p,q]}]$. Il y a bien égalité.

a ligne précédente se traite de manière analogue.

EMME 6. Soit λ une mesure aléatoire intégrable. Alors les mesures $\lambda^{o\hat{o}}$ et $^{\hat{o}o}$ sont à la fois optionnelles et cooptionnelles.

EMONSTRATION. On sait qu'une mesure aléatoire intégrable Θ est optionnele si et seulement si le processus croissant associé $\Theta([0,t])$ est optionel, et il en résulte par retournement du temps qu'elle est cooptionnelle i et seulement si $\Theta([t,\infty])$ est cooptionnel. En définitive, ce qu'il ous faut vérifier, c'est simplement que $\lambda^{o\hat{o}}(H)$ et $\lambda^{\hat{o}o}(H)$ sont $\underline{\underline{F}}_H$-mesurales pour tout intervalle $H=[u,v]$. Or reprenons les notations ci-dessus. n a $E[f\lambda^{o\hat{o}}(H)] = E[\int Y_s \lambda^{o\hat{o}}(ds)] = E[\int Y_s^{\hat{o}o}\lambda(ds)]$. D'après le lemme 5, cela aut aussi $E[\int Z_s^{\hat{o}o}\lambda(ds)] = E[\int Z_s \lambda^{o\hat{o}}(ds)] = E[g\lambda^{o\hat{o}}(H)]$. Comme f est arbitraie et $g=E[f|\underline{\underline{F}}_H]$, $\lambda^{o\hat{o}}(H)$ est $\underline{\underline{F}}_H$-mesurable.

aintenant, nous pouvons achever :

EMONSTRATION DU THEOREME 2. Nous reprenons le fil du raisonnement avant e lemme 3. Nous remarquons que, la mesure aléatoire λ ayant une masse totae $\lambda(\mathbb{R}_+)$ bornée, $\lambda^{o\hat{o}}(\mathbb{R}_+)$ et $\lambda^{\hat{o}o}(\mathbb{R}_+)$ ont des moments de tous les ordres par exemple, voir Prob. et Potentiels VI. 100). Appliquons le lemme 3 vec $\Theta=\lambda$, et $U_t=\lambda^{o\hat{o}}(H)I_H(t)$ (lemme 4). Il vient

$$E[(\lambda^{o\hat{o}}(H))^2] = E[\lambda^{o\hat{o}}(H)\lambda^{\hat{o}o}(H)] \;(= E[(\lambda^{\hat{o}o}(H))^2] \text{ par symétrie }).$$

'où aussitôt $E[(\lambda^{o\hat{o}}(H)-\lambda^{\hat{o}o}(H))^2]=0$, et comme H est un intervalle arbitraire, on en déduit que $\lambda^{o\hat{o}}=\lambda^{\hat{o}o}$.

REMARQUE. Une fois le théorème établi, il est évident que l'on a $\lambda^{o\hat{o}}=\lambda^{\hat{o}o}$ pour toute mesure aléatoire intégrable λ , par un simple argument de dualité. On n'a pas besoin de ce résultat plus général pour établir le th.2.

Le théorème 2 ayant été établi, Atkinson étudie les opérateurs de projection double ainsi construits (pour les trois paires qui commutent). Les résultats obtenus sont intéressants, mais il ne paraît pas indispensable de les présenter ici, et nous renverrons au mémoire original.

REFERENCES.

[1]. Atkinson (B.). Generalized strong Markov properties and applications

[2]. Azéma (J.). Une remarque sur les temps de retour. Trois applications Sém. Prob. VI, 1972, LN 258, p. 35-50.

[3]. Azéma (J.). Théorie générale des processus et retournement du temps. Ann. E.N.S. 6, 1973, p. 459-519.

[4]. Dynkin (E.B.). On a new approach to Markov processes. Proc. 3rd Japa USSR Symp. on Prob. Theory. LN 550, 1976, p. 42-62 (contient une bibliographie des travaux antérieurs).

[5]. Dynkin (E.B.). Markov systems and their additive functionals. Ann. Prob. 5, 1977, p. 653-677.

[6]. Meyer (P.A.). Retour aux retournements. Sém. Prob. IX, 1975, LN 465, p. 556-564.